STUDIA MATHEMATICA, T. LII (1974)

Faltungsoperatoren auf gewissen diskreten Gruppen

von

MICHAEL LEINERT (Bielefeld)

Zusammenfassung. In einer diskreten Gruppe G definiert jede Funktion $f \in L^2(G)$, deren Träger genügend unabhängig ist, durch Faltung einen beschränkten Operator von $L^2(G)$ (Abschnitt I). Als Konsequenz ergibt sich für Gruppen, die eine freie Untergruppe mit zwei Erzeugenden enthalten, daß die Fourier-Algebra nicht faktorisiert und „viele" Multiplikatoren besitzt, die nicht in der Fourier-Stieltjes-Algebra liegen (Abschnitt II). Einige Bemerkungen zur Bedingung (H) (vgl. [1], (4.14)), die zur Existenz approximierender (nicht notwendig beschränkter) Einheiten der Fourier-Algebra äquivalent ist, schließen sich an (Abschnitt III). Satz 1 wurde in [5] angekündigt.

G bezeichnet eine diskrete Gruppe, $K(G)$ die Menge der komplexen Funktionen auf G mit endlichem Träger, und $L^p(G)$, $1 \leqslant p < \infty$, den Banach-Raum der p-integrierbaren komplexen Funktionen auf G mit der Norm $f \mapsto |f|_p = \big(\sum_{x \in G} |f(x)|^p\big)^{1/p}$. Es ist $A(G)$ die Fourier-Algebra, $B(G)$ die Fourier-Stieltjes-Algebra von G (vgl. [1]) und $\mathrm{VN}(G)$ die von der links-regulären Darstellung ϱ von G auf $L^2(G)$ erzeugte von Neumann-Algebra. Mit Σ wird die Menge aller (Klassen von) stetigen unitären Hilbertraumdarstellungen von G bezeichnet, für $f \in K(G)$ sei $|f|_\Sigma = \sup_{\pi \in \Sigma} |\pi(f)|$, wo $|\ |$ die Operatornorm bedeutet. Ist f eine komplexe Funktion auf G, so bezeichnen wir ihren Träger mit $\operatorname{supp}(f)$ und definieren für $b \in G$ die Funktion f_b durch

$$f_b(a) = f(ab^{-1}), \quad a \in G.$$

Die zu f komplexkonjugierte Funktion bezeichnen wir mit $\bar{f}$, die Funktion $x \mapsto f(x^{-1})$ mit $\check{f}$. Definiert f durch Faltung einen beschränkten Operator auf $L^2(G)$, so bezeichnen wir dessen Norm mit $|f|_{\mathrm{VN}(G)}$. Unter einem Multiplikator der Fourier-Algebra $A(G)$ verstehen wir einen beschränkten Operator T auf $A(G)$ mit der Eigenschaft $T(ab) = Ta \cdot b$ für alle $a, b \in A(G)$. Sind B und C Teilmengen von G, so bezeichnet $B - C$ ihre mengentheoretische Differenz und χ_B die charakteristische Funktion von B. Das Eins-Element der Gruppe G bezeichnen wir mit e.

I. Definition. *Eine Teilmenge $P \subset G$ erfüllt die Bedingung $(*)$ wenn gilt: für jede natürliche Zahl n und Elemente $x_1, \ldots, x_{2n} \in P$ mit $x_i \neq x_{i+1}$ $(i = 1, \ldots, 2n-1)$ ist*

$$x_1^{-1}x_2x_3^{-1}x_4 \ldots x_{2n-1}^{-1}x_{2n} \neq e.$$

Satz 1. *Sei G eine diskrete Gruppe. Jede Funktion $f \in L^2(G)$, deren Träger die Bedingung $(*)$ erfüllt, definiert durch Faltung einen beschränkten Operator von $L^2(G)$, und es gibt eine Konstante $C > 0$, so daß $|f|_{VN(G)} \leqslant C|f|_2$ für alle solche Funktionen f.*

Beweis. Sei $f \in L^2(G)$ und erfülle $\operatorname{supp}(f)$ die Bedingung $(*)$.

Sei $g \in K(G)$ und $S = \operatorname{supp}(g)$. Wir können annehmen, daß f und g nichtnegative reelle Funktionen sind (sonst betrachte man die Absolutbeträge). Für $x \in G$ ist

$$(f*g)(x) = \sum_{s \in S} g(s)f(xs^{-1}).$$

Zwei Elemente $r, s \in S$ heißen *konjugiert* $(r \sim s)$, wenn

$$\operatorname{supp}(f_r) \cap \operatorname{supp}(f_s) \neq \emptyset,$$

was bedeutet, daß es Elemente $a, b \in \operatorname{supp}(f)$ gibt mit

$$ar = bs, \tag{1.1}$$

also mit

$$a^{-1}b = rs^{-1}.$$

Aus Bedingung $(*)$ folgt, daß die Menge $\operatorname{supp}(f_r) \cap \operatorname{supp}(f_s)$ für $r \neq s$ höchstens ein Element enthalten kann (denn für $r \neq s$ und $c, d \in \operatorname{supp}(f_r) \cap \operatorname{supp}(f_s)$ gilt $c = a_1 r = b_1 s$ und $d = a_2 r = b_2 s$ mit $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \operatorname{supp}(f)$, $a_1 \neq b_1$, $a_2 \neq b_2$, woraus wir $a_1^{-1}b_1b_2^{-1}a_2 = e$, also $b_1 = b_2$ und somit $c = d$ erhalten). Sei Y die Menge der $y \in G$, für welche in der Summe

$$\sum_{s \in S} g(s)f(ys^{-1}) \tag{1.2}$$

mindestens zwei von null verschiedene Terme vorkommen. Y ist eine endliche Menge (nach dem soeben Bemerkten). Für $y \in Y$ sei

$$S_y = \{s \in S |\; y \in \operatorname{supp}(f_s)\}.$$

Dann gilt

$$f*g(y) = \sum_{s \in S_y} g(s)f(ys^{-1}).$$

Sei $s_1 \in S_y$ für ein $y \in Y$. Man wähle $s_2 \in S$ so, daß $s_2 \neq s_1$, aber $s_2 \sim s_1$, falls ein solches s_2 existiert. Durch Induktion wählt man s_n: $s_n \neq s_1, \ldots, s_{n-1}$, aber $s_n \sim s_j$ für ein $j < n$. Dieser Auswahlprozeß bricht ab, da S endlich

ist. Gibt es ein Element $s_1' \in \bigcup_{y \in Y} S_y$, das in der soeben definierten endlichen Folge nicht vorkommt, so können wir nach demselben Verfahren eine zweite Folge konstruieren. Durch Induktion erhalten wir eine endliche Anzahl von endlichen Folgen, so daß jedes Element von $\bigcup_{y \in Y} S_y$ in einer dieser Folgen vorkommt. Es gilt

(1.3) (i) *Die soeben gebildeten Folgen sind „disjunkt", d.h. kein Element $s \in S$ kommt in zwei verschiedenen Folgen vor.*

(ii) *Sei $y \in Y$. Wenn $s \in S_y$ in einer dieser Folgen vorkommt, so kommt jedes $s' \in S_y$ in derselben Folge vor.*

(iii) *Sei $s_1, \ldots, s_m$ eine dieser Folgen. Für $i \in \{1, \ldots, m\}$ sei $Y_i = \{y \in Y |\; s_i \in S_y;\; s_1, \ldots, s_{i-1} \notin S_y\}$. Seien $\varrho, \tau \in \{1, \ldots, m\}$, $\varrho \neq \tau$. Dann gilt*

$$\Big(\bigcup_{y \in Y_\varrho} S_y - \{s_\varrho\}\Big) \cap \Big(\bigcup_{y \in Y_\tau} S_y - \{s_\tau\}\Big) = \emptyset.$$

Beweis. (i) und (ii) sind klar. Wir beweisen (iii) indirekt. Sei s aus dem angegebenen Durchschnitt. Es gilt $s \sim s_\varrho$, $s \sim s_\tau$, also $s = s_\lambda$ mit $\lambda > \varrho$, $\lambda > \tau$. Nach Konstruktion der Folge $s_1, \ldots, s_m$ gibt es Indizes $\nu_1, \ldots, \nu_q \in \{1, \ldots, m\}$ mit $\nu_q = 1$ und der Eigenschaft, daß in der Folge

$$s_\lambda, s_\varrho, s_{\nu_1}, \ldots, s_{\nu_q} = s_1$$

jedes Element vom vorhergehenden verschieden und zu ihm konjugiert ist. Kann man dabei irgendwelche Elemente s_{ν_i} weglassen, ohne daß diese Eigenschaft verloren geht, so wollen wir dies tun.

Analog gibt es $\mu_1, \ldots, \mu_p \in \{1, \ldots, m\}$, so daß die Folge

$$s_\lambda, s_\tau, s_{\mu_1}, \ldots, s_{\mu_p} = s_1$$

obige Eigenschaft hat. Auch hier seien „unnötige" Elemente s_{μ_i} weggelassen.

Gemäß der Definition von $\sim$ gibt es Elemente $a_1, \ldots, a_{2q+2}, b_1, \ldots \ldots, b_{2p+2} \in \operatorname{supp}(f)$, so daß gilt:

$$\begin{aligned} s_\lambda s_\varrho^{-1} &= a_1^{-1}a_2, \\ s_\varrho s_{\nu_1}^{-1} &= a_3^{-1}a_4, \\ s_{\nu_1} s_{\nu_2}^{-1} &= a_5^{-1}a_6, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ s_{\nu_{q-1}} s_{\nu_q}^{-1} &= a_{2q+1}^{-1}a_{2q+2} \end{aligned} \tag{1.4}$$

und

$$\begin{aligned} s_\lambda s_\tau^{-1} &= b_1^{-1}b_2, \\ s_\tau s_{\mu_1}^{-1} &= b_3^{-1}b_4, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ s_{\mu_{p-1}} s_{\mu_p}^{-1} &= b_{2p+1}^{-1}b_{2p}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

(1.6) *Seien* $q, r, s \in S$ *mit* $q \sim r \sim s$, *gebe es also Elemente* $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \operatorname{supp}(f)$ *mit*

$$c_1^{-1}c_2 = qr^{-1},$$
$$d_1^{-1}d_2 = rs^{-1}.$$

Ist q *nicht konjugiert zu* s, *so gilt* $c_2 \neq d_1$.

Beweis. Sei $c_2 = d_1$. Dann gilt $c_1^{-1}d_2 = qs^{-1}$, also $q \sim s$.

Nach (1.6), und weil offenbar $a_{2i} \neq a_{2i-1}$ für $i = 1, \ldots, q+1$ und $b_{2j} \neq b_{2j-1}$ für $j = 1, \ldots, p+1$, erhalten wir

$$a_1 \neq a_2, \quad a_i \neq a_{i+1} \quad \text{für} \quad i \geqslant 3,$$
$$b_1 \neq b_2, \quad b_j \neq b_{j+1} \quad \text{für} \quad j \geqslant 3.$$

Aus (1.4) und (1.5) ergibt sich

$$(1.7) \qquad s_\lambda s_1^{-1} = s_\lambda s_\varrho^{-1} s_\varrho s_{\nu_1}^{-1} \ldots s_{\nu_{q-1}} s_{\nu_q}^{-1} = a_1^{-1} a_2 a_3^{-1} a_4 \ldots a_{2q+1}^{-1} a_{2q+2}$$

und

$$(1.8) \qquad s_\lambda s_1^{-1} = s_\lambda s_\tau^{-1} s_\tau s_{\mu_1}^{-1} \ldots s_{\mu_{p-1}} s_{\mu_p}^{-1} = b_1^{-1} b_2 b_3^{-1} b_4 \ldots b_{2p+1}^{-1} b_{2p+2}.$$

Falls $a_2 = a_3$, reduzieren wir den oben stehenden Ausdruck $a_1^{-1} \ldots a_{2q+2}$, indem wir $a_2 a_3^{-1}$ weglassen. Das reduzierte Produkt $a_1^{-1} \ldots a_{2q+2}$ beginnt dann mit $a_1^{-1}a_4$, wobei $a_1 \neq a_4$ wegen $s_\lambda \neq s_{\nu_1}$. Analog können wir den Ausdruck $b_1^{-1} \ldots b_{2p+2}$ reduzieren, falls $b_2 = b_3$. Dividieren wir nun die beiden Ausdrücke durcheinander, so erhalten wir aus (1.7) und (1.8)

$$e = b_{2p+2}^{-1} \ldots b_4^{-1}(b_3 b_2^{-1}) b_1 a_1^{-1} (a_2 a_3^{-1}) a_4 \ldots a_{2q+2},$$

wobei die Terme in den Klammern gegebenenfalls fehlen und $b_i \neq b_{i+1}$, $a_j \neq a_{j+1}$ für alle vorkommenden i, j sowie $b_1 \neq b_4$, falls $b_3 b_2^{-1}$ fehlt, $a_1 \neq a_4$, falls $a_2 a_3^{-1}$ fehlt. Wegen Bedingung $(*)$ muß also $a_1 = b_1$ gelten. Damit haben wir

$$a_1 s_\lambda = a_2 s_\varrho = b_2 s_\tau.$$

Ohne Einschränkung sei $\varrho < \tau$. Nach Voraussetzung ist s_λ insbesondere in der rechten Seite des unter (1.3), (iii) notierten Durchschnitts enthalten, d.h. $\operatorname{supp}(f_{s_\lambda})$ und $\operatorname{supp}(f_{s_\tau})$ besitzen einen gemeinsamen Punkt, der nicht zu $\operatorname{supp}(f_{s_\varrho})$ gehört. Wie wir soeben sahen, haben $\operatorname{supp}(f_{s_\lambda})$ und $\operatorname{supp}(f_{s_\tau})$ auch den Punkt $a_1 s_\lambda$ gemeinsam, der zu $\operatorname{supp}(f_{s_\varrho})$ gehört, also von dem soeben genannten Punkt verschieden sein muß. Das ist ein Widerspruch, denn $\operatorname{supp}(f_{s_\lambda}) \cap \operatorname{supp}(f_{\tau s})$ enthält höchstens einen Punkt (vgl. den Text nach (1.1)). Damit ist (1.3), (iii) bewiesen.

Sei $s_1, \ldots, s_m$ eine der vor (1.3) definierten Folgen. Für $i \in \{1, \ldots, m\}$ sei wieder $Y_i = \{y \in Y \mid s_i \in S_y;\ s_1, \ldots, s_{i-1} \notin S_y\}$ und es sei $Y_0 = \{y \in Y \mid s_i \in S_y$ für ein i, $1 \leqslant i \leqslant m\}$. Nach (1.3), (ii) gilt

$$(1.9) \qquad \bigcup_{y \in Y_0} S_y = \{s_1, \ldots, s_m\}.$$

Wir erhalten

$$\sum_{y \in Y_0} \big((f*g)(y)\big)^2 = \sum_{h=1}^{m} \sum_{y \in Y_h} \big((f*g)(y)\big)^2$$
$$\leqslant \sum_{h=1}^{m} \sum_{y \in Y_h} \Big(2g(s_h)^2 f(ys_h^{-1})^2 + 2\Big(\sum_{\substack{s \in S_y \\ s \neq s_h}} g(s) f(ys^{-1})\Big)^2\Big)$$

wegen $(a+b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$ für $a, b \in \boldsymbol{R}$;

$$\leqslant \sum_{h=1}^{m} \Big(2g(s_h)^2 |f|_2^2 + 2 \sum_{y \in Y_h} \Big(\sum_{\substack{s \in S_y \\ s \neq s_h}} g(s)^2\Big)\Big(\sum_{\substack{s \in S_y \\ s \neq s_h}} f(ys^{-1})^2\Big)\Big)$$

nach der Schwarz'schen Ungleichung;

$$\leqslant \sum_{h=1}^{m} \Big(2g(s_h)^2 |f|_2^2 + 2\Big(\sum_{s \in \bigcup_{y \in Y_h} S_y - \{s_h\}} g(s)^2 |f|_2^2\Big)\Big),$$

denn für festes s_h sind die Mengen $S_y - \{s_h\}$ mit $s_h \in S_y$ für verschiedene Werte von y disjunkt (vgl. den Text nach (1.1));

$$\leqslant 2 \sum_{h=1}^{m} g(s_h)^2 |f|_2^2 + 2 \sum_{s \in \bigcup_{y \in Y_0} S_y} g(s)^2 |f|_2^2$$

nach (1.3), (iii);

$$\leqslant 4 \sum_{s \in \bigcup_{y \in Y_0} S_y} g(s)^2 |f|_2^2$$

nach (1.9).

Wir können nun die Norm von $f*g$ abschätzen. Wegen (1.3), (i) und dem Text davor erhalten wir

$$|f*g|_2^2 \leqslant \sum_{\substack{s \in S \\ x \notin Y}} g(s)^2 f(xs^{-1})^2 + 4 \sum_{s \in \bigcup_{y \in Y} S_y} g(s)^2 |f|_2^2$$
$$\leqslant \sum_{s \in S} g(s)^2 |f|_2^2 + 4 \sum_{s \in S} g(s)^2 |f|_2^2 \leqslant 5 |g|_2^2 |f|_2^2.$$

Diese Ungleichung bleibt auch für beliebiges $g \in L^2(G)$ richtig, wie man leicht nachprüft. Damit ist der Satz bewiesen.

(1.10) *Sei* G *die freie Gruppe mit zwei Erzeugenden. Es gibt eine unendliche Teilmenge* $P \subset G$, *die Bedingung* $(*)$ *erfüllt, zum Beispiel*

$$P = \{a^n b^n \mid n \in \boldsymbol{Z}\},$$

wo $\boldsymbol{Z}$ *die ganzen Zahlen bezeichnet.*

(1.11) *Sei G eine Gruppe, $P \subset G$ eine Teilmenge mit mindestens vier Elementen, die Bedingung* (*) *erfüllt. Dann enthält G eine freie Untergruppe mit zwei Erzeugenden.*

Beweis. Seien a, b, c, d vier verschiedene Elemente von P. Setzt man

$$u = a^{-1}b, \quad v = c^{-1}d,$$

so folgt aus Bedingung (*), daß u und v freie Erzeugende sind.

II. Sei E eine Teilmenge von G, welche folgende Bedingung erfüllt:

(**) *Es gibt eine Konstante $C > 0$, so daß für alle $h \in K(G)$ mit* $\operatorname{supp}(h) \subset E$ *gilt:*

$$|h|_{VN(G)} \leqslant C|h|_2.$$

Durch Dualität ist (**) äquivalent mit:

(2.1) *Für $u \in A(G)$ gilt $u\chi_E \in L^2(G)$ und*

$$|u\chi_E|_2 \leqslant C|u|_{A(G)}.$$

Ist X eine vollständige normierte Funktionenalgebra auf G, so sind die Multiplikatoren von X die Funktionen f auf G mit der Eigenschaft $f \cdot g \in X$ für alle $g \in X$ (die Stetigkeit von $g \mapsto f \cdot g$ folgt aus dem Satz vom abgeschlossenen Graphen).

So erhalten wir wegen (2.1) für $A(G)$: die Multiplikatoren von $A(G)$ mit Träger in E sind gerade alle beschränkten Funktionen auf G mit Träger in E (daß Multiplikatoren von $A(G)$ stets beschränkte Funktionen sind, folgt aus $|_a u|_{A(G)} = |u|_{A(G)}$, $a \in G$, $u \in A(G)$). Ist f ein solcher Multiplikator und gilt $f \notin B(G)$, so folgt natürlich $f \notin L^2(G)$ (wegen $L^2(G) \subset A(G) \subset B(G)$). Umgekehrt gilt

Satz 2. *Sei f eine komplexwertige Funktion auf G mit* $\operatorname{supp}(f) \subset E$ *(E wie oben), $f \notin L^2(G)$. Dann gibt es eine Teilmenge $H \subset E$, so daß $g = f \cdot \chi_H \notin B(G)$.*

Beweis. Sei $f = f_0$ eine Funktion mit $\operatorname{supp}(f) \subset E$, $f \notin L^2(G)$. Es gibt ein $h_1 \in K(G)$ mit $K_1 = \operatorname{supp}(h_1) \subset E$ und $|h_1|_2 = 1/C$ (C wie in (**)), so daß

$$\Big|\sum_{x \in G} f(x) h_1(x)\Big| > 1. \tag{2.2}$$

Diese Ungleichung impliziert $|f \cdot \chi_{K_1}|_{A(G)} > 1$, denn nach (**) gilt $|h_1|_{VN(G)} \leqslant 1$. Wegen $|f \cdot \chi_{K_1}|_{A(G)} = |f \cdot \chi_{K_1}|_{B(G)}$ gibt es ein $l_1 \in K(G)$ mit $|l_1|_\Sigma \leqslant 1$, so daß

$$\Big|\sum_{x \in G} f(x)\chi_{K_1}(x) l_1(x)\Big| > 1.$$

Sei $H_1 = (\operatorname{supp}(f) - \operatorname{supp}(l_1)) \cup K_1$. Wir definieren $f_1 = f \cdot \chi_{H_1} = f_0 \cdot \chi_{H_1}$. Nach Konstruktion gilt $\operatorname{supp}(f_1) \subset E$, $f_1 \notin L^2(G)$ und $|f_1|_{B(G)} > 1$. Wir

fahren mit Induktion fort. Seien $K_n \subset E$ und f_n schon konstruiert und gelte $\operatorname{supp}(f_n) \subset E$, $f_n \notin L^2(G)$, $|f_n|_{B(G)} > n$. Es gibt eine Funktion $h_{n+1} \in K(G)$ mit $K_{n+1} = \operatorname{supp}(h_{n+1}) \subset E$, $K_{n+1} \supset K_n$ und $|h_{n+1}|_2 = 1/C$, so daß

$$\Big|\sum_{x \in G} f_n(x) h_{n+1}(x)\Big| > n+1.$$

Dann gilt $|f_n \cdot \chi_{K_{n+1}}|_{A(G)} > n+1$, und es gibt ein $l_{n+1} \in K(G)$ mit $|l_{n+1}|_\Sigma \leqslant 1$, so daß

$$\Big|\sum_{x \in G} f_n(x)\chi_{K_{n+1}}(x) l_{n+1}(x)\Big| > n+1.$$

Sei $H_{n+1} = (\operatorname{supp}(f_n) - \operatorname{supp}(l_{n+1})) \cup K_{n+1}$. Wir definieren $f_{n+1} = f_n \cdot \chi_{H_{n+1}}$.

Die Folge $\{f_n\}$ konvergiert punktweise auf G gegen die Funktion $g = f \cdot \chi_H$ mit $H = \bigcap_n H_n$. Nach Konstruktion gilt

$$\Big|\sum_{x \in G} g(x) l_n(x)\Big| > n$$

für alle $n \in N$, also $g \notin B(G)$.

Ist G eine diskrete Gruppe mit einer von zwei Elementen erzeugten freien Untergruppe, so folgt aus dem soeben bewiesenen Satz zusammen mit Satz 1 und (1.10), daß es „viele" Multiplikatoren von $A(G)$ gibt, die nicht in $B(G)$ liegen. Dies verbessert ein Ergebnis von A. Figà-Talamanca und M. Picardello ([3]).

M. Lefranc ([4]) hat gezeigt, daß die charakteristische Funktion einer Teilmenge E einer diskreten Gruppe G genau dann zu $B(G)$ gehört, wenn E in dem Ring liegt, der von Untergruppen von G und deren Rechts- und Linksverschobenen erzeugt wird. Die in (1.10) erwähnte Teilmenge der freien Gruppe mit zwei Erzeugenden erfüllt diese Bedingung nicht, ihre charakteristische Funktion ist also ein konkretes Beispiel eines Multiplikators von $A(G)$, der nicht in $B(G)$ liegt.

(2.3) *Die Fourier-Algebra $A(G)$ einer diskreten Gruppe G, die eine freie Untergruppe mit zwei Erzeugenden enthält, faktorisiert nicht, d.h. es gilt*

$$A(G) \cdot A(G) \neq A(G).$$

Dies folgt aus (2.1), denn G enthält eine unendliche Teilmenge E, welche (**) erfüllt.

Man kann also vermuten, daß die Fourier-Algebra einer diskreten Gruppe genau dann faktorisiert, wenn die Gruppe amenabel ist.

Ist E wieder eine Teilmenge von G, die (**) erfüllt, so ist auf dem Raum der Multiplikatoren von $A(G)$ mit Träger in E die Multiplikatornorm äquivalent zur Supremumsnorm (nach dem Satz von der offenen

Abbildung). Auf dem Raum der Funktionen aus $A(G)$ mit Träger in E sind wegen (2.1) die Normen $|\ |_2$ und $|\ |_{A(G)}$ äquivalent. Also gilt

(2.4) *Ist G eine diskrete Gruppe, die eine freie Untergruppe mit zwei Erzeugenden enthält, so gibt es Funktionen $f\in A(G)$ mit $|f|_{A(G)}=1$, deren Multiplikatornorm $\sup\{|f\cdot g|_{A(G)} \mid g\in A(G),\ |g|_{A(G)}\leqslant 1\}$ beliebig klein ist.*

Aus (2.4) folgt insbesondere, daß unter den angegebenen Voraussetzungen $B(G)$ kein abgeschlossener Teilraum des Banach-Raumes aller Multiplikatoren von $A(G)$ ist.

III. Setzt man für $T\in \mathrm{VN}(G)$ und $v\in A(G)$ — es sei $v=f*\check{g}$ mit $f, g\in L^2(G)$ —

$$\varphi_T(v) = (Tg|\bar{f}),$$

so ist bekanntlich die Abbildung $T\mapsto\varphi_T$ ein isometrischer Isomorphismus von $\mathrm{VN}(G)$ auf den Dualraum von $A(G)$. Für $u\in B(G)$ und $T\in\mathrm{VN}(G)$ definiert man $uT\in\mathrm{VN}(G)$ durch

$$\varphi_{uT}(v) = \varphi_T(uv),$$

$v\in A(G)$. Wir erinnern an die folgende Definition aus [1]:

Definition. *Der Operator $T\in\mathrm{VN}(G)$ erfüllt die Bedingung* (H), *wenn gilt: für $v\in A(G)$ mit $vT=0$ ist $\varphi_T(v)=0$.*

Bei diskretem G ist für $v\in A(G)$ die Aussage $vT=0$ gleichbedeutend damit, daß v auf dem Träger von T verschwindet (vgl. [1], (4.4) und (4.19)), und jedes $T\in\mathrm{VN}(G)$ ist ein Faltungsoperator T_μ: $f\mapsto\mu*f$ mit einer geeigneten Funktion $\mu\in L^2(G)$, so daß wir erhalten: der Operator $T=T_\mu\in\mathrm{VN}(G)$ erfüllt die Bedingung (H) genau dann, wenn für $v=f*\check{g}$, $f, g\in L^2(G)$, mit $v(x)=0$ für $x\in\mathrm{supp}(T)$ gilt:

$$(\mu*g\mid\bar{f}) = \int\mu(x)v(x)\,dx = 0, \tag{3.1}$$

also

$$\iint\mu(xy^{-1})g(y)f(x)\,dy\,dx = \iint\mu(x)f(xy)g(y)\,dy\,dx. \tag{3.2}$$

Das Problem ist demnach, ob man auf der linken Seite von (3.2) die Integrationen vertauschen und nach Translation der Variablen x von rechts mit y wieder vertauschen kann. Die erste Vertauschung ist sicher erlaubt, denn es gilt $(\check{f}*\mu)*g=\check{f}*(\mu*g)$, wie man ohne Schwierigkeiten nachprüft, da $T_\mu\in\mathrm{VN}(G)$. Für die zweite Vertauschung der Integrationen ist die Voraussetzung $v(x)=0$ für $x\in\mathrm{supp}(T)$ wichtig. Verzichtet man darauf, so braucht die rechte Seite von (3.2) selbst bei kommutativem G nicht zu existieren.

In vielen Fällen, wie zum Beispiel den folgenden, sieht man, daß die kritische Vertauschung erlaubt ist:

(i) T läßt sich durch endliche Linearkombinationen $\sum\lambda_i\varrho(x_i)$, $x_i\in\mathrm{supp}(T)$, schwach approximieren.

(ii) Es gibt eine Konstante $C>0$ und ein Netz endlicher Mengen $K_\lambda\subset\mathrm{supp}(T)$ mit $\bigcup K_\lambda=\mathrm{supp}(T)$, so daß $|\chi_{K_\lambda}T|_{\mathrm{VN}(G)}\leqslant C$ für alle λ (Spezialfall von (i)).

(iii) Es gilt $\mu\in L^1(G)$.

(iv) Es gilt $\mu(x)\geqslant 0$ für alle $x\in G$.

(v) $\mathrm{supp}(T)$ ist eine Wiener-Menge, d.h. eine Synthesemenge, für $A(G)$.

(vi) Es gilt $\chi_{\mathrm{supp}(T)}\in B(G)$ (Spezialfall von (v)).

(vii) $\mathrm{supp}(T)$ oder $G-\mathrm{supp}(T)$ erfüllt (**) (Spezialfall von (v)).

(viii) $\mathrm{supp}(T)$ ist enthalten in einer amenablen Untergruppe von G.

Bei (i) handelt es sich übrigens nur um eine andere Formulierung der Bedingung (H) (vgl. [1], (4.14)). Unter (vii) haben wir folgende Tatsache benutzt:

Sei E eine Teilmenge von G. Erfüllt E oder $G-E$ die Bedingung (**), so ist E eine Wiener-Menge.

Der zweite Fall ist klar wegen (2.1), betrachten wir also den ersten Fall: E erfülle (**). Sei $f\in A(G)$ mit $f|_E=0$, sei $\varepsilon>0$ und $g\in K(G)$ mit $|f-g|_{A(G)}<\varepsilon$. Sei $h=g\cdot\chi_E$. Wegen (2.1) gilt

$$|h|_{A(G)}\leqslant|h|_2=|(g-f)\chi_E|_2\leqslant C\cdot\varepsilon,$$

also

$$|f-(g-h)|_{A(G)}\leqslant\varepsilon+C\cdot\varepsilon.$$

Somit ist E eine Wiener-Menge.

Folgende Bedingungen sind äquivalent:

(a) Jedes $T\in\mathrm{VN}(G)$ erfüllt die Bedingung (H).

(b) Jedes $T\in\mathrm{VN}(G)$ läßt sich durch endliche Linearkombinationen $\sum\lambda_i\varrho(x_i)$, $x_i\in\mathrm{supp}(T)$, schwach approximieren.

(c) Jedes $u\in A(G)$ läßt sich durch Funktionen $v\in K(G)$ mit $\mathrm{supp}(v)\subset\mathrm{supp}(u)$ in der Norm von $A(G)$ approximieren.

(d) Jedes $u\in A(G)$ läßt sich durch Funktionen $v\in K(G)$ mit $\mathrm{supp}(v)\subset\mathrm{supp}(u)$ schwach (im Sinne der Dualität mit $\mathrm{VN}(G)$) approximieren.

(e) Jede Menge $M\subset G$ ist Wiener-Menge.

(f) $A(G)$ hat approximierende (nicht notwendig beschränkte) Einheiten.

Die Beziehungen (a) $\Leftrightarrow$ (b), (c) $\Leftrightarrow$ (e), (c) $\Leftrightarrow$ (f) sind klar. Man erhält (a) $\Leftrightarrow$ (f) mit Hilfe des Satzes von Hahn-Banach. Offenbar gilt (c) $\Rightarrow$ (d), aber auch (d) $\Rightarrow$ (a) (vgl. den Text vor (3.1)).

Wie aus dem Beweis hervorgeht, gilt die Beziehung (a) $\Leftrightarrow$ (f) für beliebige lokal kompakte Gruppen.

PROBLEM: Hat die Fourier-Algebra der freien Gruppe mit zwei Erzeugenden approximierende Einheiten? Oder allgemeiner: Gibt es lokal kompakte Gruppen, deren Fourier-Algebra keine approximierenden Einheiten besitzt (auch keine unbeschränkten)?

Für einige Verbesserungen und Hinweise bin ich P. Eymard sehr zu Dank verpflichtet.

Literatur

[1] P. Eymard, *L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact*, Bull. Soc. Math. France 92 (1964), S. 181–236.

[2] — *Algèbres A_p et convoluteurs de L^p*, Séminaire Bourbaki, 22e année, 1969/70, nº 367.

[3] A. Figà-Talamanca et M. Picardello, *Multiplicateurs de $A(G)$ qui ne sont pas dans $B(G)$*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, 9 juillet 1973.

[4] M. Lefranc, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, 26 juin 1972.

[5] M. Leinert, *Convoluteurs de groupes discrets*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris 271 (1970), S. 630–631.

Received August 10, 1973 (726)

STUDIA MATHEMATICA, T. LII. (1974)

Sums of independent Banach space valued random variables

by

JØRGEN HOFFMANN-JØRGENSEN (Århus)

Abstract. Various generalizations of classical theorems about sums of independent real random variables to Banach space valued random variables are given: Let (X_n) be independent random variables with values in a Banach space, and let (S_n) be their partial sums. Then necessary and sufficient conditions for (S_n) to converge in L^p is given $(0 < p \leqslant \infty)$. For $p = \infty$ this gives a new characterization of those Banach spaces which do not contain c_0. Later we characterize the class of Banach spaces for which a.s. boundedness of (S_n) implies a.s. convergence of (S_n). Finally we prove that convergence in distribution of (S_n) in a weak topology of our Banach space implies a.s. norm-convergence.

1. Introduction. We shall in this paper study the properties of series of independent random variables with values in a Banach space, that is, series of the form

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \tag{1.1}$$

where $X_1, X_2, \ldots$ are independent random variables with values in a Banach space E.

Such series have been studied by Nordlander [13], Kahane [9], and Ito and Nisio [8].

Section 2 contains the basic definitions and notation, and we list some known lemmas and theorems for reference in later sections.

In Section 3 we study boundedness and convergence of (1.1) in L^p $(0 \leqslant p \leqslant \infty)$. Theorem 3.1 is a generalization of Theorem 4, p. 17 in [9] and of Theorem 18.1.A, p. 254 in [12]. In [9] Kahane only considers the case $X_n = \varepsilon_n x_n$ where (ε_n) is a Bernoulli sequence and (x_n) is a non-random sequence of vectors. In [12] Loéve only considers the case where X_n is real and the X_n's are uniformly bounded. Theorem 3.1 gives new results even for real valued random variables. Theorem 3.5 and Corollary 3.7 give a new characterization of those Banach spaces that do not contain c_0.

In Section 4 we show that convergence or boundedness of (1.1) may imply convergence or boundedness of

$$\sum_{1}^{\infty} Y_n$$