Thus each operator k_n satisfies the Hörmander condition in a uniform manner.

That M is of strong type p-p for all $1 < p < \infty$, and weak type 1-1 follows from the methods of Coifman and Weiss ([4], pp. 71–75) and the observation that there is a constant A independent of x and r such that

$$S(x, r) \leqslant AS(x, r/2) \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1, r > 0),$$

where

$$S(x, r) = m\{[x-r, x+r] \cap [-1, 1]\}.$$

Acknowledgment. The problem solved in this paper was suggested to us by Professors R. Coifman and G. Weiss during their seminars at Washington University in 1971–1972. We wish to thank them for their suggestions and encouragement.

References

[1] A. Bonami, *Multiplicateurs des séries ultrasphériques*. C. R. Acad. Sci. Paris 273 (1971), pp. 148–150.

[2] P. L. Butzer, R. J. Nessel, and W. Trebels, *On summation processes of Fourier expansions in Banach Spaces* II, Saturation theorems. Tôhoku Math. J. 24 (1972), pp. 127–140.

[3] R. R. Coifman and G. Weiss, *Representations of compact groups and spherical harmonics*, Enseignement Math. 14 (1968), pp. 121–173.

[4] — *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogenes*, Lecture Notes in Mathematics 242. Berlin 1971.

[5] I. I. Hirschman, Jr., *Harmonic analysis and ultraspherical polynomials*, Symposium of the Conference on Harmonic Analysis, Cornell 1956.

[6] — *Sur les polynomes ultrasphériques*. C. R. Acad. Sci. Paris, 242 (1956), pp. 2212–2214.

[7] L. Hörmander, *Estimates for translation invariant operators in L^p spaces*, Acta. Math 104 (1960), pp. 93–139.

[8] B. Muckenhoupt, *On certain singular integrals*, Pacific J. Math. (1960), pp. 239–261.

[9] — and E. M. Stein, *Classical expansions and their relations to conjugate harmonic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 118 (1965), pp. 17–92.

[10] A. Schwartz, *The structure of the algebra of Hankel transforms and the algebra of Hankel–Stieltjes transforms*, Canad J. Math. 23 (1971), pp. 236–246.

[11] R. S. Strichartz, *Multipliers for spherical harmonic expansions*, Trans. Am. Math. Soc. 167 (1972), pp. 115–124.

[12] G. Szegö, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloq. Pub. Vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1967.

Received April 4, 1973 (671)

STUDIA MATHEMATICA, T. LI. (1974)

Ersetzbarkeit von konvergenztreuen Matrixverfahren

von

JOHANN BOOS (Tübingen)

Auszug. Die Ersetzbarkeit von konvergenztreuen Matrixverfahren wurde von Wilansky, Chang, Macphail, Snyder und Bennett in den Arbeiten [1], [4], [6] und [7] betrachtet. In der folgenden Arbeit werden weitere notwendige und hinreichende Bedingungen für die Ersetzbarkeit gegeben.

1. Einleitung und Bezeichnungen. Wie üblich bezeichnen wir mit ω, m, c, c_0 bzw. l den Raum aller (komplexwertigen) Folgen, der beschränkten Folgen, der konvergenten Folgen, der Nullfolgen bzw. den Raum der absolut summierbaren Folgen. Weiter bezeichnen wir mit e die Folge mit 1 an jeder Stelle und mit e^k $(k \in \boldsymbol{N})$ die Folgen mit 1 an der k-ten Stelle und null sonst.

Die Elemente aus ω fassen wir als (unendliche) Spalten auf. Ist $A = (a_{nk})_{n,k=1}^{\infty}$ eine unendliche Matrix mit komplexen Koeffizienten und $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in \omega$, so definiert das „Matrixprodukt" $Ax := \left(y_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k\right)_{n=1}^{\infty}$ eine lineare Abbildung von $d_A := \{x \in \omega : y_n \text{ existiert für alle } n \in \boldsymbol{N}\}$ in ω; A als Transformationsmatrix nennen wir *Matrixverfahren*. Ebenso ist für $x, s \in \omega$ in natürlicher Weise das „Matrixprodukt"

$$\bar{\bar{s}}x := \sum_{k=1}^{\infty} s_k x_k$$

definiert, falls die Reihe existiert und $\bar{\bar{s}}$ die zu s transponierte Folge ist. Bezeichnen wir mit

$$c_A := \left\{x \in d_A : \lim_A x := \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k \text{ existiert}\right\}$$

das *Wirkfeld von A*, so heißt A *konvergenztreu*, wenn $c \subseteq c_A$ gilt. A heißt *absolut konvergenztreu*, wenn

$$l \subseteq l_A := \{x \in d_A : y = Ax \in l\} \quad \text{gilt}.$$

Das Wirkfeld von A können wir mit einer (eindeutig bestimmten) FK-Topologie versehen (vgl. [8], S. 38 ff). Ist c'_A der Dualraum des FK-Raumes c_A, so verwenden wir folgende Bezeichnungen (vgl. [7]):

$$L_A := \left\{x \in c_A : \sup_{m,n \in N} \left|\sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k\right| < \infty\right\};$$

$$I_A := \left\{x \in c_A : \sum_{k=1}^{\infty} x_k \lim\nolimits_A e^k \text{ existiert}\right\};$$

$$F_A := \left\{x \in c_A : \sum_{k=1}^{\infty} f(e^k) x_k \text{ existiert für alle } f \in c'_A\right\};$$

$$W_A := \left\{x \in c_A : f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(e^k) x_k \text{ für alle } f \in c'_A\right\};$$

$$P_A := \{x \in c_A : (\bar{\bar{t}}A)x = \bar{\bar{t}}(Ax) \text{ für alle } t \in T_A\}$$

mit

$$T_A := \{t \in l : (\bar{\bar{t}}A)x \text{ existiert für alle } x \in c_A\}.$$

Gilt $I_A = c_A$, so sagen wir, A besitzt „*maximal inset*". Nach Wilansky ([7]; 5.1, 5.2 und 6.2) gelten für konvergenztreue Matrixverfahren A die Beziehungen

(1) $$c_0 \subseteq W_A \subseteq F_A$$

und

(2) $$c_0 \subseteq c \subseteq m \cap c_A \subseteq F_A = L_A \cap I_A \subseteq L_A \subseteq P_A.$$

Stellt man $f \in c'_A$ nach Zeller ([8], Satz 5.2) durch

(3) $$f(x) = \alpha \lim\nolimits_A x + \bar{\bar{t}}(Ax) + \bar{\bar{s}}x$$

mit geeignetem $\alpha \in C$ und $t, s \in l$ ($\bar{\bar{s}}x$ existiert für alle $x \in c_A$) dar, so gilt nach Wilansky ([7], Lemma 5.3)

(4) $$f(x) = \alpha\left(\lim\nolimits_A x - \sum_{k=1}^{\infty} x_k \lim\nolimits_A e^k\right) - \sum_{k=1}^{\infty} f(e^k) x_k$$

für alle $x \in F_A$.

Ein konvergenztreues Matrixverfahren A heißt

konullär, falls $\chi(A) := \lim_A e - \sum_{k=1}^{\infty} \lim_A e^k = 0$,

koregulär, falls $\chi(A) \neq 0$,

fast-koregulär (nach einer Definition von Wilansky), wenn $F_A \neq W_A$ und *δ-multiplikativ*, falls $\lim_A x = \delta \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ für alle $x \in c$ gilt.

Insbesondere sind koreguläre Verfahren fast-koregulär. Weiter verifiziert man sofort, daß A genau dann δ-multiplikativ ist, wenn $\lim_A e^k = 0$ für alle $k \in \boldsymbol{N}$ gilt; ist A δ-multiplikativ, so gilt $\delta = \chi(A)$.

Ein konvergenztreues Matrixverfahren A heißt *ersetzbar*, wenn es ein δ-multiplikatives Verfahren B mit $c_B = c_A$ gibt. Im folgenden bezeichnen wir mit $\bar{M}$ den Abschluß von $M \subseteq c_A$ bezüglich der FK-Topologie von c_A.

2. Notwendige und hinreichende Bedingungen für die Ersetzbarkeit. Wilansky hat in [7], Satz 9.1, bewiesen, daß $\bar{c}_0 \subsetneqq P_A$ hinreichend für die Ersetzbarkeit von konvergenztreuen Matrixverfahren A ist; diese Bedingung ist im allgemeinen nicht notwendig (vgl. [7], Bsp. 4). Im Beweis konstruiert Wilansky ein $f \in c'_A$ mit *kern* $f := \{x \in c_A : f(x) = 0\} \supseteq c_0$ und $\alpha \neq 0$ in einer Darstellung (3) von f; letztere Bedingung ist hinreichend für die Ersetzbarkeit (vgl. [2], Satz 6.8). Im folgenden Satz leiten wir daraus weitere notwendige und hinreichende Bedingungen für die Ersetzbarkeit ab.

SATZ 1. *Für ein konvergenztreues Matrixverfahren A sind folgende Bedingungen äquivalent:*

a) *A ist ersetzbar.*

b) *Es gibt ein Matrixverfahren B mit $c_B = c_A$ und eine Konvergenzfaktorfolge $s \in \omega$ ($\bar{\bar{s}}x$ existiert für alle $x \in c_A$) derart, daß das (unendliche) Gleichungssystem $\bar{\bar{B}}t = -b - s$ mit $b := (\lim_B e^k)_{k=1}^{\infty}$ in l lösbar ist.*

c) *Es existiert ein Matrixverfahren D mit $c_D = c_A$ und ein $f \in c'_D$ mit kern $f \supseteq c_0$ und $\alpha \neq 0$ in einer Darstellung* (3) *von f bezüglich D.*

Beweis. Ist A ersetzbar, so gibt es ein δ-multiplikatives Matrixverfahren B mit $c_B = c_A$ und $\lim_B e^k = 0$ für alle $k \in \boldsymbol{N}$. Dann ist $t = 0 \in l$ eine Lösung von $\bar{\bar{B}}t = -b - s$ mit $s = 0$, d.h. die Bedingung b) ist erfüllt.

Gilt b), so setzen wir $D := B$ und definieren $f \in c'_H$ durch

$$f(x) := \lim\nolimits_D x + \bar{\bar{t}}(Dx) + \bar{\bar{s}}x \qquad \text{für alle } x \in c_D,$$

wobei $t \in l$ eine Lösung von $\bar{\bar{B}}t = -b - s$ ist. Für alle $x \in c_0$ gilt

$$f(x) = \chi(D) \lim_{k\to\infty} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} x_k \lim\nolimits_D e^k + \bar{\bar{t}}(Dx) + \bar{\bar{s}}x = 0,$$

da $\bar{\bar{t}}(Dx) = (\bar{\bar{t}}D)x$ für alle $x \in L_D \supseteq c_0$ gilt (vgl. [7], 5.1). Damit sind die Forderungen in c) erfüllt.

Es bleibt zu zeigen, daß c) die Ersetzbarkeit von A impliziert. Ist $c_D = c_A$, $f \in c'_D$ mit *kern* $f \supseteq c_0$ und $\alpha \neq 0$ in einer Darstellung (3) von f bezüglich D, so existiert nach [8], Satz 5.3, ein Matrixverfahren B mit $c_B = c_D = c_A$ und $f(x) = \lim_B x$ für alle $x \in c_B$. Da *kern* $f \supseteq c_0$ gilt, erhalten wir $\lim_B e^k = 0$ für alle $k \in \boldsymbol{N}$, woraus die Ersetzbarkeit von D und damit von A folgt.

Ist A ein konvergenztreues Matrixverfahren, so ist $\bar{\bar{A}}$ nach [5], Satz 1, ein absolut konvergenztreues Verfahren; daraus ergibt sich nach Satz 1b) unmittelbar die nachstehende Folgerung.

FOLGERUNG 1. *Ist A ein konvergenztreues Matrixverfahren, und ist durch $g(t)\colon = \bar{\bar{A}}t$ eine Abbildung von l auf l definiert, so ist A ersetzbar.*

Setzen wir $s\colon = -b$ und $B\colon = A$ in Satz 1b), so erhalten wir das bereits in [1], Proposition 3 und [2], Folgerung 6.9 bewiesene Resultat:

FOLGERUNG 2. *Ein konvergenztreues Matrixverfahren A mit „maximal inset" ist ersetzbar.*

Wilansky bewies in [7], Theorem 9.2, daß für koreguläre Verfahren A die Ersetzbarkeit und $\bar{c}_0 \subsetneqq P_A$ äquivalent sind. Als Folgerung aus Satz 1c) ergibt sich, daß dies auch für fast-koreguläre Verfahren gilt.

FOLGERUNG 3. *Für ein fast-koreguläres Matrixverfahren A sind folgende Bedingungen äquivalent:*

a) *A ist nicht ersetzbar;*

b) $\bar{c}_0 = P_A$;

c) $\bar{c}_0 \supseteq F_A$.

Ist eine der drei Bedingungen erfüllt, so gilt sogar $\bar{c}_0 \supsetneqq F_A$; insbesondere folgt aus der Abgeschlossenheit von F_A die Ersetzbarkeit von A.

Beweis. Ist A nicht ersetzbar, so folgt nach [7], Theorem 9.1, $\bar{c}_0 = P_A$. Weiter folgt c) aus b) wegen (2). Um die Äquivalenz der drei Aussagen nachzuweisen, bleibt zu zeigen, daß $\bar{c}_0 \supseteq F_A$ die Nicht-Ersetzbarkeit von A impliziert.

Aus der Darstellung (4) von $f \in c_A'$ auf F_A folgt unmittelbar, daß A genau dann fast-koregulär ist, wenn ein $x^0 \in F_A$ mit

$$\lim_A x^0 \neq \sum_{k=1}^{\infty} x_k^0 \lim_A e^k$$

existiert. Ist nun $f \in c_A'$ mit *kern* $f \supseteq c_0$, so gilt wegen $\bar{c}_0 \supseteq F_A$ und (4)

$$0 = f(x^0) - \sum_{k=1}^{\infty} x_k^0 f(e^k) = \alpha\Big(\lim_A x^0 - \sum_{k=1}^{\infty} x_k^0 \lim_A e^k\Big),$$

woraus $\alpha = 0$ für jede Darstellung (3) von f folgt.

Da $\bar{c}_0$, F_A, W_A invariant bezüglich dem Wirkfeld c_A sind, gilt damit für alle Verfahren D mit $c_D = c_A$ und allen Darstellungen (3) bezüglich D von $f \in c_D'$ mit *kern* $f \supseteq c_0$ die Beziehung $\alpha = 0$.

Damit ist A nach Satz 1c) nicht ersetzbar.

Es bleibt die letzte Aussage zu beweisen. Gälte $\bar{c}_0 = F_A$, so wäre F_A abgeschlossen, was wegen ([7], Theorem 5.7) $W_A = \bar{c}_0 = F_A$ implizieren würde; dies steht aber im Widerspruch zur Fast-Koregularität von A.

Ein weiteres hinreichendes Kriterium für die Ersetzbarkeit von konvergenztreuen Matrixverfahren erhalten wir aus Satz 1b) und dem Fixpunktsatz von Banach (vgl. hierzu Beispiel 3).

FOLGERUNG 4. *Ist $A = (a_{nk})$ ein konvergenztreues Matrixverfahren, so folgt aus den Voraussetzungen*

$$a_{kk} \neq 0 \quad \text{für alle } k \in \boldsymbol{N}, \tag{5}$$

$$(a_{kk}^{-1} a_k)_{k=1}^{\infty} \in l \quad \text{wobei } a_k\colon = \lim_A e^k \; (k \in \boldsymbol{N}) \tag{6}$$

und

$$M\colon = \sup_{n \in \boldsymbol{N}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{\infty} \left| \frac{a_{nk}}{a_{kk}} \right| < 1 \tag{7}$$

die Ersetzbarkeit von A.

Beweis. Wir zeigen mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach, daß unter den gemachten Voraussetzungen das Gleichungssystem

$$\bar{\bar{A}}t = -a \tag{8}$$

in l lösbar ist; damit folgt aus Satz 1b) die Ersetzbarkeit von A. Dazu definieren wir die Matrix $D = (d_{nk})$ durch $d_{nn}\colon = a_{nn}$ für $n \in \boldsymbol{N}$ und $d_{nk}\colon = 0$ sonst. Weiter definieren wir eine Abbildung $\varphi\colon l \to \omega$ durch

$$\varphi(t)\colon = -D^{-1}(\bar{\bar{A}} - D)t - D^{-1}a \quad \text{für } t \in l;$$

wegen ([5], Satz 1), (6) und (7) ist dadurch eine Abbildung von l in sich definiert. Betrachten wir l als Banach-Raum mit der Norm

$$\|t\|\colon = \sum_{n=1}^{\infty} |t_n| \quad (t \in l),$$

so erhalten wir

$$\|\varphi(t) - \varphi(u)\| = \|D^{-1}(\bar{\bar{A}} - D)(t-u)\| \leqslant M\|t-u\|$$

für alle $t, u \in l$. Damit ist φ wegen (7) eine kontrahierende Abbildung von $(l, \|\cdot\|)$ in sich und besitzt nach dem Fixpunktsatz von Banach genau einen Fixpunkt, der eine Lösung von (8) in l ist.

3. Verträglichkeits- und Perfektheitseigenschaften. Analog zu den Ausführungen in [4] kann die Ersetzbarkeit von konvergenztreuen Matrixverfahren durch Verträglichkeits- und Perfektheitseigenschaften bezüglich F charakterisiert werden. Wir gehen dabei von folgenden zwei Definitionen aus:

DEFINITION 1. *Ein konvergenztreues Matrixverfahren A besitzt die Eigenschaft O bzw. O_F (kurz $A \in O$ bzw. $A \in O_F$), wenn für jedes Verfahren*

B mit $m \cap c_A \subseteq c_B$ bzw. $F_A \subseteq c_B$ aus der Verträglichkeit von A und B auf den konvergenten Folgen c die Verträglichkeit auf $m \cap c_A$ bzw. F_A folgt. Dabei heißen A und B auf $M \subseteq c_A \cap c_B$ verträglich, wenn $\lim_A x = \lim_B x$ für alle $x \in M$ gilt.

DEFINITION 2. *Ein konvergenztreues Matrixverfahren A erfüllt die Eigenschaft J bzw. J_F (kurz $A \in J$ bzw. $A \in J_F$), wenn $\bar{c} \supseteq m \cap c_A$ bzw. $\bar{c} \supseteq F_A$ gilt.*

In [4] wurde gezeigt, daß alle koregulären Verfahren die Eigenschaften O und J besitzen. Dies gilt auch für die Eigenschaften O_F und J_F; $A \in O_F$ folgt aus ([3], Satz 2), und $A \in J_F$ folgt unmittelbar aus der Darstellung (4) von $f \in c_A'$ auf F_A. Weiter wurde in [4] für konulläre Verfahren u. a. gezeigt:

(9) Es gilt genau dann $A \in O$, wenn $\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \lim_A e^k$ für alle $x \in m \cap c_A$ gilt;

es gilt $O \subseteq J$, und $J \setminus O$ ist ungleich der leeren Menge;

(10) Verfahren A mit $A \in J \setminus O$ sind nicht ersetzbar, während die mit $A \notin J$ ersetzbar sind.

Entsprechende Ergebnisse erhalten wir für die Eigenschaften O_F und J_F.

SATZ 2. *Für konulläre Matrixverfahren A sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

a) *A besitzt die Eigenschaft O_F;*

b) $\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \lim_A e^k$ *für alle $x \in F_A$;*

c) $F_A = W_A$.

Beweis. Die Äquivalenz von a) und b) wurde in [3], Satz 4, bewiesen. Die Äquivalenz von b) und c) erhält man unmittelbar aus der Darstellung (4) von $f \in c_A'$ auf F_A.

Im folgenden Satz soll zusamengestellt werden, wie sich die Eigenschaften O, O_F, J_F und J bezüglich der Enthaltenseinsrelation verhalten.

SATZ 3. *Für konulläre Matrixverfahren gelten folgende Beziehungen:*

a) $O_F \subsetneqq O \subsetneqq J$ *(vgl. Bsp. 1 bzw.* [4], Theorem 1);

b) $O_F \subsetneqq J_F \subsetneqq J$ *(vgl. Bsp. 1 bzw. Bsp. 2);*

c) $J \setminus O \subsetneqq J_F \setminus O_F$ *(vgl. Bsp. 1).*

Dabei belegen die in Klammer genannten Beispiele die Echtheit der Enthaltenseinsrelation.

Beweis. $O_F \subseteq O$ folgt unmittelbar aus Satz 2b) und (9); $O \subseteq J$ bzw. $O_F \subseteq J_F$ folgt aus Satz 2b) und der Darstellung (4) der stetigen linearen Funktionale auf F; weiter gilt $J_F \subseteq J$ nach Definition von J_F

und J. Damit muß nur noch c) gezeigt werden. Ist $A \in J \setminus O$, dann besitzt nach a) das Verfahren A nicht die Eigenschaft O_F; insbesondere gilt $F_A \neq W_A$ nach Satz 2c). Da A wegen (10) nicht ersetzbar ist, erhalten wir aus Folgerung 3c) die Beziehung $F_A \subseteq \bar{c}_0 = \bar{c}$, was gleichbedeutend mit $A \in J_F$ ist.

Da nach Satz 2c) konulläre Verfahren A mit $A \notin O_F$ genau die konullären fast-koregulären Verfahren sind, erhalten wir aus Folgerung 3c), daß konulläre Verfahren A mit $A \notin J_F$ ersetzbar und Verfahren A mit $A \in J_F \setminus O_F$ nicht ersetzbar sind; insbesondere folgt, daß die Eigenschaften J_F und O_F für konulläre ersetzbare Matrixverfahren äquivalent sind.

Insgesamt kann man sagen, daß in den Arbeiten [1], [2], [4], [6] und [7] und in den obigen Ausführungen die ersetzbaren bzw. nicht ersetzbaren fast-koregulären Matrixverfahren charakterisiert wurden. Besitzt das konulläre Matrixverfahren A die Eigenschaft O_F, so folgt Ersetzbarkeit, wenn $\bar{c}_0 \subsetneqq P_A$ gilt (vgl. [7], Theorem 9.1) oder A „maximal inset" besitzt. Nicht-Ersetzbarkeit erhält man, falls $L_A \neq F_A$ gilt (vgl. [6] und [2], Satz 6.11). Die Frage nach der Ersetzbarkeit bleibt also offen, falls $A \in O_F$, $I_A \subsetneqq c_A$ und $F_A = W_A = L_A = \bar{c}_0 = P_A$ bzw. $F_A = W_A = L_A \subsetneqq \bar{c}_0 = P_A \subseteq c_A$ gilt.

4. Beispiele. Zum Abschluß betrachten wir Beispiele zu den obigen Ausführungen. In [6] wird ein Beispiel eines koregulären nicht ersetzbaren Verfahrens mit $L = F$ gegeben. Durch eine ähnliche Konstruktion erhält man ein nicht ersetzbares konulläres Matrixverfahren A mit $L_A = F_A$ und $A \in J_F \setminus O_F$.

BEISPIEL 1. *Das konulläre Matrixverfahren $A = (a_{nk})$ sei definiert durch*

$$\begin{aligned} &a_{11} := 1, \\ &a_{n,2k-1} := 4^{-k} \quad \text{für } n > k \text{ und } k \in \mathbf{N}, \\ &a_{k+1,2k} = a_{k+1,2k+1} := 2^{-k} \quad \text{für alle } k \in \mathbf{N} \text{ und} \\ &a_{nk} := 0 \text{ sonst.} \end{aligned}$$

A ist ein nicht ersetzbares konulläres Matrixverfahren mit $F_A = L_A$, $A \in J_F \setminus O_F$ und $A \in O$.

Beweis. Um $F_A = L_A$ zu zeigen, genügt es wegen (2) $L_A \subseteq I_A$ zu beweisen. Nach ([6], Lemma) gibt es ein $M > 0$ derart, daß $|x_k| \leqslant M \delta_k$ für alle $x \in L_A$ und $k \in \mathbf{N}$ gilt; dabei ist $\delta_k^{-1} := \sup_{n \in \mathbf{N}} |a_{nk}|$. Damit gilt

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \lim_A e^k \right| \leqslant \sum_{r=1}^{\infty} |x_{2r-1} \lim_A e^{2r-1}| \leqslant M \sum_{r=1}^{\infty} 2^{-r} < \infty$$

für alle $x \in L_A$, woraus $L_A \subseteq I_A$ folgt.

A besitzt nach Satz 2b) nicht die Eigenschaft O_F, da für $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ mit

$$x_k := \begin{cases} 2^r & \text{für } k = 2r \text{ und } r \in \mathbf{N}, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die Beziehung

$$\lim_A x = \lim_{r\to\infty} 2^{-r} 2^r = 1 \neq \sum_{k=1}^{\infty} x_k \lim_A e^k = 0$$

gilt. A besitzt die Eigenschaft O, da

$$\lim_{k\to\infty} (a_{k+1,2k} x_{2k} + a_{k+1,2k+1} x_{2k+1}) = 0 \quad \text{für alle } x \in m \cap c_A,$$

$$\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \lim_A e^k \quad \text{für alle } x \in m \cap c_A$$

impliziert. Um $A \in J_F$ zu zeigen, beweisen wir, daß für alle $f \in c_A'$ mit *kern* $f \supseteq c$ eine Darstellung (3) mit $\alpha = 0$ existiert; aus der Darstellung (4) von $f \in c_A'$ auf F_A folgt hieraus unmittelbar *kern* $f \supseteq F_A$ und damit $A \in J_F$.

Sei $f \in c_A'$ mit *kern* $f \supseteq c$. Da A zeilenfinit ist, gibt es eine Darstellung (3) von f mit $s_k = 0$ für $k \geqslant k_0$ und $k_0 \in \mathbf{N}$ geeignet (vgl. [8], Satz 5.2). In dieser Darstellung gilt insbesondere

$$0 = f(e^{2r}) = \alpha \lim_A e^{2r} + 2^{-r} t_{r+1} + s_{2r} \quad \text{für alle } r \in \mathbf{N},$$

woraus $t_r = 2^{r-1} s_{2r-2} = 0$ für alle $r \in \mathbf{N}$ mit $2r - 2 \geqslant k_0$ folgt. Damit erhalten wir

$$0 = f(e^{2r-1}) = 4^{-r}\alpha + \sum_{n=r}^{\infty} t_n a_{nk} + s_{2r-1} = 4^{-r}\alpha$$

für alle $r \in \mathbf{N}$ mit $2r - 2 \geqslant k_0$; insbesondere folgt $\alpha = 0$.

Beispiel 2. *Das konulläre Matrixverfahren $B = (b_{nk})$ sei definiert durch*

$$b_{nk} := \begin{cases} (-1)^{n+1} n 2^{-n} & \text{für } k = n \quad (n \in \mathbf{N}), \\ 2^{-k} & \text{für } k > n \quad (n \in \mathbf{N}), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

B ist ein 0-multiplikatives konulläres Matrixverfahren mit $B \in O$ und $B \notin J_F$ und damit $B \in J$ und $B \notin O_F$.

Beweis. $B \in O$ erhält man, da

$$\lim_B x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1} 2^{-k} x_k + \lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} n 2^{-n} x_n$$

$$= 0 = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \lim_B e^k$$

für alle $x \in m \cap c_B$ gilt. Um $B \notin J_F$ zu zeigen, genügt es, ein auf F_B nicht verschwindendes stetiges lineares Funktional $f \in c_B'$ mit *kern* $f \supseteq c$ anzugeben. Hierzu wählt man $f := \lim_B$; für $x = (x_k)_{k=1}^{\infty} \in F_B$ mit $x_k := (-1)^{k+1} k^{-1} 2^k$ gilt $\lim_B x = 1$.

Beispiel 3. *Durch*

$$d_{nk} := \begin{cases} 4^{-(k+1)} & \text{für } k < n \ (n \in \mathbf{N}), \\ -2^{-(n-1)} & \text{für } k = n \ (n \in \mathbf{N}), \\ 2^{-(n+1)} - (n-1) 4^{-(n+2)} & \text{für } k = n+1 \ (n \in \mathbf{N}), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist ein ersetzbares konulläres Matrixverfahren $D = (d_{nk})$ definiert, das nicht die Eigenschaften J_F und „maximal inset" besitzt.

Beweis. Die Ersetzbarkeit folgt unmittelbar aus Folgerung 4. Weiter erhalten wir $D \notin O_F$, da $x := (2^{k-1})_{k=1}^{\infty} \in F_D$ und $\lim_D x \neq \sum_{k=1}^{\infty} x_k \lim_D e^k$ gilt (vgl. Satz 2); aus der Ersetzbarkeit folgt damit $D \notin J_F$. D besitzt nicht „maximal inset", da $y := (4^{k+1})_{k=1}^{\infty} \in c_D \setminus I_D$ erfüllt ist.

Literatur

[1] G. Bennett, *Distinguished subsets and summability invariants*, Studia Math. 40 (1971), S. 225–234.

[2] J. Boos, *Verträglichkeit und Ersetzbarkeit von konvergenztreuen Matrixverfahren*, Diss. Tübingen 1972.

[3] — *Verträglichkeit von konvergenztreuen Matrixverfahren*, Math. Z. 128 (1972), S. 15–22.

[4] S. C. Chang, M. S. Macphail, A. K. Snyder, A. Wilansky, *Consistency and replaceability for conull matrices*, Math. Z. 105 (1968), S. 208–212.

[5] K. Knopp, G. G. Lorentz, *Beiträge zur absoluten Limitierung*, Arch. Math. 2 (1949), S. 10–16.

[6] A. K. Snyder, A. Wilansky, *Non-replaceable matrices*, Math. Z. 129 (1972), S. 21–23.

[7] A. Wilansky, *Distinguished subsets and summability invariants*, J. d'Analyse Math. 12 (1964), S. 327–350.

[8] K. Zeller, *Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren*, Math. Z. 53 (1951), S. 463–487.

Received April 12, 1973 (673)