that since M_g is continuous, $s \geqslant q$. Inspection of Theorem 9 (i)–(iv) shows that this provides a contradiction when $s \geqslant 2$ (so that $s' \leqslant 2$). But if M_g were r-summing from $L^s(\Omega, \mu)$ into $L^q(\Omega, \mu)$ for some $s < 2$, M_g would be r-summing from $L^2(\Omega, \mu)$ into $L^q(\Omega, \mu)$, since $L^2(\Omega, \mu) \subseteq L^s(\Omega, \mu)$, and we again obtain a contradiction.

References

[1] D. J. H. Garling, *Lattice bounding, Radonifying and summing mappings*, to appear.

[2] M. A. Krasnosel'skii and Ya. B. Rutickii, *Convex functions and Orlicz spaces*, Groningen 1961.

[3] A. Persson and A. Pietsch, *p-nukleare und p-integrale Abbildungen in Banachräumen*, Studia Math. 33 (1969), pp. 19–62.

[4] L. Schwartz, *Applications radonifiantes*, Séminaire de l'École Polytechnique, Paris 1969–1970.

[5] — *Mesures cylindriques et applications radonifiantes dans les espaces de suites*, Proceedings of the International Congress on Functional Analysis and related topics, Tokyo, April 1969.

[6] A. E. Tong, *Diagonal nuclear operators on l^p-spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 143 (1969), pp. 235–247.

[7] — *Diagonal submatrices of matrix maps*, Pacific J. Math. 32 (1970), pp. 551–559.

Received July 2, 1973 (698)

STUDIA MATHEMATICA, T. LI. (1974)

Sur l'analyse harmonique du groupe affine de la droite *

par

IDRISS KHALIL (Nancy et Rábat)

Abstract. Nous définissons et étudions la transformation de Plancherel pour le groupe G des transformations affines de la droite. Nous en déduisons une caractérisation des fonctions f de $L^1(G)$ telles que les opérateurs $\pi(f)$, où $\pi \in \hat{G}$, sont compacts. De plus, nous étudions l'algèbre de Fourier $A(G)$ et l'algèbre de Fourier–Stieltjes $B(G)$ de ce groupe, établissant notamment une „décomposition de Lebesgue" et prouvant que $A(G) = B(G) \cap \mathscr{C}_0(G)$.

Introduction. Soit G le groupe affine de la droite, c'est-à-dire des transformations $x \to ax+b$, de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$, où $a > 0$ et b sont réels. On connaît par Gelfand et Naimark la description complète de l'ensemble $\hat{G}$ des (classes de) représentations unitaires irréductibles de G. Cet ensemble contient, à équivalence près, une famille indéxée par $\boldsymbol{R}$ de représentations de dimension 1, et deux représentations, π_+ et π_-, de dimension infinie, opérant dans le même espace hilbertien $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$. En analysant de près $\hat{G}$, on voit que seules les deux représentations π_+ et π_- jouent un rôle essentiel, en tout cas dans les questions que nous avons abordées. Cela tient au fait bien connu que l'ensemble des deux points π_+ et π_- est dense, au sens de la topologie de J. M. G. Fell, dans $\hat{G}$.

Le troisième paragraphe de ce travail est consacré à établir une formule de Plancherel explicite sur ce groupe G. Elle précise notablement dans ce cas particulier, et par des méthodes différentes, le résultat de Kleppner et Lipsman [19]. Nous avons ici à vaincre le fait que G n'est pas unimodulaire, et aussi que, même pour des fonctions f suffisamment régulières, il peut arriver que les opérateurs $\pi_+(f)$ et $\pi_-(f)$ ne soient pas des opérateurs compacts, encore moins des opérateurs de Hilbert–Schmidt sur $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$. Cependant, en composant ces opérateurs par un opérateur convenablement choisi δ non borné de $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$ de domaine dense, on aboutit aux résultats que $\mathscr{P}_\pm(f) = \delta\pi_\pm(\Delta^{-1/2}f)$, où Δ est la fonction

* Cet article constitue le chapitre 3 de la thèse de Doctorat ès Sciences, soutenue par l'auteur le 18 juin 1973 devant l'Université de Nancy.

module du groupe G, est un opérateur de Hilbert–Schmidt de $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$, et que, pour toute fonction f dans $L^1(G)\cap L^2(G)$, on a $\|f\|_2^2 = |||\mathscr{P}_+(f)|||_{HS}^2 + |||\mathscr{P}_-(f)|||_{HS}^2$. On obtient alors, via la transformation «de Plancherel» $f\mapsto \mathscr{P}(f) = \big(\mathscr{P}_+(f),\ \mathscr{P}_-(f)\big)$, un isomorphisme isométrique entre $L^2(G)$ et l'espace de Hilbert $L^2(\pm)$ des couples d'opérateurs de Hilbert–Schmidt sur $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$ avec la norme évidente. Ici la transformation de Plancherel $\mathscr{P}$ est donc différente de la transformations de Fourier $\mathscr{F}$, mais néanmoins, l'ensemble de ces deux transformations se comporte bien vis-à-vis de la convolution, puisqu'on a la formule

$$\mathscr{P}(f*g) = \mathscr{F}(f)\mathscr{P}(g),$$

pour f dans $L^1(G)$ et g dans $L^2(G)$. En étendant, au paragraphe 4, la transformation de Fourier à l'espace $CV_2(G)$ des opérateurs de convolution de $L^2(G)$, nous obtenons aussi, par analogie avec le cas abélien, un isomorphisme isométrique entre l'algèbre $CV_2(G)$ et l'algèbre $L^\infty(\pm)$ des couples d'opérateurs bornés sur $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$, ainsi qu'entre l'algèbre de Fourier $A(G)$, étudiée en général par P. Eymard [9], et l'espace $L^1(\pm)$ des couples d'opérateurs à trace sur $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$. De plus, on a une formule d'inversion de Fourier: si à la fonction u de $A(G)$ correspond le couple (S_+, S_-) de $L^1(\pm)$, réciproquement:

$$u(x) = \operatorname{Tr}\big(\pi_+(x)S_+\big) + \operatorname{Tr}\big(\pi_-(x)S_-\big).$$

On en déduit la décomposition $A(G) = A_{\pi_+}(G)\oplus A_{\pi_-}(G)$, où $A_{\pi_+}(G)$ [resp. $A_{\pi_-}(G)$] est l'espace de Banach engendré dans l'algèbre de Fourier–Stieltjes $B(G)$ par les coefficients de π_+ [resp. π_-]. Nous démontrons aussi que $A_{\pi_+}(G)$ et $A_{\pi_-}(G)$ sont des *algèbres* (sur l'étude générale des espaces A_π, on pourra consulter les travaux de G. Arsac). Il serait, nous semble-t-il, intéressant d'étudier davantage ces algèbres, notamment du point de vue de la synthèse harmonique, car, le dual de A_{π_+} (ou A_{π_-}) s'identifiant à l'espace de tous les opérateurs bornés sur $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$, on serait amené à poser le problème de la synthèse non seulement des convoluteurs de $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$, mais de tout opérateur borné de $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$.

Au paragraphe 6, nous caractérisons complètement l'ensemble, noté PF_0, de tous les convoluteurs T de $L^2(G)$ dont l'image de Fourier est un couple d'opérateurs *compacts* sur $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$. Ceci a lieu si et seulement si T est une pseudofonction sur G et vérifie de plus une condition algébrique, à savoir que *la moyenne de T par le sous-groupe des translations soit nulle*. Comme application, nous retrouvons le fait connu que le groupe G n'est pas liminaire. En fait, nous précisons en quelque sorte le degré de non-liminarité de G en caractérisant l'ensemble des fonctions f de $L^1(G)$ pour lesquelles $\pi_+(f)$ et $\pi_-(f)$ sont des opérateurs compacts. Une autre application intéressante est que l'algèbre de Fourier $A(G)$ s'identifie à l'espace de Banach dual de la sous-c^*-algèbre PF_0. Cela nous permet de réaliser une version non abélienne de *la décomposition de Lebesgue*: $B(G) = A(G)\oplus B_s(G)$, où ici $B_s(G)$ est le sous-espace des fonctions de l'algèbre de Fourier–Stieltjes $B(G)$ qui sont constantes sur les classes modulo le sous-group des translations. Il y a lieu de remarquer que l'analogue $B_s(G)$ de l'ensemble des transformées de Fourier–Stieltjes des mesures singulières est une *algèbre*, alors que dans le cas abélien il est bien connu qu'il existe des mesures singulières dont le carré de convolution est absolument continu. Nous avons aussi une caractérisation très simple des fonctions de $A(G)$ parmi celles de $B(G)$: une fonction f de $B(G)$ est dans $A(G)$ si et seulement si f tend vers zéro à l'infini. Sur ce point le groupe affine de la droite est moins pathologique que la droite elle-même! D'autre part, si nous restreignons au sous-groupe N des translations, la décomposition de $B(G)$, nous réobtenons après V. Flory [14] le fait remarquable que les restrictions à N des fonctions de $B(G)$ sont réduites aux fonctions de $A(N)$ plus les constantes; ceci précise notablement le contre-exemple de Douady sur l'impossibilité d'étendre un caractère non trivial du groupe N en une fonction continue de type positif sur G.

Je tiens à exprimer à Monsieur P. Eymard toute la gratitude que je lui dois, pour m'avoir constamment aidé tout au long de ce travail aussi bien sur le plan scientifique que sur le plan moral et humain.

1. RAPPELS. NOTATIONS

Le groupe affine de la droite. Soit G le groupe des transformations affines $x\mapsto ax+b$ de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$, où $a>0$ et b sont des nombres réels. On notera $g(b, a)$, ou simplement (b, a), le point générique de G qui peut être représenté matriciellement sous la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi le groupe G peut s'interpréter comme un sous-groupe fermé de $GL(2, \boldsymbol{R})$, donc est un groupe localement compact.

Soient N le sous-groupe des éléments $(b, 1)$, et K celui des éléments $(0, a)$. On voit que G est produit semi-direct de N et K, la loi de groupe étant définie par

$$(b, a)(b', a') = (ab'+b, aa').$$

En identifiant a (resp. b) au couple $(0, a)$ (resp. $(b, 1)$), les sous-groupes K et N s'identifient respectivement à $\boldsymbol{R}_+^*$ et $\boldsymbol{R}$.

On munit G de la mesure de Haar à gauche $dg(b, a) = da\cdot db/a^2$. Les espaces $L^p(G)$, où $1\leqslant p\leqslant\infty$, sont relatifs à cette mesure.

Observons que G n'est pas unimodulaire, et on peut vérifier que $dbda/a$ est une mesure de Haar à droite sur G.

Signalons enfin que le groupe G est moyennable, car, comme on le vérifie facilement, il est résoluble.

Pour toute fonction complexe f sur G, adoptons les notations suivantes:

$$\tilde{f}(x) = \overline{f(x^{-1})}; \quad \check{f}(x) = f(x^{-1});$$
$$_af(x) = f(ax); \quad f_a(x) = f(xa).$$

Le dual de G. On connaît, par Gelfand et Naimark [15], la description complète de l'ensemble $\hat{G}$ des (classes de) représentations unitaires continues irréductibles de G. Il est constitué des représentations π_λ, $\lambda \in \boldsymbol{R}$, de dimension 1 définies par: $(b, a) \mapsto \pi_\lambda(b, a) = a^{i\lambda}$, et de deux représentations de dimension infinie, π_+ et π_-, qui opèrent dans le même espace de Hilbert $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$ des fonctions de carré sommable sur le groupe multiplicatif $\boldsymbol{R}_+^*$ muni de la mesure de Haar dt/t. Les représentations π_+ et π_- sont définies par:

$$\pi_+(b, a)\xi(t) = e^{-2\pi ibt}\xi(at);$$
$$\pi_-(b, a)\xi(t) = e^{+2\pi ibt}\xi(at),$$

où ξ est dans $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$.

Lorsqu'on munit $\hat{G}$ de la topologie de Fell, l'ensemble $\{\pi_+\}\cup\{\pi_-\}$ est dense dans $\hat{G}$, car chacune des représentations π_λ de dimension 1 est faiblement contenue dans π_+, et aussi dans π_-. Plus précisèment on a le

THÉORÈME (Fell [1]). *Un sous-ensemble W de $\hat{G}$ est fermé dans $\hat{G}$ si et seulement s'il satisfait aux conditions suivantes*:

i) *Si π_+ ou π_- est dans W, alors toutes les représentations de dimension 1 sont dans W;*

ii) *Sinon, l'ensemble $\{\lambda | \pi_\lambda \in W\}$ est fermé pour la topologie ordinaire de $\boldsymbol{R}$.*

Pour les questions d'analyse harmonique sur G que nous allons étudier, seule la partie (dense) de $\hat{G}$ formée des deux points π_+ et π_- va jouer un rôle essentiel.

2. QUELQUES ESPACES CONSIDÉRÉS

2.1. Les espaces $\mathscr{L}_p$. Notons $H = L^2(\boldsymbol{R}_+^*, dt/t)$ l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable sur $\boldsymbol{R}_+^*$, le groupe multiplicatif des nombres réels muni de la mesure de Haar dt/t.

$\mathscr{L}_\infty = \mathscr{L}(H)$ est l'espace de Banach des opérateurs bornés sur H pour la norme ordinaire des opérateurs définie par

$$|||S|||_\infty = \operatorname{Sup}\{\|S\cdot\xi\|, \xi \in H, \|\xi\| \leqslant 1\}.$$

Si S est un opérateur hermitien positif sur H et si (e_n) est une base hilbertienne de H, on pose

$$\operatorname{Tr}(S) = \sum_n (Se_n/e_n);$$

alors $\operatorname{Tr}(S)$ est indépendant de la base hilbertienne choisie.

Adoptons les notations habituelles suivantes: Si $S \in \mathscr{L}_\infty$, on désigne par S^* l'opérateur adjoint de S, et par $|S| = (S^*S)^{1/2}$ la valeur absolue de S.

Pour $1 \leqslant p < \infty$, on désigne par $\mathscr{L}_p$ le sous-espace de $\mathscr{L}_\infty$ des S tels que $\operatorname{Tr}(|S|^p) < +\infty$. C'est un espace de Banach pour la norme

$$|||S|||_p = \left(\operatorname{Tr}(|S|^p)\right)^{1/p}.$$

Sur ces espaces on a les propriétés suivantes:

(2.1.1) $|||S|||_p$ *décroît lorsque p croît de 1 à $+\infty$.*

(2.1.2) *Si S est dans $\mathscr{L}_p$ et T dans $\mathscr{L}_q$, et si $1/r = 1/p+1/q \leqslant 1$, alors ST est dans $\mathscr{L}_r$, et $|||ST|||_r \leqslant |||S|||_p|||T|||_q$, où $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. En particulier, si $S \in \mathscr{L}_2$, $T \in \mathscr{L}_\infty$, on a $|||ST|||_2 \leqslant |||S|||_2|||T|||_\infty$.*

(2.1.3) *Si $1 \leqslant p < \infty$, et si $S \in \mathscr{L}_q$, avec $1/p+1/q = 1$, alors*

$$T \mapsto \langle T, S\rangle = \operatorname{Tr}(TS)$$

est une forme linéaire continue, Φ_S, sur $\mathscr{L}_p$, et l'application $S \mapsto \Phi_S$ identifie $\mathscr{L}_q$ à l'espace dual de $\mathscr{L}_p$.

Remarque. Il convient de remarquer que $\mathscr{L}_2$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(S/T) = \operatorname{Tr}(T^*S)$, et même une algèbre hilbertienne complète; c'est celle des opérateurs de Hilbert-Schmidt.

Pour de plus amples détails sur les espaces $\mathscr{L}_p$, voir J. Dixmier [2].

2.2 Les espaces $L^p(\pm)$. Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on considère l'espace $L^p(\pm)$ des couples $S = (S_+, S_-)$ d'opérateurs S_+ et S_- appartenant à $\mathscr{L}_p$. L'espace $L^p(\pm)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|S\|_p = (|||S_+|||_p^p + |||S_-|||_p^p)^{1/p}, \quad \text{pour } 1 \leqslant p < \infty;$$
$$\|S\|_\infty = \operatorname{Max}(|||S_+|||_\infty, |||S_-|||_\infty).$$

On a les faits suivants:

(2.2.1) *Si $S = (S_+, S_-)$ est dans $L^p(\pm)$, $T = (T_+, T_-)$ dans $L^q(\pm)$, et si $1/r = 1/p+1/q \leqslant 1$, alors $ST = (S_+T_+, S_-T_-)$ est dans $L^r(\pm)$ et $\|ST\|_r \leqslant \|S\|_p\|T\|_q$.*

(2.2.2) *Pour $1 \leqslant p < \infty$, le dual de $L^p(\pm)$ s'identifie à l'espace de Banach $L^q(\pm)$, où $1/p+1/q = 1$. Le crochet de dualité est défini par*

$$[S, T] = \langle S_+, T_+\rangle + \langle S_-, T_-\rangle,$$

où $S = (S_+, S_-)$ est dans $L^p(\pm)$ et $T = (T_+, T_-)$ est dans $L^q(\pm)$.

La démonstration de (2.2.1) est presque évidente compte tenu de (2.1.2). Pour la démonstration de (2.2.2), cf. Bourbaki [2], § 6, n° 4, corollaire 1 de la proposition 3, et remarquer qu'on sait d'avance qu'il n'y a pas sur $L^p(\pm)$ d'autres formes linéaires que celles qui proviennet de $L^q(\pm)$, car $L^p(\pm)\simeq\mathscr{L}_p\times\mathscr{L}_p$, donc

$$\big(L^p(\pm)\big)'\simeq(\mathscr{L}_p)'\times(\mathscr{L}_p)'\cong\mathscr{L}_q\times\mathscr{L}_q\simeq L^q(\pm).$$

Remarque. L'espace $L^2(\pm)$ est un *espace de Hilbert* pour le produit scalaire

$$[S/T]=(S_+/T_+)+(S_-/T_-).$$

3. FORMULE DE PLANCHEREL

3.1. Soit G un groupe localement compact. Soit π une représentation unitaire de G dans un espace de Hilbert $\mathscr{H}$. Si f est dans $L^1(G)$, on pose

$$\pi(f)=\int_G f(x)\pi(x)\,dx;$$

$\pi(f)$ est un opérateur borné dans $\mathscr{H}$, et on a les propriétés:

a) $\pi(f*g)=\pi(f)\pi(g)$;

b) $\pi(f^*)=\pi(f)^*$;

c) $|||\pi(f)|||\leqslant|||f|||_1$.

Lorsque G est unimodulaire postliminaire, on sait (cf. J. Dixmier, [3] page 327 et suivantes) qu'il existe une mesure de Plancherel $d\mu$ sur l'ensemble $\hat{G}$ des (classes de) représentations unitaires irréductibles de G donnant lieu à une formule de Plancherel sur G. Plus précisément, si $f\in L^1\cap L^2(G)$, on a

$$\int_G|f(x)|^2dx=\int_{\hat{G}}\mathrm{Tr}\big(\pi(f)^*\pi(f)\big)\,d\mu(\pi).$$

Lorsque G est le groupe affine de la droite, qui est non unimodulaire, il n'en est rien, et pour cause. En effet, si f est une fonction quelconque de l'espace de Schwartz $\mathscr{D}(G)$, il n'est pas toujours vrai que $\pi_+(f)$ ou $\pi_-(f)$ soit un opérateur compact, encore moins un opérateur de Hilbert–Schmidt, comme nous le verrons dans le paragraphe 6. Cependant, si nous multiplions $\pi_+(f)$ et $\pi_-(f)$ par un opérateur δ non borné de $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$, convenablement choisi, le résultat frappant est que les opérateurs $\delta\pi_+(f)$ et $\delta\pi_-(f)$ sont, non seulement compacts, mais des opérateurs de Hilbert–Schmidt. En remarquant que seules les représentations π_+ et π_- interviennent dans la formule de Plancherel, on obtient

$$\|f\|_2^2=|||\delta\pi_+(\Delta^{-1/2}f)|||_2+|||\delta\pi_-(\Delta^{-1/2}f)|||_2,$$

pour $f\in\mathscr{D}(G)$, et où $\Delta(b,a)=1/a$ est la fonction module du groupe G.

3.2. Définition des opérateurs $\mathscr{F}_+$, $\mathscr{F}_-$, $\mathscr{P}_+$ et $\mathscr{P}_-$.

a) Soit $f\in L^1(G)$, et désignons par $\mathscr{F}_+(f)$ et $\mathscr{F}_-(f)$ les opérateurs bornés de $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$ définis par:

$$\mathscr{F}_+(f)=\pi_+(f)\quad\text{et}\quad\mathscr{F}_-(f)=\pi_-(f).$$

De façon précise, si ξ est dans $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$,

$$\mathscr{F}_\pm(f)\,\xi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\exp(\mp2\pi ibt)\,\xi(at)f(b,a)\frac{da\,db}{a^2}:$$

b) Désignons par V le sous-espace vectoriel de $L^2(G)$, dense dans $L^2(G)$, des fonctions

$$f(b,a)=\sum_{\text{finie}}c_k\varphi_k(b)\psi_k(a),$$

où $\varphi_k\in\mathscr{S}(\boldsymbol{R})$ et $\psi_k\in\mathscr{D}(\boldsymbol{R}_+^*)$ [notations de L. Schwartz]. Si $\varphi\in L^1(\boldsymbol{R})$, on note $\hat{\varphi}$ la transformée de Fourier ordinaire de φ: $\hat{\varphi}(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-2\pi ibt)\times\varphi(b)\,db$.

Enfin, notons $\Delta(b,a)=1/a$ la fonction module du groupe G.

Soit δ un opérateur non borné de $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$, de domaine dense, défini par

$$(\delta\xi)(t)=\sqrt{t}\,\xi(t).$$

Posons, pour $f\in V$, $f=\sum c_k\varphi_k\otimes\psi_k$,

$$\mathscr{P}_+(f)=\delta\mathscr{F}_+(\Delta^{-1/2}f)\quad\text{et}\quad\mathscr{P}_-(f)=\delta\mathscr{F}_-(\Delta^{-1/2}f),$$

ou encore, si $\xi\in L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$,

$$\mathscr{P}_\pm(f)\cdot\xi(t)=\sqrt{t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\exp(\mp2\pi ibt)\,\xi(at)f(b,a)\Delta^{-1/2}(b,a)\frac{da\,db}{a^2}$$

donc, on a

$$\mathscr{P}_\pm(f)\cdot\xi(t)=\sum_k c_k\sqrt{t}\,\hat{\varphi}_k(\pm t)\int_0^{+\infty}\xi(at)\,a^{-1/2}\psi_k(a)\frac{da}{a}.$$

On a les faits suivants:

(i) $\mathscr{P}_\pm(f)\xi\in L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$;

(ii) l'application linéaire $\xi\mapsto\mathscr{P}_\pm(f)\xi$ de $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$ dans $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$ est continue.

Le (i) provient de ce que la fonction $t\mapsto\sqrt{t}\hat{\varphi}_k(\pm t)$ est bornée, car $\hat{\varphi}_k$ est dans $\mathscr{S}(\boldsymbol{R})$, et du fait que la fonction $t\mapsto\int_0^{+\infty}\xi(at)\,a^{-1/2}\psi_k(a)\,da/a$ appartient à $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$, car c'est le produit de convolution dans $\boldsymbol{R}_+^*$ de ξ par une fonction intégrable.

Le (ii) résulte de l'inégalité

$$\|\mathscr{P}_\pm(f)\,\xi\|_2 \leqslant \Big(\sum |c_k| \operatorname*{Sup}_t |\sqrt{t}\,\hat\varphi_k(\pm t)|\,\|a^{-1/2}\psi_k(a)\|_1\Big)\|\xi\|_2.$$

Ainsi, $\mathscr{P}_+(f)$ et $\mathscr{P}_-(f)$ sont dans $\mathscr{L}_\infty$. On va voir, plus précisément, que ces opérateurs sont dans l'espace $\mathscr{L}_2$ des opérateurs de Hilbert–Schmidt.

Notations. Soit f une fonction sur G. Lorsque $\mathscr{P}_\pm(f)$ et $\mathscr{F}_\pm(f)$ ont un sens, on notera

$$\mathscr{F}(f) = \big(\mathscr{F}_+(f), \mathscr{F}_-(f)\big) \quad \text{et} \quad \mathscr{P}(f) = \big(\mathscr{P}_+(f), \mathscr{P}_-(f)\big).$$

L'application définie sur l'espace à 2 points $\{+, -\}$, ayant pour valeurs le couple d'opérateurs $\mathscr{F}(f)$ (resp. $\mathscr{P}(f)$) pourrait s'appeler transformée de Fourier de f (resp. transformée de Plancherel de f).

Théorème 1.

1) *Pour toute f dans V, $\mathscr{P}(f)$ appartient à $L^2(\pm)$, et on a*

$$\|f\|_{L^2(G)} = \|\mathscr{P}(f)\|_2 = \big(|||\mathscr{P}_+(f)|||_2^2 + |||\mathscr{P}_-(f)|||_2^2\big)^{1/2};$$

2) *L'application $f \mapsto \mathscr{P}(f)$ de V dans $L^2(\pm)$ se prolonge à $L^2(G)$ en un isomorphisme isométrique de $L^2(G)$ sur $L^2(\pm)$.*

Démonstration du théorème 1.

1) Il nous faut montrer que

$$\mathrm{Tr}[\mathscr{P}_\pm(f)^*\mathscr{P}_\pm(f)] < +\infty$$

et

$$\mathrm{Tr}[\mathscr{P}_+(f)^*\mathscr{P}_+(f)] + \mathrm{Tr}[\mathscr{P}_-(f)^*\mathscr{P}_-(f)] = \|f\|^2_{L^2(G)}.$$

Pour cela, soit (ξ_n) une base hilbertienne de $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}[\mathscr{P}_\pm(f)^*\mathscr{P}_\pm(f)] &= \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathscr{P}_+(f)\,\xi_n\|^2_{L^2(\boldsymbol{R}_+^*)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\Big|\sum_{k=1}^{p} c_k\sqrt{t}\,\hat\varphi_k(\pm t)\int_0^{+\infty}\xi_n(at)\,a^{-1/2}\psi_k(a)\,\frac{da}{a}\Big|^2\frac{dt}{t} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty} dt\,\Big|\sum_{k=1}^{p} c_k\hat\varphi_k(\pm t)\int_0^{+\infty}\xi_n(at)\,a^{-1/2}\psi_k(a)\,\frac{da}{a}\Big|^2.\end{aligned}$$

En faisant le changement $a \mapsto at = u$, on obtient

$$\mathrm{Tr}\big(\mathscr{P}_\pm(f)^*\mathscr{P}_\pm(f)\big) = \int_0^{+\infty} dt \sum_{n=1}^{+\infty}\Big|\int_0^{+\infty}\sum_{k=1}^{p} c_k\hat\varphi_k(\pm t)\Big(\frac{t}{u}\Big)^{1/2}\psi_k\Big(\frac{u}{t}\Big)\,\xi_n(u)\,\frac{du}{u}\Big|^2.$$

Or, grâce à la formule de Parseval, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\Big|\int_0^{+\infty}\sum_{k=1}^{p} C_k\hat\varphi_k(\pm t)\Big(\frac{t}{u}\Big)^{1/2}\psi_k\Big(\frac{u}{t}\Big)\,\xi_n(u)\,\frac{du}{u}\Big|^2 \\ = \int_0^{+\infty}\Big|\sum_{k=1}^{p} C_k\hat\varphi_k(\pm t)\Big(\frac{t}{u}\Big)^{1/2}\psi_k\Big(\frac{u}{t}\Big)\Big|^2\frac{du}{u}.\end{aligned}$$

Cette quantité est encore égale, après changement de variable, à

$$\int_0^{+\infty}\Big|\sum_{k=1}^{p} C_k\hat\varphi_k(\pm t)\,x^{-1/2}\varphi_k(x)\Big|^2\frac{dx}{x},$$

donc

$$\mathrm{Tr}\big(\mathscr{P}_\pm(f)^*\mathscr{P}_\pm(f)\big) = \int_0^{+\infty} dt\int_0^{+\infty}\Big|\sum_{k=1}^{p} C_k\hat\varphi_k(\pm t)\psi_k(x)\Big|^2\frac{dx}{x^2}.$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned}&\mathrm{Tr}\big(\mathscr{P}_+(f)^*\mathscr{P}_+(f)\big) + \mathrm{Tr}\big(\mathscr{P}_-(f)^*\mathscr{P}_-(f)\big) \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\int_0^{+\infty}\Big|\sum_{k=1}^{p} C_k\hat\varphi_k(t)\psi_k(x)\Big|^2 dt + \int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\int_0^{+\infty}\Big|\sum_{k=1}^{p} C_k\hat\varphi_k(-t)\,\psi_k(x)\Big|^2 dt \\ &= \int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big|\sum_{k=1}^{p} C_k\hat\varphi_k(t)\,\psi_k(x)\Big|^2 dt.\end{aligned}$$

En appliquant la formule de Plancherel ordinaire dans $\boldsymbol{R}$ à la fonction de la variable t, on en déduit que

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\big(\mathscr{P}_+(f)^*\mathscr{P}_+(f)\big) + \mathrm{Tr}\big(\mathscr{P}_-(f)^*\mathscr{P}_-(f)\big) \\ = \int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big|\sum C_k\varphi_k(y)\,\psi_k(x)\Big|^2 dy = \|f\|^2_{L^2(G)}.\end{aligned}$$

Par conséquent les opérateurs $\mathscr{P}_+(f)$ et $\mathscr{P}_-(f)$ sont dans $\mathscr{L}_2$, et on a la formule énoncée dans 1).

Ainsi $\mathscr{P}$ se prolonge à $L^2(G)$ par continuité, vu que V est dense dans $L^2(G)$. On désignera encore par $\mathscr{P}$ ce prolongement.

3.3. Avant de continuer la démonstration du théorème 1, nous allons établir quelques lemmes. Mais auparavant, nous donnons quelques formules qui nous seront utiles pour la suite et qui lient les transformations $\mathscr{P}$ et $\mathscr{F}$.

Proposition 1.

1) $\mathcal{P}(f*g)=\mathcal{F}(f)\mathcal{P}(g)$, *quelles que soient f dans* $L^1(G)$ *et g dans* $L^2(G)$.

2) $\mathcal{P}(f*g)=\mathcal{P}(f)\mathcal{F}(\Delta^{-1/2}g)$, *quelles que soient f dans* $L^2(G)$ *et g dans* $\mathcal{D}(G)$.

3) $[\mathcal{P}_+(f)]^*=\mathcal{P}_+(\tilde{f}\Delta^{-1/2})$ *et* $[\mathcal{P}_-(f)]^*=\mathcal{P}_-(\tilde{f}\Delta^{-1/2})$, *quelle que soit f dans* $L^2(G)$.

Démonstration. Il suffit de vérifier le 1) pour des fonctions f et g dans V, car cet espace est dense dans $L^1(G)$ et $L^2(G)$. Soit ξ une fonction de $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$. On a:

$$\mathcal{F}_\pm(f)\mathcal{P}_\pm(g)\xi(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{\mp i2\pi bt}\mathcal{P}_\pm(g)\xi(at)f(b,a)\frac{da\,db}{a^2}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{\mp i2\pi bt}\left[\sqrt{at}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{\mp i2\pi b_1at}\xi(aa_1t)g(b_1,a_1)\frac{da_1\,db_1}{a_1^{3/2}}\right]f(b,a)\frac{da\,db}{a^2}$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{\mp i2\pi bt}\left[\sqrt{at}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{\mp i2\pi b_1at}\xi(aa_1t)\frac{da_1\,db_1}{a_1^{3/2}}\right]f(b,a)\frac{da\,db}{a^2}.$$

Faisons le changement de variables défini par

$$\alpha=aa_1,\qquad \beta=b+ab_1;$$

on obtient, puisque $a_1^{-3/2}da_1\,db_1=a^{-1/2}\alpha^{-3/2}d\alpha d\beta$, que

$$\mathcal{F}_\pm(f)\mathcal{P}_\pm(g)\xi(t)$$
$$=\sqrt{t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{\mp i2\pi\beta t}\xi(\alpha t)g\left(\frac{\beta-b}{a},\frac{\alpha}{a}\right)\frac{d\alpha d\beta}{\alpha^{3/2}}\right]f(b,a)\frac{da\,db}{a^2},$$

ou encore, grâce théorème de Fubini,

$$\mathcal{F}_\pm(f)\mathcal{P}_\pm(g)\xi(t)$$
$$=\sqrt{t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{\mp i2\pi\beta t}\xi(\alpha t)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}f(b,a)g\left(\frac{\beta-b}{a},\frac{\alpha}{a}\right)\frac{da\,db}{a^2}\right]\frac{d\alpha\,d\beta}{\alpha^{3/2}}$$
$$=\sqrt{t}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{\mp i2\pi\beta t}\xi(\alpha t)f*g(\beta,\alpha)\frac{d\alpha\,d\beta}{\alpha^{3/2}}=\mathcal{P}_\pm(f*g)\xi(t);$$

d'où la formule 1). Vérifions maintenant la formule 2).

On sait que $\mathcal{P}_\pm(f)\xi(t)=\sqrt{t}\mathcal{F}_\pm(\Delta^{-1/2}f)$. Alors, on a

$$\mathcal{P}_\pm(f*g)\xi(t)=\sqrt{t}\mathcal{F}_\pm(\Delta^{-1/2}f*g).$$

Or $\Delta^{-1/2}(f*g)=(\Delta^{-1/2}f)*(\Delta^{-1/2}g)$, donc

$$\mathcal{P}_\pm(f*g)\xi(t)=\sqrt{t}\mathcal{F}_\pm(\Delta^{-1/2}f)\mathcal{F}_\pm(\Delta^{-1/2}g)\xi(t)$$
$$=\mathcal{P}_\pm(f)\mathcal{F}_\pm(\Delta^{-1/2}g)\xi(t);$$

d'où le 2).

Montrons maintenant que $[\mathcal{P}_\pm(f)]^*=\mathcal{P}_\pm(\tilde{f}\Delta^{-1/2})$. On a, si ξ et η sont dans $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$,

$$([\mathcal{P}_+(f)]^*\xi/\eta)=(\xi/\mathcal{P}_+(f)\eta)$$
$$=\int_0^{+\infty}\xi(t)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sqrt{t}\exp(2i\pi bt)\overline{\eta(at)}\,\overline{f(b,a)}\frac{da\,db}{a^{3/2}}\right]\frac{dt}{t}$$
$$=\int_0^{+\infty}\xi\left(\frac{s}{a}\right)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sqrt{\frac{s}{a}}\exp\left(2i\pi\frac{b}{a}s\right)\overline{\eta(s)}\,\overline{f(b,a)}\frac{da\,db}{a^{3/2}}\right]\frac{ds}{s}.$$

En faisant le changement de variables défini par

$$a=\frac{1}{\alpha}\quad\text{et}\quad b=-\frac{\beta}{\alpha},$$

et en appliquant le théorème de Fubini, il vient

$$([\mathcal{P}_+(f)]^*\xi/\eta)=\int_0^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}\sqrt{s}\exp(-2i\pi\beta s)\xi(\alpha s)\tilde{f}(\alpha,\beta)\sqrt{\alpha}\frac{d\alpha d\beta}{\alpha^{3/2}}\right]\overline{\xi(s)}\frac{ds}{s}$$
$$=(\mathcal{P}_+(\tilde{f}\Delta^{-1/2})\xi/\eta),$$

donc $[\mathcal{P}_+(f)]^*=\mathcal{P}_+(\tilde{f}\Delta^{-1/2})$. De même on a $[\mathcal{P}_-(f)]^*=\mathcal{P}_-(\tilde{f}\Delta^{-1/2})$.

3.4. Pour établir quelques lemmes qui nous serviront pour achever la démonstration du théorème 1, nous introduisons une base hilbertienne particulière de $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$, donnée par

$$e_n(t)=\sqrt{t}e^{-t/2}L_n(t),$$

où $L_n(t)=\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{n}\frac{(-t)^k}{k!}$ est le polynôme de Laguerre de degré n.

D'autre part, adoptons la notation suivante: Pour ξ et η dans $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$, on désigne par $E_{\xi,\eta}$ l'opérateur de rang 1 dans $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$ défini par: $E_{\xi,\eta}(\zeta)=(\zeta/\eta)\cdot\xi$, pour tout ζ dans $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$.

Lemme 1. *Soient* $\xi\neq 0$ *une fonction de* $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$ *et* e_j *un vecteur de la base* (e_n). *Il existe une fonction f de* $L^2(G)$ *telle que* $\operatorname{Tr}\left(E_{\xi,e_j}\mathcal{P}_+(f)\right)\neq 0$.

Démonstration. Soit $\psi \in \mathscr{D}(\boldsymbol{R}_+^*)$ telle que $\xi *_{\boldsymbol{R}_+^*} \psi \neq 0$, et choisissons une fonction φ dans $\mathscr{S}(\boldsymbol{R})$ telle que

$$\int_0^{+\infty} \hat{\varphi}(t)\, \xi * \psi(t)\, e_n(t)/\sqrt{t}\, dt \neq 0,$$

ce qui est possible puisque $e_n(t)/\sqrt{t}$ n'a qu'un nombre fini de zéros.

Posons $f = \Delta^{-1/2} \varphi \otimes \check{\psi}$ qui est une fonction de $L^1(G) \cap L^2(G)$. On a

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}[E_{\xi, e_j} \mathscr{P}_+(f)] &= (\mathscr{P}_+(f)\, \xi / e_j) \\ &= \int_0^{+\infty} \sqrt{t} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-2i\pi bt}\, \xi(at) \varphi(b) \check{\psi}(a) \frac{da}{a}\, db \right] e_j(t) \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^{+\infty} \hat{\varphi}(t)\, \xi * \psi(t)\, e_j(t)^{-1/2}\, dt \neq 0; \end{aligned}$$

d'où le lemme 1.

Lemme 2. *Le sous-espace $\mathscr{P}_+(L^2(G))$ (resp. $\mathscr{P}_-(L^2(G))$ est dense dans l'espace $\mathscr{L}_2$ des opérateurs de Hilbert–Schmidt sur $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$.*

Démonstration. Faisons la démonstration seulement pour $\mathscr{P}_+(L^2(G))$; le cas de $\mathscr{P}_-(L^2(G))$ se traite de la même façon. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe un opérateur de Hilbert–Schmidt S non nul tel que, pour tout élément f de $L^2(G)$,

$$\langle \mathscr{P}_+(f)/S \rangle = \operatorname{Tr}(S^* \mathscr{P}_+(f)) = 0.$$

(Rappelons que $\mathscr{L}_2$ est un espace de Hilbert.) Soit e_j un vecteur de la base (e_n) tel que $S^* e_j \neq 0$. Fixons un vecteur e_i de la base (e_n), et notons $E_{ji} = E_{e_j, e_i}$ l'opérateur de rang 1 défini par e_j et e_i. Le groupe G étant posthiminaire et π_+ étant irréductible, il existe, d'après J. Dixmier [6], 13.9.4, des fonctions intégrables g_a sur G telles que

$$\lim_a |||\mathscr{F}_+(g_a) - E_{ji}|||_\infty = 0.$$

D'après la proposition 1, on a $\mathscr{F}_+(g_a)\mathscr{P}_+(f) = \mathscr{P}_+(g_a * f)$, donc

$$\langle \mathscr{F}_+(g_a)\mathscr{P}_+(f)/S \rangle = \langle \mathscr{P}_+(g_a * f)/S \rangle = 0 \tag{3.4.1}$$

pour tout a et toute f dans $L^2(G)$. Donc, puisque

$$|||\mathscr{F}_+(g_a)\mathscr{P}_+(f) - E_{ij}\mathscr{P}_+(f)|||_2 \leqslant |||\mathscr{F}_+(g_a) - E_{ji}|||_\infty |||\mathscr{P}_+(f)|||_2,$$

en faisant $a \to +\infty$ dans (3.4.1), il en résulte que, pour toute f dans $L^2(G)$,

$$\langle E_{ji} \mathscr{P}_+(f)/S \rangle = 0,$$

ou encore, puisque $S^* E_{ji} = E_{S^* e_j, e_i}$, que

$$\operatorname{Tr}[S^* E_{ji} \mathscr{P}_+(f)] = \operatorname{Tr}[E_{S^* e_j, e_i} \mathscr{P}_+(f)] = 0,$$

quelle que soit f dans $L^2(G)$, ce qui est absurde d'après le lemme 1.

3.5. Fin de la démonstration du théorème 1. Désignons par $\mathscr{S}_0(\boldsymbol{R})$ l'espace des fonctions φ sur $\boldsymbol{R}$ dont la transformée de Fourier est indéfiniment dérivable à support compact *disjoint* de l'origine (autrement dit $\hat{\varphi} \in \mathscr{D}(\boldsymbol{R})$ et $\hat{\varphi}$ est nul dans un voisinage de 0, variable avec φ). Il est clair que $\mathscr{S}_0(\boldsymbol{R})$ est dense dans $L^2(\boldsymbol{R})$.

Soit maintenant $A = (A_+, A_-)$ un élément de $L^2(\pm)$; soit $\varepsilon > 0$. On va montrer qu'il existe une fonction F dans $L^2(G)$ telle que $\|\mathscr{P}(F) - A\|_2 < \varepsilon$, ce qui entraînera que $\mathscr{P}(L^2(G))$ est dense dans $L^2(\pm)$, donc que $\mathscr{P}(L^2(G)) = L^2(\pm)$, vu que $\mathscr{P}$ est une isométrie. D'après le lemme 2, il existe deux fonctions $f_1 = \sum_{\text{FINIE}} c_i \varphi_i \otimes \psi_i$ et $f_2 = \sum_{\text{FINIE}} d_j h_j \otimes k_j$, où les φ_i et h_j sont dans $\mathscr{S}_0(\boldsymbol{R})$ et ψ_i et k_j dans $\mathscr{D}(\boldsymbol{R}_+^*)$, telles que

$$|||\mathscr{P}_+(f_1) - A_+|||_2 < \varepsilon/\sqrt{2} \quad \text{et} \quad |||\mathscr{P}_-(f_2) - A_-|||_2 < \varepsilon/\sqrt{2}.$$

Soient Φ_i et H_j des fonctions de $\mathscr{S}(\boldsymbol{R})$ définies par

$$\hat{\Phi}_i(t) = \begin{cases} \hat{\varphi}_i(t) & \text{si } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{si } t \leqslant 0, \end{cases}$$

$$\hat{H}_j(t) = \begin{cases} \hat{h}_j(t) & \text{si } t \leqslant 0, \\ 0 & \text{si } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Posons

$$\begin{aligned} F_1(b, a) &= \sum c_i \Phi_i(b) \psi_i(a), \\ F_2(b, a) &= \sum d_j H_j(b) k_j(a), \\ F &= F_1 + F_2. \end{aligned}$$

On a, sur la définition de $\mathscr{P}_+$ et $\mathscr{P}_-$,

$$\begin{aligned} \mathscr{P}_+(F) &= \mathscr{P}_+(F_1) = \mathscr{P}_+(f_1), \\ \mathscr{P}_-(F) &= \mathscr{P}_-(F_2) = \mathscr{P}_-(f_2), \end{aligned}$$

de sorte que

$$\|\mathscr{P}(F) - A\|_2^2 = |||\mathscr{P}_+(F) - A_+|||_2^2 + |||\mathscr{P}_-(F) - A_-|||_2^2 < \varepsilon^2,$$

ce qui achève la démonstration du théorème 1.

Remarque. L'opérateur $\mathscr{P}_+$ (resp. $\mathscr{P}_-$) applique *surjectivement* $L^2(G)$ sur $\mathscr{L}_2$. En effet, soit S un opérateur de Hilbert–Schmidt. D'après le théorème 1, il existe une fonction f dans $L^2(G)$ telle que $\mathscr{P}(f) = (S, 0)$; autrement dit $\mathscr{P}_+(f) = S$.

4. TRANSFORMATION DE FOURIER DES CONVOLUTEURS

4.1. En analyse harmonique commutative, on sait qu'à un convoluteur sur un groupe abélien localement compact, on fait correspondre une fonction mesurable bornée sur le groupe dual. De même, dans la situation du groupe G des transformations affines de la droite, on va attacher à un convoluteur de $L^2(G)$ un élément bien défini de $L^\infty(\pm)$, et réciproquement.

Nous noterons $CV_2(G)$ l'espace de Banach des convoluteurs de $L^2(G)$, encore appelés pseudo-mesures sur G, c'est-à-dire des opérateurs bornés de $L^2(G)$ qui commutent aux translations à droite. Cet espace est celui qui était désigné par $VN(G)$ dans P. Eymard [9], où l'on montrait que, dans cet espace, les topologies faibles et ultra-faibles des opérateurs coincident. Il est l'espace de Banach dual de l'algèbre de Fourier $A(G)$. De plus, on sait, d'après le théorème de densité de Kaplansky, que l'ensemble des f de $L^1(G)$ telles que $\|f\|_{CV_2}\leqslant 1$ est faiblement dense dans la boule unité de $CV_2(G)$. De plus, cette boule-unité est un espace compact et métrisable pour la topologie faible.

THÉORÈME 2. *Pour tout convoluteur T de $L^2(G)$, il existe un couple $\big(\mathscr{F}_+(T),\mathscr{F}_-(T)\big)$ d'opérateurs bornés de $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$, et un seul, tel que, quelle que soit f dans $L^2(G)$,*

$$\mathscr{P}_+(T*f)=\mathscr{F}_+(T)\mathscr{P}_+(f),\qquad \mathscr{P}_-(T*f)=\mathscr{F}_-(T)\mathscr{P}_-(f). \tag{4.1.1}$$

L'application $T\mapsto \mathscr{F}T=\big(\mathscr{F}_+(T),\mathscr{F}_-(T)\big)$ ainsi définie est un isomorphisme de l'algèbre de Banach $CV_2(G)$ sur l'algèbre de Banach $L^\infty(\pm)$. Elle prolonge la transformation de Fourier $\mathscr{F}$ déjà définie (cf. (3.1)) *sur $L^1(G)$. De plus elle transporte sur $L^\infty(\pm)$ la topologie faible de $CV_2(G)$ en la topologie faible de dualité avec $L^1(\pm)$.*

Démonstration. 1) Soit T dans $CV_2(G)$ et soit (g_n) une suite dans $L^1(G)$ telle que

i) $\|g_n\|_{CV_2}\leqslant\|T\|_{CV_2}$;

ii) Les g_n convergent faiblement (donc aussi fortement, car on reste dans une boule) vers T dans $CV_2(G)$.

Les opérateurs $\mathscr{F}_+(g_n)$ (resp. $\mathscr{F}_-(g_n)$) restent dans la boule B de $\mathscr{L}_\infty$, de centre 0, de rayon $\|T\|_{CV_2}$, car $\|g_n\|_{CV_2}$ n'est autre que $\sup_\pi|||\pi(g_n)|||_\infty$, où π parcourt l'ensemble de toutes les représentations unitaires continues de G. Donc il existe une suite extraite (g_{n_i}), et deux opérateurs bornés S_+ et S_- dans $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$, appartenant à B, tels que

$$S_+=\lim_i\mathscr{F}_+(g_{n_i})\quad\text{ et }\quad S_-=\lim_i\mathscr{F}_-(g_{n_i}),$$

pour la topologie faible opérateurs dans $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$. Pour toute fonction f dans $L^2(G)$, on a, d'après la proposition 1

$$\mathscr{P}_\pm(g_{n_i}*f)=\mathscr{F}_\pm(g_{n_i})\mathscr{P}_\pm(f);$$

d'où l'on tire, en faisant $i\to+\infty$,

$$\mathscr{P}_\pm(T*f)=S_\pm\mathscr{P}_\pm(f). \tag{4.1.2}$$

2) Montrons que le couple (S_+,S_-) satisfaisant à (4.3.1) est nécessairement *unique*. En effet, si f est dans $L^2(G)$, on a

$$S_\pm\mathscr{P}_\pm(f)=S'_\pm\mathscr{P}_\pm(f),$$

alors, puisque $\mathscr{P}_+$ et $\mathscr{P}_-$ sont surjectives d'après (3.5), pour tous vecteurs ξ,η dans $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$, on aura

$$E_{S_\pm\xi,\eta}=S_\pm E_{\xi,\eta}=S'_\pm E_{\xi,\eta}=E_{S'_\pm\xi,\eta},$$

donc $S_\pm=S'_\pm$.

3) Notons désormais $\mathscr{F}(T)=\big(\mathscr{F}_+(T),\mathscr{F}_-(T)\big)=(S_+,S_-)$. Par construction même de $\mathscr{F}$, il est clair que la transformation $\mathscr{F}$ prolonge à $CV_2(G)$ celle qui était déjà définie sur $L^1(G)$.

4) Soit T un élément de $CV_2(G)$, on a

$$\|\mathscr{F}(T)\|_\infty=\operatorname{Max}[|||\mathscr{F}_+(T)|||_\infty,|||\mathscr{F}_-(T)|||_\infty]\leqslant\|T\|_{CV_2},$$

Comme on l'a déjà remarqué au 1) (S_+ et S_- sont dans la boule B). Réciproquement, si f et g sont dans $L^2(G)$, on a d'après le théorème 1,

$$|\langle T*f,g\rangle|=|[\mathscr{P}(T*f)|\mathscr{P}(g)]|=|[\mathscr{F}(T)\mathscr{P}(f)|\mathscr{P}(g)]|$$
$$\leqslant\|\mathscr{F}(T)\mathscr{P}(f)\|_2\|\mathscr{P}(g)\|_2,$$

quantité qui est majorée, d'après (2.2.1), par

$$\|\mathscr{F}T\|_\infty\|\mathscr{P}(f)\|_2\|\mathscr{P}(g)\|_2=\|\mathscr{F}T\|_\infty\|f\|_{L^2(G)}\|g\|_{L^2(G)},$$

d'où l'inégalité: $\|T\|_{CV_2}\leqslant\|\mathscr{F}(T)\|_\infty$.

5) Montrons que $\mathscr{F}$ applique $CV_2(G)$ *surjectivement* sur $L^\infty(\pm)$. Si $A=(A_+,A_-)$ appartient à $L^\infty(\pm)$, notos M_A l'opérateur, borné et de norme $\|A\|_\infty$, de multiplication par A dans $L^2(\pm)$: $M_A(U_+,U_-)=(A_+U_+,A_-U_-)$, pour tout couple d'opérateurs U_+ et U_- de Hilbert–Schmidt sur $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$. Posons $T=\mathscr{P}^{-1}M_A\mathscr{P}$. C'est un opérateur linéaire continu sur $L^2(G)$. Montrons que c'est un convoluteur. En effet si ε_s est la masse unité au point $s\in G$, on a, pour toute f dans $L^2(G)$,

$$T(f*\varepsilon_s)=\mathscr{P}^{-1}M_A\mathscr{P}(f*\varepsilon_s)=\mathscr{P}^{-1}M_A\mathscr{P}(f)\mathscr{F}(\Delta^{-1/2}\varepsilon_s)$$
$$=\mathscr{P}^{-1}[A\mathscr{P}(f)\mathscr{F}(\Delta^{-1/2}\varepsilon_s)]=\mathscr{P}^{-1}[\mathscr{P}(Tf)\mathscr{F}(\Delta^{-1/2}\varepsilon_s)]$$
$$=\mathscr{P}^{-1}[\mathscr{P}(Tf*\varepsilon_s)]=Tf*\varepsilon_s.$$

Sur la définition: $T = \mathscr{P}^{-1} M_A \mathscr{P}$, il est clair que, pour toute f dans $L^2(G)$, $\mathscr{P}(T*f) = A\mathscr{P}(f)$; donc $A = \mathscr{F}(T)$. Ainsi $\mathscr{F}$ est surjective.

Il est évident, d'autre part, sur la caractérisation (4.1.1) que $\mathscr{F}(T_1+T_2) = \mathscr{F}(T_1)+\mathscr{F}(T_2)$, et $\mathscr{F}(T_1T_2) = \mathscr{F}(T_1)\mathscr{F}(T_2)$. On a donc bien un isomorphisme d'algèbres de Banach.

6) Montrons enfin l'assertion concernant les topologies faibles. Si T appartient à $CV_2(G)$, et si f et g sont dans $L^2(G)$, on a

$$\langle T, \bar{g}*\check{f}\rangle = (Tf/g) = [\mathscr{P}(Tf)/\mathscr{P}(g)] = \sum_{\pm} \mathrm{Tr}\left(\mathscr{P}_{\pm}(Tf)\mathscr{P}_{\pm}(g)^*\right)$$

$$= \sum_{\pm} \mathrm{Tr}\left(\mathscr{F}_{\pm}(T)\mathscr{P}_{\pm}(f)\mathscr{P}_{\pm}(g)^*\right) = [\mathscr{F}T, \mathscr{P}(f)\mathscr{P}(g)^*].$$

Or toute fonction de $A(G)$ s'écrit sous la forme $\bar{g}*\check{f}$ (cf. P. Eymard [9]), et tout élément de $L^1(\pm)$ est le produit de deux éléments de $L^2(\pm)$, donc s'écrit sous la forme $\mathscr{P}(f)\mathscr{P}(g)^*$. Le transfert des topologies faibles s'en déduit immédiatement.

Remarque. La représentation π_+ étant irréductible, l'algèbre de Von Neumann engendrée par les $\pi_+(f)$, lorsque f parcourt $L^1(G)$, est exactement $\mathscr{L}(L^2(\mathbf{R}_+^*))$. A l'aide du clasique théorème de Kaplansky, on peut énoncer que, si $S \in \mathscr{L}(L^2(\mathbf{R}_+^*))$, il existe une suite $f_n \in L^1(G)$, telle que

a) $|||\pi_+(f_n)||| \leqslant \|S\|$, et telle que

b) $\pi_+(f_n)$ converge faiblement dans $\mathscr{L}(L^2(\mathbf{R}_+^*))$ vers S.

D'après le théorème 2, on voit que, dans cet énoncé, on peut même remplacer le a) par l'assertion apparemment plus forte a)′ $\|f_n\|_{CV_2} \leqslant |||S|||$.

5. CARACTÉRISATION DE $A(G)$ ET DES ESPACES A_{π_+} ET A_{π_-}

Soit $A(G)$ (resp. $B(G)$) l'algèbre de Fourier (resp. de Fourier–Stieltjes) de G, définies et étudiées par P. Eymard dans [9]. Rappelons que $B(G)$ est l'algèbre des combinaisons linéaires de fonctions de type positif sur G, munie de la norme d'espace de Banach dual de $(L^1(G), \|\cdot\|_{CV_2})$, et que $A(G)$ est la sous-algèbre de Banach de $B(G)$ engendrée par les fonctions continues de type positif à support compact. D'autre part $A(G)$ est exactement l'ensemble des fonctions de la forme $f*\tilde{g}$, où f et g sont dans $L^2(G)$, et, si $u \in A(G)$, on peut même choisir f et g dans $L^2(G)$ telles que

$$u = f*\tilde{g} \quad \text{et} \quad \|u\|_{A(G)} = \|f\|_2\|g\|_2.$$

On considère aussi les sous-espaces de Banach A_{π_+} et A_{π_-} engendrés dans $B(G)$ par les coefficients de π_+ et π_- respectivement (cf. G. Arsac [1] pour une étude générale des espace A_π).

On va montrer que $A(G)$ s'identifie par transformation de Fourier à l'espace $L^1(\pm)$ avec égalité des normes, que A_{π_+} et A_{π_-} sont des sous-

espaces fermés de $A(G)$ et que $A(G) = A_{\pi_+} \oplus A_{\pi_-}$. On verra même que A_{π_+} et A_{π_-} sont des *algèbres* de Banach. Des résultats intéressants en découlent. Signalons que G. Arsac a démontré indépendemment par des méthodes différentes que $A(G) = A_{\pi_+} \oplus A_{\pi_-}$.

THÉORÈME 3.

1) *Soit $S = (S_+, S_-)$ un élément de $L^1(\pm)$, et soit u la fonction sur G définie par*

$$u(x) = \mathrm{Tr}\left(\pi_+(x)S_+\right) + \mathrm{Tr}\left(\pi_-(x)S_-\right).$$

Alors u appartient à $A(G)$, et on a: $\|u\|_{A(G)} = \|S\|_1$.

2) *L'application $\bar{\mathscr{F}}$: $S \mapsto u$ ainsi définie est un isomorphisme (d'espace de Banach) isométrique de $L^1(\pm)$ sur $A(G)$, dont la transposée est l'opérateur de Fourier $\mathscr{F}$ de $CV_2(G)$ sur $L^\infty(\pm)$.*

Démonstration. 1) Montrons que u appartient à $A(G)$. Pour cela, on va vérifier que u s'écrit comme produit de convolution de deux fonctions de $L^2(G)$. Soient

$$S_+ = U_+V_+ \quad \text{et} \quad S_- = U_-V_-$$

la décomposition polaire de S_+ et S_-, où U_+ et U_- sont des opérateurs partiellement isométriques, V_+ et V_- des opérateurs hermitiens positifs ($V_+ = |S_+|$, $V_- = |S_-|$). Les opérateurs S_+ et S_- s'écrivent aussi sous la forme

$$S_+ = U_+V_+^{1/2}V_+^{1/2}, \quad S_- = U_-V_-^{1/2}V_-^{1/2}.$$

Mais $U_\pm V_\pm^{1/2}$ et $V_\pm^{1/2}$ sont dans l'espace $\mathscr{L}_2$ des opérateurs de Hilbert–Schmidt. En effet, on a

$$\mathrm{Tr}\left((V_\pm^{1/2})^*(V_\pm^{1/2})\right) = \mathrm{Tr}(|S_\pm|^{1/2}|S_\pm|^{1/2}) = \mathrm{Tr}(|S_\pm|) < +\infty,$$

car $S_\pm$ est dans $\mathscr{L}_1$. D'autre part, comme $U_\pm \in \mathscr{L}_\infty$, alors $U_\pm V_\pm^{1/2}$ est un opérateur de Hilbert–Schmidt. Il existe donc, d'après le théorème 1, deux fonctions f et g dans $L^2(G)$ telles que

$$\mathscr{P}(f) = (U_+V_+^{1/2}, U_-V_-^{1/2}),$$

$$\mathscr{P}(g) = (V_+^{1/2}, V_-^{1/2}),$$

de sorte que

$$S_+ = \mathscr{P}_+(f)\mathscr{P}_+(g) \quad \text{et} \quad S_- = \mathscr{P}_-(f)\mathscr{P}_-(g).$$

Donc la fonction u s'écrit encore

$$u(x) = \mathrm{Tr}\left(\pi_+(x)\mathscr{P}_+(f)\mathscr{P}_+(g)\right) + \mathrm{Tr}\left(\pi_-(x)\mathscr{P}_-(f)\mathscr{P}_-(g)\right)$$

$$= \mathrm{Tr}\left(\mathscr{P}_+(\varepsilon_x*f)\mathscr{P}_+(g)\right) + \mathrm{Tr}\left(\mathscr{P}_-(\varepsilon_x*f)\mathscr{P}_-(g)\right).$$

Donc, d'après (2.2.2) et le fait que $\mathscr{P}_\pm(g)^* = \mathscr{P}_\pm(g)$, on a

$$u(x) = [\mathscr{P}(\varepsilon_x*f)|\mathscr{P}(g)].$$

Grâce à la formule de Plancherel, il s'ensuit que

$$u(x) = \langle \varepsilon_x * f, \bar{g} \rangle = \bar{g} * \check{f}(x),$$

c'est-à-dire que u appartient à $A(G)$.

Montrons maintenant que $\|u\|_{A(G)} \leqslant \|S\|_1$, ce qui entraînera que $\overline{\mathscr{F}}$ est continue. En effet, par construction, on a $S = \mathscr{P}(f)\mathscr{P}(g)$ et $u = \bar{g} * \check{f}$. De plus, on a

$$\begin{aligned}\|\mathscr{P}(g)\|_2 &= (|||V_+^{1/2}|||_2^2 + |||V_-^{1/2}|||_2^2)^{1/2} \\ &= \big(\operatorname{Tr}(V_+) + \operatorname{Tr}(V_-)\big)^{1/2} \\ &= \|(V_+, V_-)\|_1^{1/2} = \|(|S_+|, |S_-|)\|_1^{1/2} = \|S\|_1^{1/2}\end{aligned}$$

et aussi, puisque $U_\pm$ est partiellement isométrique

$$\|\mathscr{P}(f)\|_2 = \|UV^{1/2}\|_2 \leqslant \|V^{1/2}\|_2 = \|S\|_1^{1/2}.$$

Donc, il s'ensuit que

$$\|u\|_{A(G)} \leqslant \|g\|_{L^2(G)} \|f\|_{L^2(G)} = \|\mathscr{P}(g)\|_2 \|\mathscr{P}(f)\|_2 \leqslant \|A\|_1.$$

2) En identifiant (cf. P. Eymard [9]) l'espace de Banach dual de $A(G)$ avec $CV_2(G)$, pour voir que $\overline{\mathscr{F}}$ est un isomorphisme isométrique, il suffit de vérifier que ${}^t\overline{\mathscr{F}} = \mathscr{F}$, où ${}^t\overline{\mathscr{F}}$ est la transposée de $\overline{\mathscr{F}}$, et où $\mathscr{F}$ est l'opérateur de Fourier de $CV_2(G)$ sur $L^\infty(\pm)$, lequel est un isomorphisme isométrique d'après le théorème 2. Pour ce faire, montrons d'abord que ${}^t\overline{\mathscr{F}} = \mathscr{F}$ sur $L^1(G)$. Soit donc une fonction f de $L^1(G)$, et soit $S = (S_+, S_-)$ un élément de $L^1(\pm)$. On a

$$\begin{aligned}[S, {}^t\overline{\mathscr{F}}(f)] &= \langle \overline{\mathscr{F}}(S), f \rangle \\ &= \int_G f(x) \operatorname{Tr}\big(\pi_+(x) S_+\big)\,dx + \int_G f(x) \operatorname{Tr}\big(\pi_-(x) S_-\big)\,dx \\ &= \operatorname{Tr}\big(\pi_+(f) S_+\big) + \operatorname{Tr}\big(\pi_-(f) S_-\big) \\ &= \langle S_+, \pi_+(f) \rangle + \langle S_-, \pi_-(f) \rangle \\ &= [S, \mathscr{F}f],\end{aligned}$$

donc $[S, {}^t\overline{\mathscr{F}}(f)] = [S, \mathscr{F}f]$, d'où ${}^t\overline{\mathscr{F}}(f) = \mathscr{F}(f)$, vu l'arbitraire de S dans $L^1(\pm)$. Il ne nous restre qu'à vérifier que ${}^t\overline{\mathscr{F}}(T) = \mathscr{F}(T)$ pour tout T dans $CV_2(G)$. Mais ceci est évident, puisque, $\overline{\mathscr{F}}$ étant continue, ${}^t\overline{\mathscr{F}}$ est continue pour les topologies faibles (cf. Bourbaki [2], § 4, n° 2, corollaire de la proposition 6) et puisque $L^1(G)$ est faiblement dense dans $CV_2(G)$. On conclut à l'aide du théorème 2.

Théorème 4.

1) *L'application* $\overline{\mathscr{F}}_+ : S \to \overline{\mathscr{F}}_+(S)$ *définie par* $\overline{\mathscr{F}}_+(S)(x) = \operatorname{Tr}\big(\pi_+(x) S\big)$ *est un isomorphisme (d'espace de Banach) isométrique* $\mathscr{L}_1$ *sur* A_{π_+}.

2) *Le même énoncé vaut en remplaçant partout* π_+ *par* π_- *et* $\overline{\mathscr{F}}_+$ *par* $\overline{\mathscr{F}}_-$.

3) *On a* $A(G) = A_{\pi_+}(G) \oplus A_{\pi_-}(G)$.

De plus, si $u = u_1 + u_2$, *avec* u_1 *dans* A_{π_+} *et* u_2 *dans* A_{π_-}, *on a*: $\|u\|_A = \|u_1\|_A + \|u_2\|_A$.

Démonstration. D'après le théorème 3, on a

$$\|u\|_A = \|(S, 0)\|_1 = \operatorname{Tr}(|S|) = |||S|||_1,$$

donc $\overline{\mathscr{F}}_+$ est isométrique. Si $S = E_{\xi,\eta}$ est de rang un, on a

$$[\overline{\mathscr{F}}_+(S)](x) = \operatorname{Tr}\big(\pi_+(x) E^1_{\xi,\eta}\big) = \big(\pi_+(x)\xi/\eta\big),$$

donc $\overline{\mathscr{F}}_+(S)$ appartient à A_{π_+}. Or les opérateurs de rang un forment un ensemble total dans $\mathscr{L}_1$, et les coefficients de π_+ forment un ensemble total dans A_{π_+}. Donc $\overline{\mathscr{F}}_+$ applique isométriquement $\mathscr{L}_1$ sur A_{π_+}. Même démonstration pour π_-.

Le 3) résulte immédiatement du théorème 3. En effet ce théorème permet d'écrire toute u de $A(G)$ sous la forme $u = u_1 + u_2$, avec $u_1 \in A_{\pi_+}$, $u_2 \in A_{\pi_-}$ et $\|u\| = \|u_1\| + \|u_2\|$. Mais de plus la somme est directe, car les représentations π_+ et π_- sont disjointes, donc $A_{\pi_+} \cap A_{\pi_-} = \{0\}$ (cf. G. Arsac [1]).

Comme application de ce théorème, on retrouve, compte tenu du théorème 2 de G. Arsac [1] un résultat bien connu, à savoir:

Corollaire. *La représentation régulière gauche de* G *est somme hilbertienne de représentations équivalentes chacune à* π_+ *ou* π_-.

Théorème 5. *Les espaces* $A_{\pi_+}(G)$ *et* $A_{\pi_-}(G)$ *sont des algèbres pour le produit ordinaire des fonctions.*

Commençons par un lemme de caractérisation de A_{π_+}.

Lemme 1. *Soit* u *une fonction définie dans* G. *Pour que* u *appartienne à* A_{π_+}, *il faut et il suffit qu'il existe* $f \in L^2(G)$ *et* $g \in L^2(G)$ *telles que*

$$u = g * \check{f}; \quad \mathscr{P}_-(f) = 0; \quad \mathscr{P}_-(g) = 0. \tag{1}$$

Démonstration. a) Supposons qu'on ait (1) et posons $S = \mathscr{P}_+(f)\mathscr{P}_+(g)$. Alors S est dans $\mathscr{L}_1$, et, si l'on pose, pour tout x dans G,

$$v(x) = \operatorname{Tr}[\pi_+(x) S] = \operatorname{Tr}[\pi_+(x) \mathscr{P}_+(f) \mathscr{P}_+(\check{g}) \Delta^{-1/2}],$$

v appartient à A_{π_+} d'après le théorème 4. Mais, d'après la formule de Plancherel (cf. théorème 1), on a

$$\begin{aligned}v(x) &= \operatorname{Tr}\big(\mathscr{P}_+(\varepsilon_x * f) \mathscr{P}_+(\check{g}\Delta^{-1/2})\big) = \langle \mathscr{P}_+(\varepsilon_x * f), \mathscr{P}_+(\check{g}\Delta^{-1/2})^* \rangle \\ &= [\mathscr{P}(\varepsilon_x * f) | \mathscr{P}(\bar{g})] = \langle \varepsilon_x * f | \bar{g} \rangle \\ &= \int_G g(y) f(x^{-1}y)\,dy = g * \check{f}(x) = u(x),\end{aligned}$$

donc $u = v \in A_{\pi_+}$.

b) Réciproquement, soit u dans A_{π_+}. Alors, il existe S dans $\mathscr{S}_1$ tel que $u(x) = \mathrm{Tr}[\pi_+(x)S]$, d'après le théorème 4. Considérons la décomposition polaire $S = UV^{1/2}V^{1/2}$ de S. Soient, d'après le théorème 1, f et g dans $L^2(G)$ telles que

$$\mathscr{P}(f) = (UV^{1/2}, 0) \quad \text{et} \quad \mathscr{P}(g) = (V^{1/2}, 0).$$

Alors $\mathscr{P}_-(f) = \mathscr{P}_-(g) = 0$, $\mathscr{P}_+(g)^* = \mathscr{P}_+(g)$ et, on montre, comme au a), que

$$u(x) = \mathrm{Tr}\big(\pi_+(x)\mathscr{P}_+(f)\mathscr{P}_+(g)\big) = g*\check{f}(x) \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Soit $\mathscr{S}_0(G)$ le sous-espace vectoriel, dense dans $L^2(G)$, engendré par les fonctions $\varphi\otimes\psi$, où $\hat{\varphi}\in\mathscr{D}(\boldsymbol{R})$ a son support disjoint de 0, et où $\psi\in\mathscr{D}(\boldsymbol{R}_+^*)$. Soit $\mathscr{S}_0^{\pm}(G)$ le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions $\varphi\otimes\psi$, où, de plus, le support de $\hat{\varphi}$ est contenu dans $\pm\boldsymbol{R}_+^*$. Sur la définition de $\mathscr{P}_+$ et de $\mathscr{P}_-$, on voit immédiatement que, si f est dans $\mathscr{S}_0^+(G)$, alors $\mathscr{P}_-(f) = 0$ et que, si f est dans $\mathscr{S}_0^-(G)$, on a $\mathscr{P}_+(f) = 0$. De plus toute fonction f dans $\mathscr{S}_0(G)$ se décompose, de façon évidente, sous la forme $f = f_1+f_2$, où f_1 est dans $\mathscr{S}_0^+(G)$ et f_2 est dans $\mathscr{S}_0^-(G)$: il suffit, pour cela, dans chaque $\varphi\otimes\psi$ définissant f, d'écrire

$$\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_1+\hat{\varphi}_2, \qquad \text{où } \hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}\chi_{\boldsymbol{R}_+^*},$$

où le symbole χ est pour „fonction caractéristique".

Lemme 2. *L'espace $\mathscr{S}_0^+(G)$ est dense le sous-espace de $L^2(G)$ formé des fonction f telles que $\mathscr{P}_-(f) = 0$.*

Démonstration. En effet, soit une telle fonction f, et soit $\varepsilon > 0$. Il existe g dans $\mathscr{S}_0(G)$ telle que $\|f-g\|_{L^2(G)}\leqslant\varepsilon$. Décomposons $g = g_1+g_2$, où g_1 est dans $\mathscr{S}_0^+(G)$ et g_2 dans $\mathscr{S}_0^-(G)$, comme on vient de le dire. On a

$$\begin{aligned}\|f-g\|_{L^2(G)} &= \|\mathscr{P}(f-g_1)\|_2 = \big\|(\mathscr{P}_+(f-g_1), 0)\big\|_2 \leqslant \big\|(\mathscr{P}_+(f-g_1), \mathscr{P}_-(g_2))\big\|_2\\ &= \|\mathscr{P}(f-g)\|_2 = \|f-g\|_{L^2(G)}\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

Lemme 3. *Si f et g sont dans $\mathscr{S}_0^+(G)$, alors fg est dans $\mathscr{S}_0^+(G)$.*

Cela résulte immédiatement:

1) du fait que $\mathscr{D}(\boldsymbol{R}_+^*)$ est stable pour le produit ordinaire des fonctions;

2) du fait que l'ensemble des $\hat{\varphi}\in\mathscr{D}(\boldsymbol{R})$ à support dans $\boldsymbol{R}_+^*$ est stable par convolution.

Démonstration du théorème 5. Soit $A_{\pi_+}^0$ le sous-espace de $A(G)$ formé des fonctions $u = g*\check{f}$, où f et g sont dans $\mathscr{S}_0^+(G)$. D'après les lemmes 1 et 2, $A_{\pi_+}^0$ est une partie dense de A_{π_+}. Il suffit donc de montrer que, si $u = g*\check{f}$ et $v = k*\check{h}$ sont dans $A_{\pi_+}^0$, alors uv est dans A_{π_+}. Or d'après R. Spector [1], lemme IV.2.1, page 52, pour tout x dans G,

$$(g*\check{f})\cdot(k*\check{h})(x) = \vec{\int_G} U_z*\check{V}_z(x)\,dz,$$

où l'intégrale vectorielle est à valeurs dans $A(G)$, et où

$$U_z(x) = g(x)k(xz), \qquad V_z(x) = f(x)h(xz).$$

Mais, pour tout z fixé dans G, les fonction g et $x\mapsto k(xz)$ sont dans $\mathscr{S}_0^+(G)$, donc, d'après le lemme 3, la fonction $x\mapsto U_z(x)$ est dans $\mathscr{S}_0^+(G)$. De même, V_z est dans $\mathscr{S}_0^+(G)$. Par suite, d'après le lemme 1, pour tout z fixé dans G, la fonction $U_z*\check{V}_z$ est dans A_{π_+}, qui est un sous-espace fermé de $A(G)$. Donc la fonction

$$\vec{\int_G} U_z*V_z(x)\,dz$$

est dans A_{π_+}. C.Q.F.D.

Corollaire. *La représentation $\pi_+\otimes\pi_+$ (resp. $\pi_-\otimes\pi_-$) est un multiple de π_+ (resp. π_-).*

Cela découle du théorème 5 et du théorème 3 de G. Arsac [1].

Remarque. Par $\mathscr{F}$, les fonctions *de type positif* de $A(G)$ proviennent exactement des couples (S_+, S_-) d'opérateurs traçables *hermitiens positifs* sur $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$. On le voit facilement en remarquant que ces fonctions sont exactement les $f*\tilde{f}$, où $f\in L^2(G)$, et en utilisant notre transformation de Plancherel.

6. SUR LES CONVOLUTEURS DONT L'IMAGE DE FOURIER EST UN COUPLE D'OPÉRATEURS COMPACTS

Soit $L\mathscr{C}(\pm)$ le sous-espace vectoriel fermé de $L^\infty(\pm)$, formé des couples d'opérateurs *compacts* de l'espace de Hilbert $L^2(\boldsymbol{R}_+^*, dt/t)$. Dans cette partie, on se propose de caractériser l'ensemble des convoluteurs $T\in CV_2(G)$ tels que $\mathscr{F}(T)$ appartienne à $L\mathscr{C}(\pm)$. On montrera que cet ensemble coïncide avec celui noté $PF_0(G)$ ou simplement PF_0, des pseudo-fonctions (i.e. des limites en norme CV_2 des opérateurs de convolution dans $L^2(G)$ par les $f\in L^1(G)$) qui vérifient de plus une condition algébrique, à savoir que *leur moyenne par le sous-groupe des translations soit nulle.*

Comme application, nous retrouverons un résultat bien connu (cf. J. M. G. Fell [1], et Nelson et Stinespring [1]), à savoir que le groupe G n'est pas liminaire (on dit aussi CCR). Plus, nous précisons le degré de non-liminarité de G en caractérisant l'ensemble des fonctions f de $L^1(G)$ pour lesquelles $\pi_+(f)$ et $\pi_-(f)$ sont des opérateurs compacts. Une autre application intéressante est que $A(G)$ s'identifie à l'espace dual de PF_0. Cela nous permet d'obtenir, après V. Flory et G. Arsac, par des méthodes différentes - et, nous l'espérons, plus élémentaires - la décomposition de «Lebesgue»:

$$B(G) = A(G)\oplus B_s(G),$$

et notre théorème précise que l'espace $B_s(G)$ est celui des fonctions $u\circ j$, où $u\in B(\boldsymbol{R}_+^*)$, et où $j(b,a)=a$.

Citons, comme conséquence de cette décomposition, une caractérisation très simple des fonctions de $A(G)$ parmi celles de $B(G)$: *une fonction $u\in B(G)$ est dans $A(G)$ si et seulement si u tend vers zéro à l'infini*, autrement dit $A(G)=B(G)\cap\mathscr{C}_0(G)$. On voit ici combien la situation, de ce point de vue, est plus simple dans le groupe G que dans le groupe $\boldsymbol{R}$!

Notations. Soit σ l'homomorphisme de $L^1(G)$ sur $L^1(G/N)$ défini par:

$$\sigma(f)(\dot{g})=\int_N f(gn)\,dn,$$

quelle que soit $f\in L^1(G)$. En identifiant N à $\boldsymbol{R}$ et G/N à $\boldsymbol{R}_+^*$, on obtient

$$\sigma(f)(a)=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(b,a)\,db.$$

Soit $\mathscr{I}$ l'idéal bilatère fermé de $L^1(G)$ noyau de σ. Soit PF, ce qui est noté $C_\varrho^*(G)$ par P. Eymard [9], i.e. l'adhérence en norme dans $\mathscr{L}(L^2(G))$ des opérateurs de convolution par des fonctions de $L^1(G)$.

Désignons par PF_0 la sous-c^*-algèbre de PF engendrée par $\mathscr{I}$.

Pour tout $T\in PF$, on définit un convoluteur $\dot{\sigma}(T)$ sur $\boldsymbol{R}_+^*$ par:

$$\langle\dot{\sigma}(T),u\rangle=\langle T,u_0 j\rangle,\quad\text{pour tout } u\in A(\boldsymbol{R}_+^*).$$

Comme $u_0 j\in B(G)$, et $\|u_0 j\|_B=\|u\|_B$ (cf. P. Eymard [9], 2.20) 2)), $\dot{\sigma}(T)$ appartient bien à $CV_2(\boldsymbol{R}_+^*)$ et $\|\dot{\sigma}(T)\|_{CV_2}\leqslant\|T\|_{CV_2}$.

En fait, on a $\dot{\sigma}(T)\in PF(\boldsymbol{R}_+^*)$. En effet si des $f_i\in L^1(G)$ convergent en norme d'opérateurs vers T, alors $\dot{\sigma}(f_i)=\sigma(f_i)$ convergent vers $\dot{\sigma}(T)$ en norme CV_2, car

$$\|\sigma(f_i)-\dot{\sigma}(T)\|_{CV_2}=\|\dot{\sigma}(f_i-T)\|_{CV_2}\leqslant\|f_i-T\|_{CV_2}.$$

Remarque. Les fonctions $\varphi\otimes\psi$, où $\psi\in\mathscr{K}(\boldsymbol{R}_+^*)$, et où $\varphi\in L^1(\boldsymbol{R})$ et $\hat{\varphi}$ est nulle au voisinage de 0, forment un ensemble total dans $\mathscr{I}$, pour la norme $L^1(G)$. En effet, l'ensemble des fonctions $g\otimes\psi$, où $g\in L^1(\boldsymbol{R})$, $\hat{g}(0)=0$, et où $\psi\in\mathscr{K}(\boldsymbol{R}_+^*)$ est total dans $\mathscr{I}$ (cf. P. Eymard [11], p. 104). D'autre part, le sous-espace vectoriel des fonctions φ est dense dans celui des fonctions $g\in L^1(\boldsymbol{R})$ telles que $\hat{g}(0)=0$ (il suffit pour s'en convaincre de se souvenir que $\{0\}$ est un ensemble de synthèse).

THÉORÈME 6. *Soit T un élément de $CV_2(G)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*:

i) *$\mathscr{F}(T)$ est un couple d'opérateurs compacts dans l'espace de Hilbert $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$*;

ii) *T est une pseudo-fonction, et $\dot{\sigma}(T)=0$*;

iii) *T est limite en norme dans $CV_2(G)$ d'opérateurs définis par des fonctions de $\mathscr{I}$.*

La démonstration de ce théorème reposera sur un certain nombre de lemmes:

LEMME 1. *La représentation π_+ [resp. π_-] est irréductible sur $\mathscr{I}$.*

Démonstration. Soit V un sous-espace vectoriel fermé de $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$ stable par $\pi_+(\mathscr{I})$. Montrons que cela entraîne que $V=L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$ ou $V=\{0\}$. Soit $W=\pi_+(\mathscr{I})V$. Pour toute fonction $g\in L^1(G)$ on a:

$$\pi_+(g)W\subset W\subset V,$$

car si $w=\pi_+(f)v\in W$, alors $\pi_+(g)\pi_+(f)v=\pi_+(g*f)v\in W$.

Si $V\neq\{0\}$, alors $W\neq\{0\}$. En effet, soit $v\neq 0$, $v\in V$. Soit $\psi\in\mathscr{K}(\boldsymbol{R}_+^*)$, telle que

$$\langle v,\psi\rangle=v*\check{\psi}(1)\neq 0.\quad(\text{Convolution dans } \boldsymbol{R}_+^*.)$$

Donc $v*\check{\psi}(t)\neq 0$ quel que soit $t\in U_1$, où U_1 est un voisinage de 1 dans $\boldsymbol{R}_+^*$. Soit maintenant $\hat{\varphi}\in\mathscr{K}(\boldsymbol{R})$ telle que

$$\hat{\varphi}(t)=1\quad\text{pour tout } t\in U_1 \text{ et } \hat{\varphi}(0)=0.$$

Il en résulte que, si l'on pose $f=\Delta^{-1}\varphi\otimes\psi\in\mathscr{I}$,

$$\pi_+(f)v(t)=\hat{\varphi}(t)v*\check{\psi}(t),$$

donc $\pi_+(f)v\neq 0$ puisque $\hat{\varphi}(t)v*\check{\psi}(t)\neq 0$ sur U_1.

Comme W est invariant par la représentation π_+, et que $W\neq\{0\}$, alors le sous-espace vectoriel engendré par W est égal *à* $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$, donc $V=L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$.

Le même raisonnement est valable pour π_-.

LEMME 2. *Soit $f\in\mathscr{I}$. Alors $\mathscr{F}(f)$ est un couple d'opérateurs compacts dans l'espace de Hilbert $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$.*

Démonstration. Puisque les fonctions $\varphi\otimes\psi$, où $\psi\in\mathscr{K}(\boldsymbol{R}_+^*)$, et où $\hat{\varphi}\in\mathscr{K}(\boldsymbol{R})$ s'annule au voisinage de 0, forment un ensemble total dans $\mathscr{I}$, il suffit de montrer que $\mathscr{F}(f)$ est un couple d'opérateurs compacts, pour $f=\varphi\otimes\psi$. Nous faisons la démonstration pour $\mathscr{F}_+(f)$; le cas $\mathscr{F}_-(f)$ se traite de la même manière. Pour cela, soit (ξ_n) une suite bornée de $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$, et montrons qu'il existe une sous-suite (ξ_{n_k}) telle que $\mathscr{F}_+(f)\xi_{n_k}$ converge dans $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$. On a

$$\mathscr{F}_+(f)\xi_n(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty}e^{-2\pi ibt}\xi_n(at)\varphi(b)\psi(a)\frac{da\,db}{a^2}$$
$$=\hat{\varphi}(t)\,\xi_n*(1/a\cdot\psi)^{\vee}(t).$$

La suite (ξ_n) étant bornée, on peut extraire une sous-suite (ξ_{n_k}) qui converge faiblement dans $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$ vers $\xi\in L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$. Donc, $\xi_{n_k}*(1/a\cdot\psi)^{\vee}(t)$ converge vers $\xi*(1/a\cdot\psi)^{\vee}(t)$ pour tout $t\in\boldsymbol{R}_+^*$.

D'autre part, on a

$$|\hat{\varphi}(t)\,\xi_{n_k} * (1/a\psi)^{\check{}}(t)| \leqslant \|1/a\psi\|_2 \|\xi_{n_k}\|_2 |\hat{\varphi}(t)| \leqslant C|\hat{\varphi}(t)|.$$

Comme $\hat{\varphi} \in \mathscr{K}(\boldsymbol{R})$ et s'annule au voisinage de 0, la fonction $t > 0 \to |\hat{\varphi}(t)|^2$ appartient à $L^1(\boldsymbol{R}_+^*, dt/t)$. Donc, grâce au théorème de convergence dominée, la suite $\mathscr{F}_+(f)\,\xi_{n_k}$ converge dans $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$ vers la fonction $\mathscr{F}_+(f)\,\xi$. Autrement dit $\mathscr{F}_+(f)$ est un opérateur compact; d'où le lemme 2.

Désignons par $\mathscr{L}\mathscr{C}(L^2(\boldsymbol{R}_+^*))$ l'espace de Banach des opérateurs compacts dans $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$.

LEMME 3. *On a* $\mathscr{F}_+(PF_0) = \mathscr{F}_-(PF_0) = \mathscr{L}\mathscr{C}(L^2(\boldsymbol{R}_+^*))$.

En effet, si $T \in PF_0$, d'après le lemme 2, $\mathscr{F}_+(T)$ (resp. $\mathscr{F}_+(T)$) est un opérateur compact, car $\mathscr{I}$ est dense dans PF_0 pour la norme d'opérateurs. Donc $\mathscr{F}_+(PF_0) \subset \mathscr{L}\mathscr{C}(L^2(\boldsymbol{R}_+))$ et $\mathscr{F}_-(PF_0) \subset \mathscr{L}\mathscr{C}(L^2(\boldsymbol{R}_+^*))$. Réciproquement, puisque PF_0 est une c^*-algèbre et que, d'après le lemme 1, π_+ (resp. π_-) en est une représentation irréductible non nulle, il en résulte, d'après Dixmier [3], 4.1.11, que $\mathscr{F}({}_+PF_0) = \mathscr{L}\mathscr{C}$ (resp. $\mathscr{F}_-(PF_0) = \mathscr{L}\mathscr{C}$).

LEMME 4. *Tout* $T \in PF_0$ *s'écrit sous la forme* $T = T_1 + T_2$, *où* T_1 *et* T_2 *sont dans* PF_0, *et telles que* $\mathscr{F}_-(T_1) = \mathscr{F}_+(T_2) = 0$.

Démonstration. Soit $\mathscr{S}_0(G)$ le sous-espace vectoriel, dense [1] dans $\mathscr{I}$, engendré par les fonctions $\varphi \otimes \psi$, où ψ est dans $\mathscr{D}(\boldsymbol{R}_+^*)$, et où $\hat{\varphi} \in \mathscr{D}(\boldsymbol{R})$ est nulle au voisinage de 0. Soit $\mathscr{S}_0^{\pm}(G)$ le sous-espace vectoriel engendré par les fonctions $\varphi \otimes \psi$, où de plus, le support de $\hat{\varphi}$ est contenu dans ${}^{\pm}\boldsymbol{R}_+^*$. Sur la définition de $\mathscr{F}_+$ et $\mathscr{F}_-$, on voit immédiatement que, si $f \in \mathscr{S}_0^+$, on a $\mathscr{F}_-(f) = 0$, et si $f \in \mathscr{S}_0^-$, on a $\mathscr{F}_+(f) = 0$. De plus, toute fonction $f \in \mathscr{S}_0(G)$ se décompose de façon évidente sous la forme

$$f = f_1 + f_2, \quad \text{où } f_1 \in \mathscr{S}_0^+ \text{ et } f_2 \in \mathscr{S}_0^-.$$

Il suffit, pour cela, dans chaque $\varphi \otimes \psi$ définissant f d'écrire

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \text{où} \quad \hat{\varphi}_1 = \hat{\varphi}\chi_{\boldsymbol{R}_+^*}.$$

Soit maintenant $T \in PF_0$, et soit $f_n \in \mathscr{S}_0$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - T\|_{CV_2} = 0.$$

Posons $f_n = f_n^1 + f_n^2$, où $f_n^1 \in \mathscr{S}_0^+$ et $f_n^2 \in \mathscr{S}_0^-$. On a

$$\begin{aligned}\|f_n^1\|_{CV_2} &= \operatorname{Max}[|||\mathscr{F}_+(f_n^1)|||_\infty, |||\mathscr{F}_-(f_n^1)|||_\infty] \\ &= |||\mathscr{F}_+(f_n^1)|||_\infty = |||\mathscr{F}_+(f_n)|||_\infty \leqslant \|f_n\|_{CV_2}.\end{aligned}$$

---

[1] Car si $g \in L^1(\boldsymbol{R})$, $\hat{g}(0) = 0$, et si $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in \mathscr{S}(\boldsymbol{R})$ et $\delta > 0$ tels que $\|g - \varphi\|_{L^1} \leqslant \varepsilon$, $\hat{\varphi}(t) = \hat{g}(0)$ pour $|t| < \delta$, $\hat{\varphi}(t) = 0$ pour $|t| > 1/\delta$.

Donc f_n^1 converge en norme CV_2 vers $T_1 \in PF_0$ et, comme $\mathscr{F}_-(f_n^1) = 0$, $\mathscr{F}_-(T_1) = 0$. De même f_n^2 converge en norme CV_2 vers $T_2 \in PF_0$, et $\mathscr{F}_+(T_2) = 0$. De plus, on a $T = T_1 + T_2$. En effet,

$$\|T - T_1 - T_2\|_{CV_2} \leqslant \|T - f_n\|_{CV_2} + \|T_1 - f_n^1\|_{CV_2} + \|T_2 - f_n^2\|_{CV_2},$$

et les termes du membre de droite tendent vers 0 lorsque $n \to \infty$.

Démonstration du théorème 6:

iii) $\Rightarrow$ i) résulte immédiatement du lemme 2. Montrons que i) $\Rightarrow$ iii). Soit $\mathscr{F}(T) = (S_+, S_-)$ un couple d'opérateurs compacts. Il nous faut montrer que $T \in PF_0$. Les opérateurs S_+ et S_- étant compacts, il existe, d'après le lemme 3, $U \in PF_0$ et $V \in PF_0$ tels qué $\mathscr{F}_+(U) = S_+$ et $\mathscr{F}_-(V) = S_-$. D'après le lemme 4, U et V s'écrivent sous la forme

$$U = U_1 + U_2, \quad U_1 \text{ et } U_2 \in PF_0 \text{ et tels que } \mathscr{F}_+(U) = \mathscr{F}_+(U_1) \text{ et } \mathscr{F}_-(U_1) = 0,$$

$$V = V_1 + V_2, \quad V_1 \text{ et } V_2 \in PF_0 \text{ et tels que } \mathscr{F}_-(V) = \mathscr{F}_-(V_2) \text{ et } \mathscr{F}_+(V_2) = 0.$$

Soit $T' = U_1 + V_2 \in PF_0$. On a

$$\mathscr{F}_+(T') = \mathscr{F}_+(U_1) = \mathscr{F}_+(U) = S_+,$$
$$\mathscr{F}_-(T') = \mathscr{F}_-(V_2) = \mathscr{F}_-(V) = S_-,$$

donc $\mathscr{F}(T') = \mathscr{F}(T)$, d'où $T = T' \in PF_0$ vu que $\mathscr{F}$ est injective.

iii) $\Rightarrow$ ii). En effet, si T est limite en norme CV_2 de fonctions $f_j \in \mathscr{I}$, il en résulte que $\sigma(f_j)$ converge en norme vers $\dot{\sigma}(T)$. Or $\sigma(f_j) = 0$, donc $\dot{\sigma}(T) = 0$.

ii) $\Rightarrow$ iii). Soit T une pseudo-fonction telle que $\dot{\sigma}(T) = 0$. Si T n'appartenait pas à PF_0, il existerait, d'après le théorème de Hahn–Banach, une fonction $v \in B(G)$ telle que

$$\langle T, v\rangle \neq 0 \quad \text{et} \quad \langle S, v\rangle = 0 \quad \text{pour tout } S \in PF_0.$$

On va montrer que la fonction $v(b, a)$ ne dépend que de a, c'est-à-dire que $v = u \circ j$, où $u \in \boldsymbol{B}(\boldsymbol{R}_+^*)$ et $j(b, a) = a$, ce qui entraînera une contradiction, car d'après la définition de $\dot{\sigma}(T)$, on aura

$$\langle \sigma(T), u\rangle = \langle T, u \circ j\rangle = \langle T, v\rangle = 0.$$

Comme l'ensemble des fonctions $g - {}_{b_0}g$, où $g \in L^1(G)$, et $b_0 \in N$, appartient à $\mathscr{I}$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\langle v, g - {}_{b_0}g\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty} v(b, a)[g(b, a) - g(b + b_0, a)]\frac{da\,db}{a^2} = 0 \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty} g(b, a)[u(b, a) - u(b - b_0, a)]\frac{da}{a^2}\,db,\end{aligned}$$

donc $u(b, a) = u(b-b_0, a)$. Ainsi $u(b, a)$ ne dépend que de la variable a, et cela achève la démonstration du théorème 6.

COROLLAIRE. *Soit $f \in L^1(G)$. Les opérateurs $\pi_+(f)$ et $\pi_-(f)$ sont compacts si et seulement si $f \in \mathscr{I}$.*

Cela découle du théorème 6 et du fait que $PF_0 \cap L^1 = \mathscr{I}$.

APPLICATION. *Le groupe affine de la droite n'est pas liminaire.*

En effet, si $f \in L^1$ et $f \notin \mathscr{I}$, alors $\pi_+(f)$ n'est pas compact.

PROPOSITION 3. *L'espace de Banach dual de PF_0 s'identifie à l'algèbre de Fourier $A(G)$, par l'accouplement $\langle T, u\rangle$ de dualité entre $A(G)$ et $CV_2(G)$, c'est-à-dire celui qui prolonge l'accouplement $\langle f, u\rangle = \int_G f(x)u(x)dx$ entre $A(G)$ et $L^1(G)$.*

Démonstration. Observons d'abord que le dual de $L\mathscr{C}(\pm)$ est $L^1(\pm)$, car, d'après J. Dixmier [9], p. 389, le dual de $\mathscr{L}\mathscr{C}$ est l'espace des opérateurs nucléaires $\mathscr{L}_1$. Ici $L\mathscr{C}(\pm)$ est le sous-espace de Banach de $L^\infty(\pm)$ des couples d'opérateurs compacts de l'espace de Hilbert $L^2(\boldsymbol{R}_+^*)$, et $\mathscr{F}(PF_0) = L\mathscr{C}(\pm)$ d'après le lemme 3 et le théorème 6. De plus la transformation de Fourier $\mathscr{F}: PF_0 \to L\mathscr{C}(\pm)$ est un isomorphisme isométrique. D'autre part, on a vu au § 5 que l'application $\overline{\mathscr{F}}: L^1(\pm) \to A(G)$ est un isomorphisme isométrique dont la transposée est l'opérateur de Fourier $\mathscr{F}: CV_2(G) \to L^\infty(\pm)$. De sorte que, si l'on pose $M = (\overline{\mathscr{F}})^{-1}$, l'application $N = {}^t\mathscr{F} \circ M$ est un isomorphisme isométrique de $A(G)$ sur $(PF_0)'$. En outre, on a $N(u) = u$ pour tout $u \in A(G)$, car

$$\langle N(u), T\rangle = \langle {}^t\mathscr{F} \circ M(u), T\rangle = [M(u), \mathscr{F}(T)] = \langle T, u\rangle,$$

$[M(u), \mathscr{F}(T)]$ étant le crochet de dualité entre $L^1(\pm)$ et $L\mathscr{C}(\pm)$. C.Q.F.D.

THÉORÈME 7. *On a la décomposition $B(G) = A(G) \oplus B_s(G)$, où $B_s(G)$ est l'espace de Banach des fonctions $u \circ j$, où u varie dans $B(\boldsymbol{R}_+^*)$, et $j(b, a) = a$.*

Démonstration. L'espace PF_0 est l'adhérence en norme $CV_2(G)$ des fonctions $g - {}_bg$, où $g \in L^1(G)$ et $b \in \boldsymbol{R}$. Par conséquent, dans la dualité entre PF et $B(G)$, l'orthogonal de PF_0 est l'ensemble des fonctions $u \in B(G)$ telles que, pour toute $g \in L^1(G)$, et pour tout $b_0 \in \boldsymbol{R}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty} [g(b, a) - g(b+b_0, a)]u(b, a)\frac{da\,db}{a^2}$$

$$= \int_{\infty}^{+\infty}\int_0^{+\infty} g(b, a)[u(b, a) - u(b-b_0, a)]\frac{da\,db}{a^2} = 0.$$

Ainsi $(PF_0)^\perp = B_s(G) =$ l'ensemble des $u(b, a)$ appartenant à $B(G)$ qui ne dépendent que de la variable a.

Soit alors $u \in B(G)$; elle définit une forme linéaire continue sur PF, donc, par restriction, sur PF_0; d'après la proposition 3, cette restriction à PF_0 provient d'une fonction $v \in A(G)$, telle que, pour tout $T \in PF_0$,

$$\langle T, v\rangle = \langle T, u\rangle.$$

Posons $w = u - v$; la forme linéaire définie par w sur PF est orthogonale à PF_0, donc appartient à B_s, ce qui prouve que $B(G) = A(G) + B_s(G)$. Mais $A(G) \cap B_s(G) = \{0\}$, car les fonctions de $A(G)$ tendent vers 0 à l'infini. Donc la somme est directe.

Comme conséquence de ce théorème, citons une caractérisation simple et curieuse des fonctions de $A(G)$ parmi celles de $B(G)$. De façon précise:

COROLLAIRE. *On a $A(G) = B(G) \cap \mathscr{C}_0(G)$.*

En effet, soit u une fonction dans $B(G) \cap \mathscr{C}_0(G)$, et soit $u = u_a + u_s$ sa décomposition de Lebesgue, où $u_a \in A(G)$ et $u_s \in B_s(G)$.

On a $u_s = 0$, car pour chaque $a \in \boldsymbol{R}_+^*$ on a $u_s(b, a) = u_s(0, a)$ quel que soit b, et $\lim_{b\to\infty} u_s(b, a) = 0$.

Remarque 1. Restreignons au sous-groupe N des translations la décomposition $B(G) = A(G) \oplus B_s(G)$. Nous obtenons le fait remarquable, déjà signalé par V. Flory [1] que les restrictions à N des fonctions de $B(G)$ sont réduites aux fonctions de $A(N)$ plus les constantes; ceci précise notablement le contre-exemple de Douady (cf. P. Eymard [9]) sur l'impossibilité d'étendre un caractère non trivial du groupe N en une fonction de $B(G)$.

Remarque 2. Si Γ est un groupe abélien localement compact, et si G est son groupe dual, la classique décomposition de Lebesgue $M^1(\Gamma) = L^1(\Gamma) \oplus M_s^1(\Gamma)$ des mesures bornées sur Γ en mesures absolument continues et mesures singulières donne lieu par transformation de Fourier à une décomposition

$$B(G) = A(G) \oplus B_s(G),$$

dont notre théorème 7 fournit, dans le cas du groupe G des transformations $x \mapsto ax+b$, un analogue non abélien. Ce qui est remarquable ici, c'est que la partie „singulière" $B_s(G)$ est une *algèbre*, alors que dans le cas abélien il a été démontré (cf. R. Salem [22], J.-P. Kahane [18], Hewitt et Zuckermann [16]) qu'il existe des mesures singulières μ dont le carré de convolution $\mu * \mu$ est absolument continu. En un certain sens, la situation ici est donc beaucoup plus simple, d'autant plus que les fonctions u „singulières" sont ici caractérisées par la condition élémentaire d'être constantes sur les classes de G modulo N.

V. Flory [14] d'une part, et G. Arsac d'autre part, ont donné en général des descriptions de la décomposition de Lebesgue de $B(G)$, le premier par des critères analogues à ceux de R. Doss dans le cas abélien (cf. V. Flory [14]), le second en utilisant la notion de représentation disjointes de la représentation régulière. Il serait facile de voir que notre décomposition de Lebesgue coïncide avec la leur, quoique le principe de notre démonstration en soit tout à fait différent. Faisons-le pour la caractérisation de Doss-Flory: il suffit de montrer que, si $u \in B_s(G) = B(\boldsymbol{R}_+^*)$, i.e. si $u \in B(G)$ ne dépend que de la variable a, alors, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout compact Q de G, il existe des g_n en nombre fini dans G-Q et des $c_n \in \boldsymbol{C}$ tels que:

$$\Big\| \sum c_n \varepsilon_{g_n} \Big\|_{CV_2} \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \Big| \sum c_n u(g_n) \Big| \geqslant \|u\|_{B(G)} - \varepsilon.$$

L'isomorphisme canonique entre $B_s(G)$ et $B(\boldsymbol{R}_+^*)$ est en fait une isométrie (cf. P. Eymard [9], (2.26)). Donc, par définition de la norme de u dans $B(\boldsymbol{R}_+^*)$, il existe des $a_n \in \boldsymbol{R}_+^*$ et des $c_n \in \boldsymbol{C}$ en nombre fini, tels que les deux inégalités ci-dessus soient vérifiées avec $g_n = (0, a_n)$. Mais ces g_n pourraient être dans Q; il suffit de les remplacer par des (b, a_n), où $|b|$ est suffisamment grand, pour que les (b, a_n) ne soient plus dans Q, ce qui ne change pas les deux inégalités désirées.

Remarque 3. Dans le cas du groupe des transformations $x \mapsto ax + b$, nous montrons très simplement un analogue du „lemme des translatées" de Helson (cf. W. Rudin [21], 3.5.1.).

Proposition 4. *Soit u une fonction de $B(G)$, et soit (x_n) une suite dans G telle que $\lim\limits_n x_n = \infty$. Soit $u_1 \in B(G)$ telle que la suite $({}_{x_n}u)$ converge simplement (resp. faiblement pour $\sigma(B, PF)$) vers u_1. Alors $u_1 \in B_s(G)$.*

Démonstration. Soit $u = v + w$ la décomposition de u, où $v \in A(G)$ et $w \in B_s(G)$.

On a ${}_{x_n}u = {}_{x_n}v + {}_{x_n}w$. (On remarque que $B_s(G)$ est stable par translation.) Comme $v \in A(G)$, donc tend vers zéro à l'infini, on voit que ${}_{x_n}v$ converge simplement (resp. faiblement, car $\langle f, {}_{x_n}v \rangle = f * v(x_n)$ et $f * \in A(G)$) vers 0 quand n tend vers l'infini. Ainsi u_1 est limite simple (resp. faible) des ${}_{x_n}w$. Le fait que ${}_{x_n}w$ ne dépend pas de b passe immédiatement à la limite simple, donc $u_1 \in B_s(G)$ dans ce cas. En ce qui concerne la limite faible, c'est très facile aussi, car quelle que soit $f \in L^1(G)$, et quel que soit $b \in \boldsymbol{R}$, si $x_n = (b_n, a_n)$

$$\langle f, {}_{x_n}w \rangle = \langle f, {}_{a_n}w \rangle = \langle f, {}_{ba_n}w \rangle$$
$$= \langle {}_b f, {}_{a_n}w \rangle = \langle {}_b f, {}_{x_n}w \rangle$$

tend, lorsque $n \to +\infty$, d'une part vers $\langle f, u_1 \rangle$, d'autre part vers $\langle f, {}_b u_1 \rangle$. Ainsi $u_1 = {}_b u_1$, donc $u_1 \in B_s(G)$.

Bibliographie

[1] G. Arsac, *Sur un espace fonctionnel associé à une représentation unitaire d'un groupe localement compact*, C. R. Acad. Sci., série A, 273 (1971), pp. 298–300.

[2] N. Bourbaki, *Intégration*, chap. 1, 2, 3, 4 (Act. SC. Ind., n° 1175, Paris 1965).

[3] — *Espaces vectoriels topologiques*, chap. 3, 4, 5 (Act. SC. Ind., n° 1229, Paris 1955).

[4] J. Dixmier, *Les fonctionnels linéaires sur l'ensemble des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert*, Ann. of Math. 51, n° 2 (1950), pp. 387–408.

[5] — *Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs*, Bull. Soc. Math. France 81 (1953), pp. 9–39.

[6] — *Les C*-algèbres et leurs représentations*, Paris 1969.

[7] — *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien* (Algèbres de Von Neumann), Paris 1969.

[8] R. Doss, *On the transforms of a singular or absolutely continuous measure*, Proc. Amer. Math. Soc. 19 (1968), pp. 361–363.

[9] P. Eymard, *L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact*, Bull. Soc. Math. France 92 (1964), pp. 181–263.

[10] — *Algèbres A_p et convoluteurs de L^p*, Séminaire Bourbaki, 22ᵉ Année, 1969/1970, n° 367.

[11] — *Moyennes invariantes et représentations unitaires*, 1972.

[12] J. M. G. Fell, *Weak containment and induced representations of groups*, Canad. J. Math. (1962), pp. 237–268.

[13] A. Figa-Talamanca, *Translation invariant operators on L^p*, Duke J. 32 (1965), pp. 495–501.

[14] V. Flory, *Eine Lebesgue-Zerlegung und funktorielle Eigenschaften der Fourier-Stieltjes-Algebra*, Inaugural-Dissertation, Heidelberg 1972.

[15] I. M. Gelfand et M. A. Naimark, *Unitary representations of the group of linear transformations of the Straight line*, Comptes Rendus (Doklady) de l'académie des Scientes de l'U. R. S. S. 7 (1947), pp. 567–570.

[16] E. Hewitt et H. S. Zuckermann, *Singular measures with absolutely continuous convolution squares*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 62 (1966), pp. 399–420.

[17] J. P. Kahane, *Séries de Fourier absolument convergentes*, Berlin 1970.

[18] — *Sur certains ensembles de Salem*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 21 (1–2) (1970), pp. 87–89.

[19] A. Kleppner et R. Lipsman, *The Plancherel Formula for group extensions*, Ann. Sci. Ecol. Norm. 3 4ᵉ série, 5 (1972), pp. 459–516.

[20] E. Nelson and W. F. Stinespring, *Representation of elliptic operators in an enveloping algebra*, Amer. J. Math. 81 (1959), pp. 547–560.

[21] W. Rudin, *Fourier Analysis on groups*, New York 1962.

[22] R. Salem, *On singular monotonic functions whose spectrum has a given Hausdorff dimension*, Arkiv för Math. 1 (1951), pp. 353–365.

[23] R. Spector, *Sur la structure locale des groupes abéliens*, Bull. Soc. Math. France, mémoire n° 24.

[24] N. Ja. Vilenkin, *Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groups*, Paris 1969.

Received July 4, 1973 (700)