because of the fact that the separability of X^* implies the metrizability of the unit sphere of X, we can use a diagonal process to obtain a sequence $\{z^k_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ (with $n_k+k < n_{k+1}$) which converges weakly to zero. This completes the proof.

Remark. This result implies some results of P. Wojtaszczyk; if X is reflexive, or if X has a shrinking basis (for definition see [3]), or if X^* has a basis, Theorem 1 holds without condition (*), since in each case X^* is separable.

The simplified proof of Proposition 3.1 was pointed out by the referee who also informed us of the existence of a space X with a basis such that X^* is separable but does not possess a basis. (Namely, J. Lindenstrauss proved in [2], Corollary 3 and remark that such a space exists if there is a Banach space which does not have the approximation property; the existence of the latter is of course well known now [1].) Hence Proposition 3.1 is definitely an improvement of some of the results of P. Wojtaszczyk [4].

References

[1] P. Enflo, *A counterexample to the approximation problem*, Acta Math. (to appear).

[2] J. Lindenstrauss, *On James's paper "Separable conjugate spaces"*, Israel Math. J. 9 (1971), pp. 279–284.

[3] I. Singer, *Bases in Banach spaces* I, Berlin, Heidelberg, New York 1970.

[4] P. Wojtaszczyk, *Existence of some special bases in Banach spaces* (to appear).

Received March 31, 1973 (666)

STUDIA MATHEMATICA, T. LI. (1974)

Sur les équations d'évolution non linéaires 1

par

T. LEŻAŃSKI (Lublin)

Introduction. Dans ce travail nous essayons d'étendre au cas des opérations et des espaces non linéaires une partie des résultats établis dans el travail [1]. Le champ d'applications propre de ce travail étant, nous semble-t-il, les espaces dits espaces du type de Riemann–Hilbert, les applications de la théorie présentée ici seront exposées dans des travaux ultérieurs, où il sera question des éléments et des fondements de ces espaces.

1. Notions, notations et hypothèses

1.1. Soient X_t (avec t réel) des espaces métriques complets, avec la distance $\varrho(t;\, x, y)$ $(x, y \in X_t)$; les éléments de X_t différents seront désignés par les mêmes lettres x, y, etc. Faisons correspondre à tout couple $t \in \langle 0, \tau\rangle$, $\varepsilon \geqslant 0$ l'opération $S(t, \varepsilon) \in X_t \to X_{t+\varepsilon}$ et admettons les hypothèses suivantes:

(A) $\varrho\big(t+\varepsilon;\; S(t,\varepsilon)(x),\, S(t,\varepsilon)(y)\big) \leqslant (1+K\varepsilon)\varrho(t;\, x, y), \qquad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon,$

(B) à tout $t \in \langle 0, \tau\rangle$ correspond un ensemble fermé $Z_t \subset X_t$ tel que

$$S(t, \varepsilon) \in Z_t \to Z_{t+\varepsilon}, \tag{1}$$

(C) pour $x \in Z_t$, $\varepsilon, \delta \geqslant 0$,

$$\varrho\big(t+\varepsilon+\delta;\; S(t, \varepsilon+\delta)(x),\, S(t+\varepsilon, \delta)S(t,\varepsilon)(x)\big) \leqslant C\varepsilon\delta, \tag{2}$$

(D) $S(t, 0)(x) = x$ $(x \in Z_t)$.

Remarque. Pour éviter les difficultés typographiques nous écrirons dans la suite $S(t,\varepsilon)x$ au lieu de $S(t,\varepsilon)(x)$.

1.2. Définition et propriétés de l'opération $T(s, t)$. Soient: $s \in \langle 0, \tau\rangle$, π — une division de l'intervalle $\langle s, \tau\rangle$ telle que $0 \leqslant s = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = \tau$. Tout comme dans [1], faisons correspondre à π l'opération $T(\pi, s, t) \in X_s \to X_t$ définie comme il suit:

DÉFINITION 1.

$$T(\pi, s, t) = S(t_n, t-t_n) S(t_{n-1}, \delta_{n-1}) \ldots S(t_0, \delta_0)$$

où $\delta_i = t_{i+1} - t_i, \qquad t_n \leqslant t \leqslant t_{n+1}.$

Lemme 1. *Soient: π — une division fixée, $x_0 \in Z_{t_0} = Z_s$, $x_{i+1} \stackrel{\text{df}}{=} S(t_i, \delta_i)x_i$ $(i = 0, 1, \ldots, p-1)$. Alors*

$$\varrho\big(t_{n+1};\ x_{n+1}, S(t_0, t_{n+1}-t_0)\,x_0\big) \leqslant C(t_{n+1}-t_0)^2. \tag{1}$$

Démonstration. Posons, comme plus haut,

$$\delta_i = t_{i+1}-t_i$$

et

$$\begin{aligned}\psi(\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)\\ &\stackrel{\text{df}}{=} \varrho\big(t_{n+1};\ S(t_n, \delta_n)S(t_{n-1}, \delta_{n-1}) \ldots S(t_0, \delta_0)x_0, S(t_0, \delta_0+\ldots+\delta_{n+1})\,x_0\big)\\ &= \varrho\big(t_{n+1};\ x_{n+1}, S(t_0, t_{n+1}-t_0)x_0\big).\end{aligned}$$

Puisque, d'après (B), $x_i \in Z_{t_i}$, on a, en vertu de (C):

$$\psi(\delta_0, \delta_1) = \varrho\big(t_2, S(t_1, \delta_1)S(t_0, \delta_0)x_0, S(t_0, \delta_0+\delta_1)\,x_0\big) \leqslant C\delta_0\,\delta_1. \tag{a}$$

Démontrons ensuite que l'on a:

$$\psi(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n) \leqslant C\delta_{n-1}\,\delta_n+\psi(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-2}, \delta_{n-1}+\delta_n). \tag{b}$$

En effet, comme

$$x_{n-1} = S(t_{i-1}, \delta_{i-1}) \ldots S(t_0, \delta_0)\,x_0 \in Z_{t_{i-1}},$$

l'hypothèse (C) est applicable; en posant dans (2) $x_{n-1}, t_1, \delta_{n-1}, \delta_n$ pour $x, t, \varepsilon, \delta$ respectivement on obtient:,

$$\begin{aligned}\psi(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n) &= \varrho\big(t_{n+1};\ S(t_n, \delta_n)S(t_{n-1}, \delta_{n-1})x_{n-1}, S(t_0, t_{n+1}-t_0)\,x_0\big)\\ &\leqslant \varrho\big(t_{n+1};\ S(t_n, \delta_n)S(t_{n-1}, \delta_{n-1})x_{n-1}, S(t_{n-1};\ \delta_{n-1}+\delta_n)x_{n-1}\big)+\\ &+\varrho\big(t_{n+1};\ S(t_{n-1}, \delta_{n-1}+\delta_n)x_{n-1}, S(t_0, \delta_0+\delta_1+\ldots+\delta_{n-2}, \delta_{n-1}+\delta_n)\,x_0\big)\\ &\leqslant C\,\delta_{n-1}\,\delta_n+\psi(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{n-2}, \delta_{n-1}+\delta_n).\end{aligned}$$

Or, par une récurrence facile, on tire de (b)

$$\psi(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n) \leqslant C(\delta_0+\delta_1+\ldots+\delta_{n-1})(\delta_1+\ldots+\delta_n),$$

d'où la conclusion.

Lemme 2. *Soient: π une division de $\langle t_0, \tau\rangle$, comme plus haut, et σ une subdivision de π, $x_0 \in Z_{t_0}$:*

$$\pi\colon\ 0 < t_0 < t_1 < \ldots < t_p = \tau, \tag{a}$$

$$\sigma\colon\ t_n = s_{n,0} < s_{n,1} < \ldots < s_{n,j_n+1} = t_{n+1},\ n = 0, 1, \ldots p-1. \tag{b}$$

Posons: $\varepsilon_k = t_{k+1}-t_k$, $\Delta(\pi) = \max\limits_k \varepsilon_k$, $\delta_{n,i} = s_{n,i+1}-s_{n,i}$; $i = 0, 1, \ldots \ldots, p-1$.

$$x_n \stackrel{\text{df}}{=} \prod_{k=0}^{n} S(t_k, \varepsilon_k)x_0 = S(t_n, \varepsilon_n)x_{n-1}, \tag{c}$$

$$y_n = \prod_{k=0}^{n}\prod_{i=0}^{j_k} S(s_{k,i}\,\delta_{k,i})\,x_0 = \prod_{i=0}^{j_n} S(S_{n,i}\,\delta_{n,i})\,y_{n-1}. \tag{d}$$

Alors, en admettant les notations ci-dessus, on a:

$$\xi_n \stackrel{\text{df}}{=} \varrho(t_{n+1};\ x_n, y_n) \leqslant C\tau\exp(|K|\,\tau)\,\Delta(\pi) = C\,\Delta(\pi). \tag{2}$$

Démonstration. La formule (2) a un sens, car, d'après (B), $x_n, y_n \in Z_{t_{n+1}}$. On a, de plus,

$$\begin{aligned}\xi_n &= \varrho\Big(t_{n+1};\ S(t_n, \varepsilon_n)x_{n-1}, \prod_{i=0}^{j_n} S(S_{n,i}, \delta_{n,i})\,y_{n-1}\Big)\\ &\leqslant \varrho\big(t_{n+1};\ S(t_n, \varepsilon_n)x_{n-1}, S(t_n, \varepsilon_n)\,y_{n-1}\big)+\\ &\quad+\varrho\Big(t_{n+1};\ S(t_n, \varepsilon_n)\,y_{n-1}, \prod_{i=0}^{j_n} S(s_{n,i}, \delta_{n,i})\,y_{n-1}\Big)\\ &\leqslant (1+K\,\varepsilon_n)\,\varrho(t_n;\ x_{n-1}, y_{n-1})+C\varepsilon_n^2,\end{aligned}$$

en vertu de l'hypothèse (A) et du lemme 1, formule (1), puisque x_{n-1}, $y_{n-1} \in Z_{t_n}$ et $\sum\limits_{i=0}^{j_n} \delta_{n,i} = \varepsilon_n$. Nous avons donc

$$\xi_n \leqslant (1+K\varepsilon_n)\,\xi_{n-1}+C\varepsilon_n^2 \leqslant \vartheta_n\,\xi_n+\mu_n, \tag{e}$$

où $\vartheta_n \stackrel{\text{df}}{=} 1+|K|\,\varepsilon_n$, $\mu_n \stackrel{\text{df}}{=} C(\max\limits_k \varepsilon_k)\,\varepsilon_n = C\Delta(\pi)\,\varepsilon_n$.

On obtient encore du lemme 1, en y posant $s_{n,i}$ au lieu de t_i,

$$\xi_0 \leqslant C\Big(\sum_{i=0}^{j_1} \delta_{0,i}\Big)^2 = C\varepsilon_0^2 \leqslant \mu_0. \tag{f}$$

De (e) et (f) on tire, par récurrence et en tenant compte du fait que

$$1 \leqslant 1+|K|\,\varepsilon_n = \vartheta_n \leqslant \exp(|K|\,\varepsilon_n),$$

$$\begin{aligned}\xi_n &\leqslant \mu_n+\mu_{n-1}\vartheta_n+\mu_{n-2}\vartheta_{n-1}\vartheta_n+\ldots+\mu_0\vartheta_1\vartheta_2\ldots\vartheta_n\\ &\leqslant \prod_{k=0}^{n}\vartheta_k\sum_{k=0}^{n}\mu_k \leqslant \exp\Big(|K|\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_n\Big)\,C\Delta(\pi)\sum_{k=0}^{n}\varepsilon_k\\ &\leqslant C\Delta(\pi)\exp(|K|\,\tau)\,\tau, \qquad \text{c.q.f.d.}\end{aligned} \tag{g}$$

Le lemme suivant est un corollaire du lemme 2:

Lemme 3. *Soient: π — une division de $\langle t_0, \tau\rangle$, σ — une subdivision de π. Alors, pour tout $t \in \langle t_0, \tau\rangle$, $x_0 \in Z_{t_0}$:*

$$\varrho\big(t;\ T(\pi;\ t_0, t)\,x_0, T(\sigma;\ t_0, t)\,x_0\big) \leqslant C\tau\exp(|K|\,\tau)\,\Delta(\pi) = C_1\Delta(\pi). \tag{3}$$

Démonstration. Le nombre t peut évidemment être considéré comme l'un des points de la division π; complétons maintenant les divisions π et σ par l'adjonction de t (s'il ne leur appartient pas), et désignons celui-ci par t_{n+1}, donc $t_{n+1} \overset{\mathrm{df}}{=} t$. La conclusion (3) équivaut alors à la formule (2) du lemme (2), puisque $T(\pi, t_0, t) = y_1$ est égal à x_n du lemme 2, et pareillement $T(\sigma, t_0, t) = y_n$, c.q.f.d.

Soit maintenant π_n une suite normale de divisions de $\langle t_0, \tau\rangle$, c'est-à-dire telle que $\Delta(\pi_n) \to 0$ et $\pi_{n+1} \supset \pi_n$. Si $x_0 \in Z_{t_0}$, la suite $T(\pi_n; t_0, t)x_0$ satisfait à la condition de Cauchy, car, en vertu de l'inégalité (3) du lemme 3, on a:

$$\varrho\big(t;\ T(\pi_n, t_0, t)x_0, T(\pi_{n+p};\ t_0, t)x_0\big) \leqslant C_1 \Delta(\pi_n) \to 0.$$

Il existe donc un élément-limite de $T(\pi_n, t_0, t)x_0$, que nous désignerons par $T(t_0, t)x_0$. Cet élément ne dépend pas de la suite π_n (pourvu qu'elle soit normale). En effet, si π_n' est une autre suite normale de divisions de $\langle t_0, \tau\rangle$, les divisions σ_n, définies comme l'union de π_n et π_n', forment alors une suite normale telle que $\sigma_n \supset \pi_n$ et $\sigma_n \supset \pi_n'$, de sorte qu'on déduit du lemme 2:

$$\begin{aligned}
&\varrho\big(t, T(\pi_n, t_0, t)x_0, T(\pi_n';\ t_0, t)x_0\big)\\
&\leqslant \varrho\big(t;\ T(\pi_n, t_0, t)x_0, T(\sigma_n, t_0, t)x_0\big) + \varrho\big(t;\ T(\sigma_n;\ t_0, t)x_0, T(\pi_n', t_0, t)x_0\big)\\
&\leqslant C_1\big(\Delta(\pi_n) + \Delta(\pi_n')\big) \to 0 \qquad (n \to \infty).
\end{aligned}$$

Remarquons enfin que la condition $\pi_{n+1} \supset \pi_n$ n'est pas essentielle, car, si $\Delta(\pi_n) \to 0$, les divisions: $\sigma_n =$ union de $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ forment une suite normale telle que $\sigma_n \supset \pi_n$; d'où

$$\begin{aligned}
&\varrho\big(t;\ T(\pi_n;\ t_0, t)x_0, T(t_0, t)x_0\big)\\
&\qquad\qquad \leqslant C_1 \Delta(\pi_n) + \varrho\big(t;\ T(\sigma_n;\ t_0, t)x_0, T(t_0, t)x_0\big) \to 0.
\end{aligned}$$

Nous avons ainsi démontré le

THÉORÈME 1. *Si π_n est une suite de divisions de l'intervalle $\langle t_0, \tau\rangle$ telle que $\Delta(\pi_n) \to 0$, la limite*

(DÉFINITION 2) $$T(t_0, t)x_0 = \lim_n T(\pi_n;\ t_0, t)x_0, \qquad x_0 \in Z_{t_0}$$

existe et ne dépend pas de la suite π_n (en particulier on a:

$$T(t_0, t) = \lim_n \prod_{i=0}^{n-1} S(t_i, \delta)x_0 \qquad \text{où } \delta = n^{-1}(t - t_0),\ t_i = t_0 + i\delta).$$

Montrons quelques propriétés de $T(\pi;\ t_0, t)$ et $T(t_0, t)$:

(4) $$\varrho\big(t;\ T(\pi;\ t_0, t)x_0, T(t_0, t)x_0\big) \leqslant C\tau \exp(|K|\tau)\Delta(\pi) = C_1 \Delta(\pi) \qquad (x_0 \in Z_{t_0}).$$

En effet, il existe une suite normale π_n telle que $\pi \subset \pi_1 \subset \pi_2 \subset \ldots$; (4) découle alors du lemme 3, formule (3), (où l'on pose π_n pour σ) et du théorème 1

(5) $$T(t_0, t)x_0 \in Z_{t_0} \to Z_t.$$

En effet, si $x_0 \in Z_{t_0}$, $T(\pi_n;\ t_0, t)x_0 \in Z_t$, d'où s'ensuit (5) en vertu du théorème 1

(6) $$\varrho\big(t+\varepsilon, T(t, t+\varepsilon)x, S(t, \varepsilon)x\big) \leqslant C\varepsilon^2 \qquad (x \in Z_t,\ 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}).$$

Pour démontrer (6) posons:

$$t_0 = t, \qquad t_i \overset{\mathrm{df}}{=} t + in^{-1}\varepsilon \qquad (i = 0, 1, \ldots, n)$$

et soit π_n la division de l'intervalle $\langle t, t+\varepsilon\rangle$:

$$\pi = \{t = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t + \varepsilon\}.$$

D'après le théorème 1, on a, pour $x \in Z_t$:

(a) $S(t_{n-1}, \varepsilon n^{-1})S(t_{n-1}, \varepsilon n^{-1}) \ldots S(t_0, \varepsilon n^{-1})x = T(\pi_n;\ t, t+\varepsilon)x \to$ $\to T(t, t+\varepsilon)x$.

D'autre part, en vertu du lemme 1 (où l'on pose $\varepsilon_i = \varepsilon n^{-1}$)

(b) $$\varrho\Big(t+\varepsilon;\ \prod_{i=0}^{n-1} S(t_i, \varepsilon n^{-1})x, S(t, t+\varepsilon)x\Big) \leqslant C\varepsilon^2,$$

d'où (6), c.q.f.d.

THÉORÈME 2. *Si $x_0, y_0 \in Z_{t_0}$, on a, pour $0 \leqslant t_0 < t$,*

(7) $$\varrho\big(t;\ T(t_0, t)x_0, T(t_0, t)y_0\big) \leqslant \exp\big(K(t - t_0)\big) \cdot \varrho(t_0;\ x, y).$$

Démonstration. Posons pour t fixé, n étant un nombre naturel:

$$\varepsilon = (t - t_0)n^{-1}, \qquad t_i = t_0 + i\varepsilon = t_0 + in^{-1}(t - t_0),$$

$$x_{i+1} = S(t_i, \varepsilon)x_i, \qquad y_{i+1} = S(t_i, \varepsilon)y_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1).$$

En vertu du théorème 1

(a) $$x_n = \prod_{i=0}^{n-1} S(t_i, \varepsilon)x_0 \to T(t_0, t)x_0$$

et $y_n \to T(t_0, t)y$.

D'autre part, en vertu de (A)

(b) $$\begin{aligned}
\varrho(t_{i+1};\ x_{i+1}, y_{i+1}) &= \varrho\big(t_{i+1};\ S(t_i, \varepsilon)x_i, S(t_i, \varepsilon)y_i\big)\\
&\leqslant (1 + K\varepsilon)\varrho(t_i;\ x_i, y_i) \leqslant (1 + K\varepsilon)^n \varrho(t_0;\ x_0, y_0)\\
&= \big(1 + Kn^{-1}(t - t_0)\big)^n \varrho(t_0;\ x_0, y_0)\\
&\to \exp\big(K(t - t_0)\big)\varrho(t_0;\ x_0, y_0), \text{ c.q.f.d.}
\end{aligned}$$

THÉORÈME 3. *Si $x_0 \in Z_{t_0}$ et $0 \leqslant t_0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$, on a*

(8) $$T(t_1, t_2)T(t_0, t_1)x_0 = T(t_0, t_2)x_0$$

((8) *est appelée parfois „équation d'évolution"*).

Démonstration. On voit immédiatement que si la division π de $\langle t_0, \tau\rangle$ contient les points t_1, t_2, on a identiquement

(a) $T(\pi, t_1, t_2)T(\pi, t_0, t_1)x_0 = T(\pi, t_0, t_2)x_0 (x_0 \in Z_{t_0})$.

Soit maintenant π_n une suite normale de divisions de l'intervalle $\langle t_0, \tau\rangle$, chacune des π_n contenant les points t_1, t_2 (une telle suite existe certainement). D'après le théorème 1 $T(\pi_n, t_0, t_i)x_0 \to T(t_0, t_i)x_0$ $(i = 1, 2, n\to\infty)$; d'autre part, en vertu de (4) et (7)

$$T(\pi_n, t_1, t_2)T(\pi_n, t_0, t_1)x_0 \to T(t_1, t_2)T(t_0 t_1)x_0,$$

d'où, en tenant compte de (a), on obtient (8), c.q.f.d.

En posant dans (b) $T(t_0, t)x$ pour x, on trouve:

$$(9)\quad \varrho\big(t+\varepsilon;\ T(t_0, t+\varepsilon)x,\ S(t, \varepsilon)T(t_0, t)x\big) \leqslant C\varepsilon^2 \quad (x \in Z_{t_0}, 0 < t_0 < t).$$

2. L'équation: $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon}\varrho\big(t+\varepsilon;\ S(t, \varepsilon)x(t), x(t+\varepsilon)\big) = 0$. On déduit aussitôt de (9) que la fonction abstraite: $x(t) = T(t_0, t)x_0$ $(x_0 \in Z_{t_0})$ satisfait à une sorte d'équation différentielle:

$$(10)\qquad \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{\varepsilon}\varrho\big(t+\varepsilon;\ S(t, \varepsilon)x(t), x(t+\varepsilon)\big) = 0.$$

De plus, en vertu de (7), théorème 2, cette solution $x(t)$ est continue par rapport au point initial.

Nous donnerons maintenant une condition suffisante pour que la solution de (10) soit unique (dans une certaine classe de fonctions abstraites).

Définition 3. Désignons par $\mathfrak{N}$ la classe des fonctions abstraites $x(t)$ qui satisfont à la condition suivante:

$$(11)\qquad (t-s)^{-1}\varrho\big(t;\ S(s, t-s)x(s), x(t)\big) \to 0 \quad (\text{si } (t-s)\downarrow 0)$$

uniformément par rapport à $t-s$, c'est-à-dire:

$$\bigwedge_{\varepsilon>0}\bigvee_{\delta>0}\{0 < t-s < \delta \Rightarrow (t-s)^{-1}\varrho\big(t;\ S(s, t-s)x(s), x(t)\big) < \varepsilon\}.$$

La fonction $T(t_0, t)x_0$ (où $x_0 \in Z_{t_0}$) nous en fournit un exemple, ce qui découle de (9).

Lemme 4. *Si* $x(\cdot), y(\cdot) \in \mathfrak{N}$, *on a*

$$(12)\quad \varrho\big(t; x(t), y(t)\big) \leqslant \exp\big(K(t-t_0)\big)\varrho\big(t_0; x(t_0), y(t_0)\big) \quad (0 \leqslant t_0 \leqslant t < \tau).$$

Démonstration. Pour n naturel posons: $\varepsilon = (t-t_0)n^{-1}$, $t_i = t_0 + i\varepsilon$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ et soit $r > 0$ arbitraire. Supposons N naturel, assez grand pour que l'on ait, pour $n \geqslant N$,

$$\left.\begin{aligned}&(a)\ \varrho\big(t+\delta;\ S(t, \delta)x(t), x(t+\delta)\big) \leqslant r\delta\\ &(b)\ \varrho\big(t+\delta;\ S(t, \delta)y(t), y(t+\delta)\big) \leqslant r\delta\end{aligned}\right\}\ \text{si } 0 \leqslant \delta \leqslant (t-t_0)n^{-1}.$$

Un tel N existe en vertu de (11). Évaluons maintenant

$$\xi_i \overset{\mathrm{df}}{=} \varrho\big(t_i;\ x(t_i), y(t_i)\big);$$

nous avons

$$\xi_0 = \varrho(t_0;\ x_0, y_0),$$

$$\begin{aligned}\xi_{i+1} = \varrho\big(t_i+\varepsilon; x(t_{i+1}), y(t_{i+1})\big) &\leqslant \varrho\big(t_i+\varepsilon, x(t_{i+1}), S(t_i, \varepsilon)x(t_i)\big) +\\ &+\varrho\big(t_i+\varepsilon;\ S(t_0, \varepsilon)x(t_i), S(t_i, \varepsilon)y(t_i)\big)+\\ &+\varrho\big(t_i+\varepsilon;\ S(t_i, \varepsilon)y(t_i), y(t_{i+1})\big)\\ &\leqslant 2r\varepsilon + (1+K\varepsilon)\varrho\big(t_i;\ x(t_i), y(t_i)\big) = 2r\varepsilon + (1+K\varepsilon)\xi_i\end{aligned}$$

(nous avons fait usage de (a), (b) et de l'hypothèse (A)). Par une facile récurrence on trouve:

$$\begin{aligned}\varrho\big(t;\ x(t), y(t)\big) &= \varrho\big(t_n; x(t_n), y(t_n)\big) = \xi_n\\ &\leqslant 2r(t-t_0)n^{-1}\sum_{i=0}^{n-1}[1+Kn^{-1}(t-t_0)]^i + [1+Kn^{-1}(t-t_0)]^n\xi_0\\ &\leqslant 2r(t-t_0)[1+|K|n^{-1}(t-t_0)]^n + [1+Kn^{-1}(t-t_0)]^n\varrho\big(t_0;\ x(t_0), y(t_0)\big).\end{aligned}$$

En passant à la limite on en tire

$$\varrho\big(t;\ x(t), y(t)\big) \leqslant \exp\big(K(t-t_0)\big)\varrho\big(t_0;\ x(t_0), y(t_0)\big) + 2r(t-t_0)\exp\big(|K|(t-t_0)\big),$$

d'où la conclusion, r étant arbitraire.

Un corollaire immédiat du lemme 4 est le

Théorème 4. *Il existe exactement une fonction* $x(\cdot) \in \mathfrak{N}$ (*satisfaisant à* (11)) *telle que* $x(0) = a \in Z_{t_0}$.

3. Unicité de la solution de (10) dans le cas où X_t ne dépend pas de t $(X_t \equiv X_0)$. Dans ce paragraphe 3 nous écrirons $\varrho(x, y)$ au lieu de $\varrho(t_0, x, y)$.

Lemme 5. *Si les fonctions* $x(t)$, $y(t)$ *satisfont à* (10) *et sont continues, on a*

$$(13)\qquad \varrho\big(x(t), y(t)\big) \leqslant \exp\big(K(t-t_0)\big)\varrho\big(x(t_0), y(t_0)\big).$$

Démonstration. La fonction réelle $f(t) \overset{\mathrm{df}}{=} \varrho\big(x(t), y(t)\big)$ satisfait évidemment à l'inégalité

$$\begin{aligned}(a)\quad \frac{1}{\varepsilon}[f(t+\varepsilon)-f(t)] &= \frac{1}{\varepsilon}\big[\varrho\big(x(t+\varepsilon), y(t+\varepsilon)\big) - \varrho\big(x(t), y(t)\big)\big]\\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\big[\varrho\big(x(t+\varepsilon), S(t, \varepsilon)x(t)\big) + \varrho\big(S(t, \varepsilon)x(t), S(t, \varepsilon)y(t)\big)+\\ &\qquad + \varrho\big(S(t, \varepsilon)y(t), y(t+\varepsilon)\big) - \varrho\big(x(t), y(t)\big)\big]\end{aligned}$$

(pour $\varepsilon > 0$). Le premier terme et le troisième tendent vers 0 en vertu de (10), le second ne dépasse pas $\frac{1}{\varepsilon}(1+K\varepsilon)\varrho\big(x(t), y(t)\big)$ en vertu de (A); on a donc, en passant à la limite avec $\varepsilon\downarrow 0$:

$$\text{(b)}\quad \frac{d^+}{dt}f(t)\leqslant Kf(t).$$

La fonction $g(t)\overset{\text{df}}{=}f(t)\cdot\exp(-Kt)$ satisfait à (c):

$$\text{(c)}\quad \frac{d^+}{dt}g(t)=0,$$

par conséquent, $g(t)$ étant continue, $g(t)\leqslant g(0)$, d'où la conclusion (13), c.q.f.d.

Définissons maintenant le genre de continuité de l'opération $S(t,\varepsilon)$:

(14) *pour tout $\delta>0$ il existe un $\varepsilon>0$ tel que*

$$0<t-s<\varepsilon \text{ et } x\in Z_s \text{ impliquent } \varrho\big(S(s,t-s)x, x\big)\leqslant\delta.$$

THÉORÈME 5. *Si $S(t,\varepsilon)$ satisfait à* (14), *la fonction $x(t)=T(t_0,t)a$ $(a\in Z_{t_0})$ est la solution unique de* (10) *telle que $x(t_0)=a$ dans la classe des fonctions continues.*

Démonstration. En vertu de la formule (13), lemme 5, il suffit de montrer que $x(t)=T(t_0,t)a$ est continue. Or, on a pour $0<s<t$, en vertu de (8):

$$\varrho\big(x(t),x(s)\big)=\varrho\big(T(s,t)x(s),x(s)\big)\leqslant\varrho\big(T(s,t)x(s),S(s,t-s)x(s)\big)+\\+\varrho\big(S(s,t-s)x(s),x(s)\big)\to 0$$

(si $t-s\to 0$), en vertu de (9) et (14), c.q.f.d.

Supposons maintenant que $S(t,\varepsilon)$ ne dépende pas de t et écrivons $S(\varepsilon)$ au lieu de $S(t,\varepsilon)$. L'opération $T(t_0,t)$ correspondant à $S(t,\varepsilon)(=S(\varepsilon))$ d'après la définition 2 du théorème 1 (où l'on pose $t_i=t_0+in^{-1}(t-t_0)$) prendra alors la forme

$$(15)\qquad T(t_0,t)x=\lim_n\prod_{i=0}^{n-1}S\big(n^{-1}(t-t_0)\big)x\qquad (x\in Z_{t_0})$$

d'où l'on voit que $T(t_0,t)$ ne dépend que de la différence $t-t_0$; nous écrirons donc $T(t-t_0)$ au lieu de $T(t_0,t)$, ou bien $T(s)$ au lieu de $T(t_0,t_0+s)$. D'après (5) on a $T(S)\in Z_{t_0}\to Z_{t_0+s}$ $(t_0\in\langle 0,\tau\rangle,\ s\geqslant 0)$. L'identité (8) prendra la forme (si l'on y pose: $t_1=t_0+s$, $t_2=t_1+t$):

$$(16)\qquad T(t+s)x=T(t)T(s)x\qquad (x\in Z_{t_0}).$$

Les opérations $T(t)$ forment donc un semi-groupe.

LEMME 6. *Supposons que $Z_t\subset Z_{t+s}$ $(s\geqslant 0)$ dans* (B), *que $S(\varepsilon)$ satisfasse aux hypothèses* (A), (B), (C), (D), *et que la constante K figurant dans* (A) *soit négative, c'est-à-dire que*

$$(17)\qquad \varrho\big(S(\varepsilon)x,S(\varepsilon)y\big)\leqslant(1\beta-\varepsilon)\varrho(x,y),\qquad \beta>0.$$

Admettons encore que

$$(18)\qquad \varrho\big(S(\varepsilon)x,x\big)\leqslant m\varepsilon,\qquad (x\in Z_{t_0}).$$

Soit enfin $T(t)$ l'opération correspondant à $S(\varepsilon)$ d'après (15). *Dans ces conditions:*

$$(19)\qquad \varrho\big(T(t)x,x\big)\leqslant m\beta^{-1}$$
$$(20)\qquad \varrho\big(T(t+s)x,T(t)x\big)\leqslant m\beta^{-1}\exp(-\beta t)\qquad (x\in Z_{t_0}).$$

Démonstration. Posons, pour n naturel fixé et $\varepsilon=n^{-1}t$, $t_i=t_0+$ $+i\varepsilon=t_0+in^{-1}S$, $x_0=x$, $x_{i+1}=S(\varepsilon)x_i$ $(i=0,1,\ldots,n)$. De (17) on tire:

$$\varrho(x_{i+1},x_i)=\varrho\big(S(\varepsilon)x_i,S(\varepsilon)x_{i-1}\big)\leqslant(1-\beta\varepsilon)\varrho(x_i,x_{i-1})\\ \leqslant(1-\beta\varepsilon)^2\varrho(x_{i-1},x_{i-2})\leqslant(1-\beta\varepsilon)^i\varrho(x_1,x_0),$$

d'où

$$\varrho(x_n,x_0)\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}\varrho(x_{i+1},x_i)\leqslant\sum_{i=0}^{n-1}(1-\beta\varepsilon)^i\varrho(x_1,x_0)\\ \leqslant[1-(1-\beta\varepsilon)^n](\beta\varepsilon)^{-1}\varrho\big(S(\varepsilon)x,x\big)\\ \leqslant[1-(1-\beta n^{-1}S)^n]\cdot m\beta^{-1}\leqslant m\beta^{-1},$$

d'où résulte (19), puisque $\lim x_n=T(t)x$ (d'après (15)).

Pour établir (20), remarquons que la formule (7), théorème 2, prend la forme

$$(21)\qquad \varrho\big(T(s)x,T(s)y\big)\leqslant\exp(-\beta s)\varrho(x,y),\qquad x,y\in Z_{t_0}$$

(t_0 arbitraire, $0\leqslant t_0<\tau$).

En posant dans (21) $T(t)x$ pour y on obtient, vu que $T(t)x\in Z_{t_0+t}$, $x\in Z_{t_0}\subset Z_{t_0+t}$, d'après (16):

$$\varrho\big(T(t+s)x,T(t)x\big)=\varrho\big(T(s)T(t)x,T(t)x\big)\leqslant\exp(-\beta s)\varrho\big(T(t)x,x\big),$$

d'où (20), c.q.f.d.

4. Cas où les fonctions abstraites $x(t)$ sont définies pour $t\geqslant 0$. Admettons ici $X_t=X_0$ et supposons que les $S(t,\varepsilon)$, définies pour tout $t\geqslant 0$, satisfassent aux hypothèses (A), (B), (D) et (22) au lieu de (C):

$$(22)\qquad \varrho\big(S(t,\varepsilon+\delta)x, S(t+\varepsilon,\delta)S(t,\varepsilon)x\big)\leqslant C(t)\varepsilon\delta\qquad (x\in Z_t).$$

Supposons enfin que les Z_t forment une famille croissante

$$Z_t \subset Z_{t+s} \quad (s \geqslant 0). \tag{23}$$

On peut évidemment admettre que la fonction $C(t)$ est croissante. On voit aussitôt que le théorème 1 est applicable pour tout intervalle fini $\langle 0, \tau\rangle$ (si l'on pose $C = C(\tau)$), de sorte que d'après (4) $T(\pi_n, t_0, t)x_0$ tend vers $T(t_0, t)x_0$ uniformément sur tout intervalle fini $\langle 0, \tau\rangle$. Les théorèmes 2, 3, 4, 5 restent aussi en vigueur, la constante C n'y intervenant pas. Généralement parlant, l'hypothèse (C) nous a servi à construire $T(t_0, t)x_0$, mais n'a aucune influence sur les propriétés de $T(t_0, t)x_0$. En particulier, la condition: $x, y \in Z_{t_0}$ n'a été introduite que pour assurer l'existence de $T(s)x$ et $T(s)y$, et seulement dans ce but.

Cela posé, nous établirons le théorème suivant:

THÉORÈME 6. *Supposons que l'opération $S(\varepsilon)$ satisfasse aux hypothèses du lemme 6, et soit $T(t)$ l'opération correspondante d'après* (15). *Alors il existe un $\bar{x} \in X_0$ tel que*

$$\varrho\big(T(t)x_0, \bar{x}\big) \leqslant m\beta^{-1}\exp(-\beta t) \to 0 \quad (t \to \infty) \tag{24}$$

pour tout $x_0 \in Z_{t_0}$.

En effet, la fonction abstraite $x(t) \overset{\mathrm{df}}{=} T(t_0, t)x_0$ satisfait, d'après (20), à l'inégalité:

$$\varrho\big(x(t+s), x(t)\big) \leqslant m\beta^{-1}\exp(-\beta t), \tag{a}$$

c'est-à-dire à la condition de Cauchy. L'espace X_0 étant supposé complet, il existe un point $\bar{x}$ tel que $\varrho\big(x(t), \bar{x}\big) \to 0$. Or, on obtient (24) en faisant tendre $s \to \infty$ dans (a), c.q.f.d.

THÉORÈME 7. *Soit, outre l'opération $S(\varepsilon)$ satisfaisant aux hypothèses du lemme 6, l'opération $S_1(t, \varepsilon)$, liée à $S(\varepsilon)$ par la relation:*

$$\varrho\big(S(t, \varepsilon)x, S(\varepsilon)x\big) \leqslant r(t)\varepsilon, \tag{25}$$

où $r(t)$ est une fonction réelle et $r(t)\downarrow 0$ si $t \to \infty$.

Soit encore $T_1(t_0, t)$ l'opération correspondant à $S_1(t, \varepsilon)$ d'après le théorème 1. *Dans ces conditions*

$$\big(T(t_0, t)x, \bar{x}\big) \to 0 \tag{26}$$

où $\bar{x}$ désigne le point du théorème 6.

Démonstration. Soit $T(t)$ l'opération correspondant à $S(\varepsilon)$ d'après (15). Montrons d'abord que

$$\varrho\big(T(s_0, s_0+s)x, T(\varepsilon)x\big) \leqslant \beta^{-1}r(s_0), \quad x \in T(s_0),\ s \geqslant 0. \tag{27}$$

Dans ce but posons, pour n fixé naturel et $\varepsilon = sn^{-1}$, $s_i = s_0 + i\varepsilon$, $x_0 = y_0 = x$, $x_{i+1} = S_1(s_i, \varepsilon)x_i$, $y_{i+1} = S(\varepsilon)y_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ Alors on a:

$$\begin{aligned}\varrho(x_{i+1}, y_{i+1}) &= \varrho\big(S(t_i, \varepsilon)x_i, S(\varepsilon)y_i\big)\\ &\leqslant \varrho\big(S(s_i, \varepsilon)x_i, S(\varepsilon)x_i\big) + \varrho\big(S(\varepsilon)x_i, S(\varepsilon)y_i\big)\\ &\leqslant r(s_0)\varepsilon + (1-\beta\varepsilon)\varrho(x_i, y_i),\end{aligned}$$

d'où l'on tire par récurrence:

$$\varrho(x_n, y_n) \leqslant r(s_0)\varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}(1-\beta\varepsilon)^i = \beta^{-1}r(s_0)[1-(1-\beta\varepsilon)]^n \leqslant \beta^{-1}r(s_0),$$

il en résulte (27), vu que, en vertu du théorème 1,

$$x_n \to T_1(s_0, s_0+s)x_0, \quad y_n \to T(s)x_0.$$

Pour démontrer la conclusion (26), considérons l'inégalité évidente:

$$\begin{aligned}\varrho\big(T(t_0, t_0+t)x_0, \bar{x}\big) &= \varrho\big(T(t_0+t/2, t_0+t), T(t_0, t_0+t/2)x_0, x\big)\\ &\leqslant \varrho\big(T(t_0+t/2, t_0+t)T(t_0, t_0+t/2)x_0, T(t/2)T(t_0, t_0+t/2)x_0\big) +\\ &\quad + \varrho\big(T(t/2)T(t_0, t_0+t/2)x_0, T(t/2)T(t/2)x_0\big) + \varrho\big(T(t/2)x_0, \bar{x}\big).\end{aligned}$$

Or, le premier terme du second membre ne dépasse pas $\beta^{-1}r(t_0+t/2)$ en vertu de (27), où l'on pose: $t_0+t/2$ pour s_0, $t/2$ pour s, $T(t_0, t_0+t/2)x_0$ pour x. De plus, d'après (21), le second terme ne dépasse pas

$$\exp(-\beta t/2)\varrho\big(T(t_0, t_0+t/2)x_0, T(t/2)x_0\big) \leqslant \exp(-\beta t/2)\beta^{-1}r(t_0)$$

en vertu de (21) et (27); enfin, le dernier terme tend vers 0 en vertu de (24), théorème 6. On en conclut que $\varrho\big(T(t_0, t_0+t)x_0, \bar{x}\big) \to 0$ d'où résulte (26), c.q.f.d.

Travaux cités

[1] T. Leżański, *Sur l'intégration directe d'équations d'évolution*, Studia Math. 34 (1970), p. 149–163.

Received April 9, 1973 (670)