the trivial multiplication on $\mathscr{B}_1$, i.e. if $x, y \in \mathscr{B}_1$, then let $xy = 0$. It is immediate that $\mathscr{B}$ has the required properties.

Our final result, which extends Theorem 2 and Corollary 2 of the present note and [4], Theorem 4.1, can be proved by sticking together in a slightly more sophisticated way a large set of algebras constructed in the proof of Theorem 2. The detailed proof is left to the reader.

COROLLARY 3. *Let T be an arbitrary index set and let A_t $(A_t \geqslant 1)$, $t \in T$, be real numbers. Then there is an algebra $\mathscr{A}$, containing norm-increasing elements $a_t, |a_t| = A_t, t \in T$, having the following property.*

If B_t $(\geqslant 1)$, $t \in S \subset T$, are real numbers, then there exists an extension $\mathscr{B}$ of $\mathscr{A}$, $a_t^{-1} \in \mathscr{B}$, $|a_t^{-1}| \leqslant B_t$, $t \in S$, if and only if $\sum_{\substack{t \in S \\ A_t > 1}} \frac{\log A_t}{\log A_t B_t} \leqslant 1$.

References

[1] Richard Arens, *Linear topological division algebras*, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), pp. 623–630.
[2] — *Inverse-producing extensions of normed algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 88 (1958), pp. 536–548.
[3] — and Kenneth Hoffman, *An algebraic extension of normed algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 7 (1956), pp. 203–210.
[4] B. Bollobás, *Adjoining inverses to Banach algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 181 (1973), pp. 165–174.
[5] — *Normally subregular systems in normed algebras*, Studia Math. 49 (1974), pp. 263–266.
[6] Charles E. Rickart, *The singular elements of a Banach algebra*, Duke Math. J. 14 (1947), pp. 1063–1077.
[7] G. E. Shilov, *On normed rings with one generator*, Mat. Sbornik 21 (63), (1947), pp. 25–46.
[8] W. Żelazko, *On a certain class of non-removable ideals in Banach algebras*, Studia Math. 44 (1972), pp. 87–92.

UNIVERSITY OF CAMBRIDGE
ENGLAND

Received April 9, 1973 (668)

STUDIA MATHEMATICA, T. LI. (1974)

Некоторые вопросы спектральной теории симметризуемых операторов в локально выпуклых пространствах

Ю. Ш. АБРАМОВ, Д. Ф. ХАРАЗОВ (Ленинград)

Резюме. В работе изучаются свойства резольвенты и спектра некоторых линейных операторов в локально выпуклых пространствах и устанавливается справедливость теории Гильберта–Шмидта для симметризуемых операторов в таких пространствах.

Как известно, теория Фредгольма для линейных операторов в банаховом пространстве, построенная Ф. Риссом, была установлена Ж. Лере [1] для случая локально выпуклого пространства. Построенная Гильбертом и Шмидтом спектральная теория симметричных компактных операторов была обобщена на случай компактных операторов (в гильбертовом пространстве), симметризуемых ограниченным оператором, А. Зааненом [2] и В. Ридом [3], а на случай симметризуемых, вообще говоря, неограниченных операторов с дискретным спектром в предгильбертовых и банаховых пространствах — одним из авторов [4]-[7].

В настоящей работе устанавливается справедливость теории Гильберта-Шмидта для некоторых классов симметризуемых операторов в локально выпуклых пространствах. Эти классы, в частности, содержат симметризуемые компактные операторы и операторы, некоторая итерация которых компактна, а в случае нормированного пространства совпадают с ранее изученными в [5] и [7].

Для доказательства основных результатов мы устанавливаем ниже свойство голоморфности резольвенты некоторых линейных операторов в произвольных локально выпуклых пространствах. Насколько нам известно, впервые свойство голоморфности резольвенты супернепрерывного оператора (определение супернепрерывного оператора см. ниже) в счётно полном локально выпуклом пространстве доказал Х. Шефер [10] (см. также [11]). Это свойство для компактного оператора в произвольном локально выпуклом пространстве доказано в [12].

1. Некоторые определения и обозначения. В настоящее время в теории локально выпуклых пространств ещё нет согласованной терминологии, в связи с чем мы приведём определения, которых будем придерживаться в дальнейшем.

Пусть X — линейное отделимое локальное выпуклое пространство, топология которого определяется системой полунорм $\{p\}$, которую, не ограничивая общности, будем считать фильтрующейся, т. е. для любых $p_1, \ldots, p_n \in \{p\}$ существуют $p \in \{p\}$ и $c > 0$ такие, что

$$\max\{p_1(x), \ldots, p_n(x)\} \leqslant cp(x), \quad x \in X.$$

Через $\mathscr{F}$ будем обозначать совокупность всех ограниченных в X множеств. Линейный оператор A (аддитивный и однородный) будем называть *ограниченным*, если $A(F) \in \mathscr{F}$, при любом $F \in \mathscr{F}$. Через $\mathscr{L}(X)$ обозначим множество линейных непрерывных операторов в X. Как известно (см., например, [8]) $A \in \mathscr{L}(X)$, если для любой полунормы $p \in \{p\}$ существует $p_0 \in \{p\}$ (зависящая от p) и $c_p > 0$ такие, что

$$(*) \qquad p(Ax) \leqslant c_p p_0(x), \quad x \in X.$$

Если в условии $(*)$ полунорма p_0 не зависит от выбора p, то оператор A назовём *супернепрерывным*. Через $\mathscr{L}_0(X)$ обозначим множество всех супернепрерывных операторов в X. В терминах окрестностей условие $A \in \mathscr{L}_0(X)$ эквивалентно существованию окрестности нуля U такой, что $A(U) \in \mathscr{F}$. Справедливы следующие свойства:

1° если $A_i \in \mathscr{L}_0(X)$, $i = 1, 2$, то $\alpha A_1 + \beta A_2 \in \mathscr{L}_0(X)$,

2° если $B \in \mathscr{L}(X)$, $A \in \mathscr{L}_0(X)$, то AB, $BA \in \mathscr{L}_0(X)$,

3° $\mathscr{L}_0(X) \subseteq \mathscr{L}(X)$; если X — нормированное пространство, то $\mathscr{L}_0(X) = \mathscr{L}(X)$,

4° если A — компактный оператор в X, то $A \in \mathscr{L}_0(X)$.

В дальнейшем будем считать, что $\mathscr{L}(X)$ снабжено топологией равномерной сходимости на ограниченных множествах, т. е. $\mathscr{L}(X)$ — локально выпуклое пространство, определяемое системой полунорм $\{p_B\}_{B \in \mathscr{F}}$, где

$$p_B(A) = \sup_{x \in B} p(Ax), \quad B \in \mathscr{F}, \ A \in \mathscr{L}(X).$$

Пусть G — область комплексной плоскости и функция $f\colon G \to \mathscr{L}(X)$. Функцию f будем называть *голоморфной в точке* $\lambda_0 \in G$, если существует предел

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\lambda_0 + h) - f(\lambda_0)}{h}$$

в смысле сходимости в $\mathscr{L}(X)$.

Пусть C — множество комплексных, а R — множество вещественных чисел. *Резольвентным множеством* линейного оператора $A\colon X \to X$ назовём множество

$$\varrho \equiv \varrho(A) = \{\lambda \in C\colon \text{существует } (I - \lambda A)^{-1} \in \mathscr{L}(X)\}.$$

Спектром A назовем множество $\sigma \equiv \sigma(A) = C \setminus \varrho(A)$. Отметим, что для случая линейного нормированного пространства наше определение σ и ϱ совпадает с определением Ж. Дьедонне [9]. Через X' мы будем обозначать двойственное к X пространство линейных непрерывных в X функционалов x'. Билинейную форму $x'(x)$ будем обозначать через (x, x'), а умножение на скаляр в X' определим следующим образом $(x, \lambda x') = \bar{\lambda}(x, x')$.

2. Некоторые свойства резольвенты. Как нетрудно видеть для резольвенты $R_\lambda = (I - \lambda A)^{-1}$ справедливы тождества

$$(1) \qquad R_\lambda - R_{\lambda_0} = (\lambda - \lambda_0) R_\lambda A R_{\lambda_0}, \quad \lambda, \lambda_0 \in \varrho,$$

$$(2) \qquad AR_\lambda = \lambda^{-1}(R_\lambda - I), \quad \lambda \in \varrho \setminus \{0\}.$$

Введём следующее условие:

$$(3) \qquad AR_\lambda \in \mathscr{L}_0(X), \quad \lambda \in \varrho \setminus \{0\}.$$

Отметим, что условие (3) выполняется, если оно выполняется лишь для одного $\lambda_0 \in \varrho \setminus \{0\}$, что следует из (1) и (2) и свойств супернепрерывных операторов 1°–3°. Если же X — нормированное пространство, то условие (3), в силу (2) и свойства 3°, выполняется для любого линейного оператора в X. Заметим также, что (3) выполнено, если $A \in \mathscr{L}_0(X)$.

Положим $L_\lambda = I - \lambda A$, тогда

$$(4) \qquad V_\lambda \equiv R_{\lambda_0} L_\lambda = I - (\lambda - \lambda_0) AR_{\lambda_0}, \quad \lambda_0, \lambda \in \varrho.$$

В силу (3) существует полунорма $p_0 \in \{p\}$ такая, что для любой $p \in \{p\}$ найдётся $c_p > 0$ со свойством

$$(5) \qquad p(AR_{\lambda_0} x) \leqslant c_p p_0(x), \quad x \in X.$$

Положим

$$G_{\lambda_0} = \{\lambda\colon |\lambda - \lambda_0| < 1/c_{p_0}\}, \quad G_{\lambda_0}(\delta) = \{\lambda\colon |\lambda - \lambda_0| \leqslant \delta\},$$

где c_{p_0} соответствует $p = p_0$ в (5), а $\delta < 1/c_{p_0}$.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие* (3) *и* $\lambda_0 \in \varrho \setminus \{0\}$. *Тогда для* $\lambda \in G_{\lambda_0}$ *справедливо неравенство*

$$(6) \qquad p(x) \leqslant p(V_\lambda x) + \frac{c_p |\lambda - \lambda_0|}{1 - c_{p_0} |\lambda - \lambda_0|} p_0(V_\lambda x).$$

Доказательство. Из (4) имеем $x = V_\lambda x + (\lambda - \lambda_0) AR_{\lambda_0} x$. Отсюда, в силу (5),

$$(7) \qquad p(x) \leqslant p(V_\lambda x) + c_p |\lambda - \lambda_0| p_0(x).$$

Из этого, для $p=p_0$ получим

$$(8)\qquad p_0(x)\leqslant\frac{1}{1-c_{p_0}|\lambda-\lambda_0|}\,p_0(V_\lambda x).$$

Из неравенств (7) и (8) следует (6).

Символом $p\sigma$ будем обозначать множество собственных значений оператора A: $\lambda\in p\sigma$, если существует $x\in X\setminus\{0\}$ такой, что

$$x-\lambda Ax=0.$$

Введём следующее условие:

$$(9)\qquad \text{если } \lambda\notin p\sigma, \text{ то } L(X)=X.$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* (3) *и* (9). *Тогда, если* $\lambda_0\in\varrho\setminus\{0\}$, *то* $G_{\lambda_0}\subset\varrho$.

Доказательство. Пусть $\lambda\in G_{\lambda_0}$. Так как $0\in\varrho$, лемму достаточно доказать для $\lambda\neq0$. Если $L_\lambda x=0$, то $V_\lambda x=R_{\lambda_0}L_\lambda x=0$. Тогда из (6) $p(x)=0$ для любой полунормы $p\in\{p\}$. Поэтому, так как X — отделимо, то $x=0$, т. е. $\lambda\notin p\sigma$. Из условия (9) следует существование L_λ^{-1}, определённого на всём X. Тем самым, в силу (4) существует также V_λ^{-1} на X и

$$(10)\qquad L_\lambda^{-1}=V_\lambda^{-1}R_{\lambda_0}.$$

Пусть $f\in X$ и $x=V_\lambda^{-1}f$. В силу неравенства (6) и фильтрации полунорм $\{p\}$, существуют константа $c>0$ и полунорма $q\in\{p\}$ такие, что

$$(11)\qquad p(V_\lambda^{-1}f)\leqslant c\left(1+\frac{c_p|\lambda-\lambda_0|}{1-c_{p_0}|\lambda-\lambda_0|}\right)q(f).$$

Таким образом, $V_\lambda^{-1}\in\mathscr{L}(X)$ и в силу (10) $\lambda\in\varrho$.

Лемма 3. *Пусть выполнены условия* (3) *и* (9). *Если* $\lambda_0\in\varrho\setminus\{0\}$, *то для* $\delta<1/c_{p_0}$ *множество операторов* $\{R_\lambda\colon \lambda\in G_{\lambda_0}(\delta)\}$ *ограничено в пространстве* $\mathscr{L}(X)$.

Доказательство. Пусть $p_B\in\{p_B\}_{B\in\mathscr{F}}$. Тогда из неравенства (11) имеем

$$p_B(V_\lambda^{-1})\leqslant c\left(1+\frac{c_p\delta}{1-c_{p_0}\delta}\right)\sup_{f\in B}q(f),\qquad \lambda\in G_{\lambda_0}(\delta).$$

Так как любая полунорма p_B из $\{p_B\}_{B\in\mathscr{F}}$ ограничена на множестве $\{V_\lambda^{-1}\colon \lambda\in G_{\lambda_0}(\delta)\}$, то оно ограничено. Отсюда и из равенства (10) следует справедливость леммы 3.

Теорема 1. *Пусть X — отделимое локально выпуклое пространство и оператор* $A\colon X\to X$ *обладает свойством* (3) *и* (9). *Тогда* $\varrho\setminus\{0\}$ — *открытое множество в* C *и резольвента* R_λ — *голоморфна на* $\varrho\setminus\{0\}$.

Доказательство. Открытость множества $\varrho\setminus\{0\}$ следует из леммы 2. Непрерывность резольвенты следует из леммы 3 и тождеств (1) и (2). В силу непрерывности R_λ и тождества (1) получается голоморфность R_λ и равенство

$$(12)\qquad R'_\lambda=R_\lambda AR_\lambda,\qquad \lambda\in\varrho\setminus\{0\},$$

что и завершает доказательство теоремы 1.

Замечание. Если свойство (9) выполняется только для вещественных λ, то так же, как в теореме 1, доказывается, что множество $(\varrho\cap R)\setminus\{0\}$ — открыто и резольвента R_λ (как функция вещественного λ) дифференцируема на указанном множестве.

Аналогично доказывается следующая

Теорема 2. *Если выполнено условие* (3) *и интервал* $(\alpha,\beta)\subset\varrho\setminus\{0\}$, *то* R_λ — *дифференцируема на* (α,β) *и её производная вычисляется по формуле* (12).

3. Некоторые свойства симметризуемых операторов в линейных пространствах. В этом параграфе мы считаем X произвольным линейным пространством. Рассмотрим линейный оператор $A\colon X\to X$.

Пусть существует линейный оператор $H\colon X\to X$ такой, что

1) $(x,Hy)=\overline{(y,Hx)}$, $(x,HAy)=\overline{(y,HAx)}$, $x,y\in X$,

2) $(x,Hx)\geqslant0$, $x\in X$,

3) $HA\neq0$,

4) $(x,Hx)\neq0$, если $x\neq0$ собственный элемент A.

Если для A выполнено условие 1), будем говорить, что A симметризуется оператором H.

Рассмотрим формы

$$[x,y]=(x,HAy),\qquad [x,y]_0=(x,Hy),\qquad x,y\in X$$

и введём обозначения

$$a_-=\{x:[x,x]<0\},\qquad a_0=\{x:[x,x]=0\},\qquad a_+=\{x:[x,x]>0\},$$
$$h_0=\{x:[x,x]_0=0\},\qquad h_+=\{x:[x,x]_0>0\}.$$

Введём также „функционал Релея”

$$p(x)=\frac{[x,x]_0}{[x,x]},\qquad x\notin a_0.$$

Если M и N — подмножества X, то запись $M\perp N$ будет означать, что $[x,y]_0=0$ для всех $x\in M$, $y\in N$. Положим также $E^\perp=\{x\colon x\perp E\}$ и через $\mathscr{P}_\lambda$ обозначим собственное подпространство соответствующее $\lambda\in p\sigma$.

Отметим некоторые легко проверяемые предложения, нужные нам в дальнейшем

1° $a_+\cup a_-\neq\emptyset$.

Это есть непосредственное следствие условия 3).

2° $a_+\cup a_-\subset h_+$.

Действительно, если $x \in a_+ \cup a_-$ и $[x, x]_0 = 0$, тогда из неравенства Шварца $[x, y]_0^2 \leqslant [x, x]_0 [y, y]_0$ следует, что $[x, y]_0 = 0$, $y \in X$. Воспользовавшись отделимостью X, имеем $Hx = 0$ и тем самым $[x, x] = (Ax, Hx) = 0$, что не имеет места.

3° Если $\lambda \in p\sigma$, $x \in \mathscr{P}_\lambda$, $x \neq 0$, то λ — вещественно, а $p(x) = \lambda$.

4° Если $\lambda, \mu \in p\sigma$, $\lambda \neq \mu$, то $\mathscr{P}_\lambda \perp \mathscr{P}_\mu$.

5° Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in p\sigma$, то собственные вектора $x_1, \ldots, x_n$ можно выбрать так, что $[x_i, x_j]_0 = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Пусть $\{\nu_n\}$ и $\{\mu_n\}$ — отрицательные и положительные собственные значения оператора A:

$$\ldots \leqslant \nu_n \leqslant \ldots \leqslant \nu_1 < 0 < \mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n \leqslant \ldots,$$

повторенные столько раз, какова их кратность и $\{z_n\}$, $\{y_n\}$ — соответствующие им собственные элементы, ортонормированные в смысле 5°. Рассмотрим следующие подпространства

$$Y_n = [y_1, \ldots, y_n], \quad E^n = Y_n^\perp, \quad Z_n = [z_1, \ldots, z_n], \quad F_n = Z_n^\perp, \quad n \geqslant 1,$$

где $[v_1, \ldots, v_n]$ — линейная оболочка, натянутая на элементы $v_1, \ldots, v_n$, и для удобства положим

$$Y_0 = Z_0 = \{0\}, \quad E^0 = F^0 = X.$$

Положим также

$$\hat{\mu}_n = \inf_{x \in E^{n-1} \cap a_+} p(x), \quad \hat{\nu}_n = \sup_{x \in F^{n-1} \cap a_-} p(x), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

Как нетрудно видеть, тогда

6° $X = Y_n \dotplus E^n = Z_n \dotplus F^n$,

7° подпространства Y_n, Z_n, E^n, F^n — инвариантны относительно оператора A,

8° $\ldots \leqslant \hat{\nu}_n \leqslant \ldots \leqslant \hat{\nu}_1 \leqslant 0 \leqslant \hat{\mu}_1 \leqslant \ldots \leqslant \hat{\mu}_n \leqslant \ldots,$

$$\nu_n \leqslant \hat{\nu}_n, \quad \hat{\mu}_n \leqslant \mu_n, \tag{14}$$

9° $(L_{\hat{\mu}_n} x, Hx) \geqslant 0$, $x \in E^{n-1}$; $\quad (L_{\hat{\nu}_n} x, Hx) \geqslant 0$, $x \in F^{n-1}$,

10° если $y \in Y_n (z \in Z_n)$, то $p(y) \leqslant \mu_n$ $(p(z) \geqslant \nu_n)$.

Лемма 4. *Если в равенствах* (13) *нижняя* (*верхняя*) *грань достигается, то* $\hat{\mu}_n \in \sigma$ $(\hat{\nu}_n \in \sigma)$.

Доказательство. Пусть нижняя грань в (13) достигается на элементе $x_0 \neq 0$, $x_0 \in E^{n-1} \cap a_+ : \hat{\mu}_n = p(x_0)$. На пространстве E^{n-1}, в силу 9°, форма $\{x, y\} = (L_{\hat{\mu}_n} x, Hy)$ — неотрицательна. Тем самым, для неё справедливо неравенство Шварца. Так как $\hat{\mu}_n = p(x_0)$, то из этого неравенства получим, что $(L_{\hat{\mu}_n} y, Hx_0) = 0$, $y \in E^{n-1}$. Теперь, в силу 6°, очевидно, что предыдущее равенство справедливо для всех $y \in X$. Если мы допустим, что $\hat{\mu}_n \in \varrho$, то $L_{\hat{\mu}_n}(X) = X$ и тем самым $Hx_0 = 0$. Но, тогда $[x_0, x_0] = (x_0, HAx_0) = (Ax_0, Hx_0) = 0$, что противоречит условию $x_0 \in a_+$.

4. Некоторые свойства спектра. Пусть X — произвольное локально выпуклое пространство и $M \subset X$ некоторое множество. Скажем, что R_λ слабо сходится к I на M при $\lambda \to 0$ справа, если некоторая правая полуокрестность нуля принадлежит ϱ и

$$\lim_{\lambda \to 0+0} (R_\lambda x, y) = (x, y), \quad x \in M, \ y \in X'. \tag{15}$$

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* (3) *и* 1)–3). *Тогда* $a_+ \cup a_- \neq \varnothing$. *Если* $a_+ \neq \varnothing$ *и выполнено условие* (15) *для* $M = a_+$, *то при любом* $x \in a_+$

$$[\hat{\mu}_1, p(x)] \cap \sigma \neq \varnothing. \tag{16$^+$}$$

Если же $a_- \neq \varnothing$ *и выполнено* (15) *для* $M = a_-$, *то при любом* $x \in a_-$

$$[p(x), \hat{\nu}_1] \cap \sigma \neq \varnothing. \tag{16$^-$}$$

Доказательство. Пусть $x \in a_+$. Если $\hat{x} \equiv L_{p(x)} x = 0$, то $p(x) \in [\hat{\mu}_1, p(x)] \cap p\sigma$ и (16$^+$) справедливо. Пусть, теперь $\hat{x} \neq 0$. Если $p(x) = \hat{\mu}_1$, то (16$^+$) справедливо в силу леммы 4. Считаем поэтому $p(x) > \hat{\mu}_1$. Введём функцию

$$f(\lambda) = (R_\lambda \hat{x}, H\hat{x}), \quad \lambda \in \varrho \cap R,$$

которой, в силу условия 1), § 3, можно придать следующий вид

$$f(\lambda) = [R_\lambda \hat{x}, R_\lambda \hat{x}]_0 - \lambda [R_\lambda \hat{x}, R_\lambda \hat{x}] = (R_\lambda x, HL_{p(x)} \hat{x}). \tag{17}$$

Заметим также (см. 1), § 3), что функция $f(\lambda)$ — вещественна. Допустим, что $[\hat{\mu}_1, p(x)] \subset \varrho$. Воспользовавшись теоремой 2 найдём, что функция $f(\lambda)$ — дифференцируема на $[\hat{\mu}_1, p(x)]$ и её производная

$$f'(\lambda) = (R_\lambda A R_\lambda \hat{x}, H\hat{x}).$$

В силу условия 1), § 3, $f'(\lambda)$ можно представить в виде

$$f'(\lambda) = [R_\lambda \hat{x}, R_\lambda \hat{x}]. \tag{18}$$

Заметим далее, что

$$f'\big(p(x)\big) = [x, x] > 0, \quad f\big(p(x)\big) = (x, H\hat{x}) = 0 \tag{19}$$

и согласно 9° и (17)

$$f(\hat{\mu}_1) = \big(L_{\hat{\mu}_1}(R_{\hat{\mu}_1} \hat{x}), H(R_{\hat{\mu}_1} \hat{x})\big) \geqslant 0. \tag{20}$$

Теперь из условий (19) и (20) (в случае, если $\hat{\mu}_1 = 0$, то из (19), (20) и (15)) следует существование точки $\theta \in \big(\hat{\mu}_1, p(x)\big)$ такой, что $f(\theta) < 0$ и $f'(\theta) = 0$. Окончательно, используя (17) и (19), найдём, что $[R_\theta \hat{x}, R_\theta \hat{x}]_0 = (R_\theta \hat{x}, HR_\theta \hat{x}) < 0$, что противоречит условию 2) § 3. Таким образом, (16$^+$) доказано. Аналогично доказывается и (16$^-$).

Следствие. *Если условие* (9) *выполняется только для вещественного* λ, $a_+ \neq \varnothing$ ($a_- \neq \varnothing$) *и выполнены условия* 1)–3), § 3, *и условие* (15) *для* $M = a_+$ (a_-), *то* $\hat{\mu}_1 \in \sigma$ ($\hat{\nu}_1 \in \sigma$).

Доказательство. Напомним сначала, что в силу условия (15) некоторая правая полуокрестность нуля принадлежит резольвентному множеству. Пусть $z_n \in a_+, p(z_n) > \hat{\mu}_1, p(z_n) \to \hat{\mu}_1$. Согласно (16+) найдётся последовательность $\{\theta_n\} \subset \sigma$, $\theta_n \to \hat{\mu}_1$. Следовательно, $\hat{\mu}_1 \neq 0$ и на основании замечания к теореме 1 $\hat{\mu}_1 \in \sigma$.

5. Экстремальные свойства собственных значений.

Определение. Будем говорить, что оператор A имеет *дискретный спектр* (*дискретный вещественный спектр*), если $\sigma = p\sigma$ ($\sigma \cap R = p\sigma \cap R$), собственные значения (вещественные собственные значения) имеют конечную кратность и их множество не имеет конечных предельных точек.

Заметим, что если A имеет дискретный вещественный спектр, то условие (9) автоматически выполняется для любого $\lambda \in \varrho \cap R$.

Пусть выполнены следующие условия:

1), 2), 3), 4), § 3, и

5) A имеет дискретный вещественный спектр и

$$\mu_n \in \varrho(A \mid E^n), \quad \text{если } \mu_n < \mu_{n+1},$$
$$\nu_n \in \varrho(A \mid F^n), \quad \text{если } \nu_n > \nu_{n+1},$$

где символом $A \mid M$ обозначается сужение оператора A на инвариантное относительно A подпространство M,

6) выполняется условие (15) для $M = a_+$ при $\lambda \to 0+0$ и для $M = a_-$ при $\lambda \to 0-0$.

Будем говорить, что оператор A принадлежит классу $\mathscr{H}$ ($A \in \mathscr{H}$), если выполнены условия 1)–6) и (3).

Теорема 4. *Если* $A \in \mathscr{H}$, *то* A *имеет по крайней мере одно собственное значение. Если* $a_+ \neq \varnothing$, *то* $\hat{\mu}_1$ — *собственное значение, если же* $a_- \neq \varnothing$, *то* $\hat{\nu}_1$ — *собственное значение.*

Доказательство. В силу свойства 1°, § 3, $a_+ \cup a_- \neq \varnothing$. Пусть, например, $a_+ \neq \varnothing$. В силу следствия к теореме 3 $\hat{\mu}_1 \in \sigma = p\sigma$, поэтому $\mu_1 \leqslant \hat{\mu}_1$. Поэтому, так как $\hat{\mu}_1 \leqslant \mu_1$, то $\hat{\mu}_1 = \mu_1$.

Следующие теоремы мы формулируем для положительных собственных значений, имея в виду, что для отрицательных — они формулируются аналогичным образом.

Теорема 5 (принцип Релея). *Пусть* $A \in \mathscr{H}$, *тогда*

$$\min_{x \in E^{n-1} \cap a_+} p(x) = \mu_n, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

причём минимум достигается на элементе y_n.

Доказательство. Для $n = 1$ (21) следует из теоремы 4 и свойства 3°, § 3. Допустив, что (21) доказано для $k = 1, \ldots, n$, покажем его справедливость для $k = n+1$, т. е. покажем, что $\hat{\mu}_{n+1} = \mu_{n+1}$. Можно считать, что $\mu_{n+1} > \mu_n$, так как в противном случае доказательство очевидно. Из вышеуказанного индукционного предположения, в силу (14), $\mu_n \leqslant \hat{\mu}_{n+1} \leqslant \mu_{n+1}$. Допустим, что $\hat{\mu}_{n+1} \neq \mu_{n+1}$ и пусть $x \in E^n \cap a_+, p(x) < \mu_{n+1}$. Тогда, на основании теоремы 3 $[\hat{\mu}_{n+1}, p(x)] \cap \sigma(A \mid E^n) \neq \varnothing$. Так как $\sigma(A \mid E^n) \subset \sigma$ и $[\mu_n, \mu_{n+1}) \cap \sigma = \{\mu_n\}$, то $\hat{\mu}_{n+1} = \mu_n$ и $\mu_n \in \sigma(A \mid E^n)$, а это противоречит 5).

Пусть $\mathscr{E}_n$ ($\mathscr{E}^n$)-совокупность подпространств X размерности (коразмерности) n. Положим также

$$\underline{n} = \min\{i\colon \mu_i = \mu_n\}, \quad \bar{n} = \max\{i\colon \mu_i = \mu_n\},$$

тогда

$$\ldots \leqslant \mu_{\underline{n}-1} < \mu_{\underline{n}} = \ldots = \mu_n = \ldots = \mu_{\bar{n}} < \mu_{\bar{n}+1} \leqslant \ldots$$

Лемма 5 (неравенство Вейля). *Если* $E \in \mathscr{E}^i$, $1 \leqslant i \leqslant \bar{n}-1$, *то*

$$\inf_{x \in E \cap a_+} p(x) \leqslant \mu_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Доказательство. Так как $i \leqslant \bar{n}-1$, то существует $y \neq 0$, $y \in Y_{\bar{n}} \cap E$. Тогда из свойства 10°, § 3, и того, что $Y_{\bar{n}} \subset a_+ \cup \{0\}$ имеем

$$\inf_{x \in E \cap a_+} p(x) \leqslant p(y) \leqslant \mu_{\bar{n}} = \mu_n.$$

Теорема 6 (принцип Куранта). *Пусть* $A \in \mathscr{H}$, *тогда*

$$\max_{E \in \mathscr{E}^{n-1}} \inf_{x \in E \cap a_+} p(x) = \mu_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Доказательство. Это есть следствие леммы 5 и того, что на подпространстве $E^{n-1} \in \mathscr{E}^{n-1}$, в силу принципа Релея (21), неравенство Вейля превращается в равенство.

Замечание. Из теорем 5 и 6 обычным образом (см., например, [13]) выводятся теоремы сравнения и оценки для собственных значений.

6. Спектральные разложения. Если оператор $A \in \mathscr{H}$, то через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ будем обозначать его собственные значения, упорядоченные по возрастанию их абсолютных величин, а через $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ — соответствующие им собственные элементы, удовлетворяющие условию 5, § 3.

Следуя [5], из принципа Релея выводится

Теорема 7. *Если* $A \in \mathscr{H}$ *и* $x, y \in X$, *то*

$$(y, HAx) = \sum_i \frac{(y, Hx_i)(x_i, Hx)}{\lambda_i}. \tag{22}$$

Пусть $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{F}$ — некоторое семейство ограниченных в X множеств. Через $X'_{\mathscr{A}}$ будем обозначать пространство X' с топологией равномерной сходимости на множествах из $\mathscr{A}$ (см., например, [14]), определяемой системой полунорм $\{p_A\}_{A\in\mathscr{A}}$:

$$(+)\qquad p_A(x) = \sup_{z\in A}|(z, x)|, \quad x\in X',\ A\in\mathscr{A}.$$

Если семейство $\mathscr{A}$ представляет собой семейство всех конечных множеств из X, то набор полунорм $(+)$ определяет на X' слабую топологию. Из теоремы 7 сразу следует справедливость равенства

$$HAx = \sum_i \frac{(x, Hx_i)}{\lambda_i} Hx_i, \quad x\in X$$

в смысле слабой сходимости в X'.

Для локально выпуклого пространства справедлив следующий аналог неравенства Рида [3]:

Лемма 6. *Если $B\in\mathscr{F}$, то*

$$(23)\qquad p_B(Hx) \leqslant \sup_{z\in B}(z, H_z)^{\frac12}(x, Hx)^{\frac12}, \quad x\in X.$$

Доказательство. Из условий 1) и 2), § 3, следует, что для формы $[x, y]_0 = (x, Hy)$ справедливо неравенство Шварца, откуда и следует (23).

Теорема 8. *Пусть $A\in\mathscr{H}$ и $H\colon X\to X'_{\mathscr{A}}$ — ограниченный оператор, тогда*

$$(24)\qquad HAx = \sum_i \frac{(x, Hx_i)}{\lambda_i} Hx_i, \quad x\in X,$$

где ряд сходится в пространстве $X'_{\mathscr{A}}$.

Доказательство. Пусть $B\in\mathscr{A}$, тогда $H(B)$ — ограниченное множество в пространстве $X_{\mathscr{A}}$. Пусть $h(x) = [x, x]_0^{\frac12}$. Тогда $(x, Hx)\leqslant p_B(Hx)\leqslant c$, $c>0$, $x\in B$ и поэтому $\sup_{x\in B} h(x)\leqslant c^{\frac12}$. Положим $\varphi_n = \sum_{i=1}^n \frac{(x, Hx_i)}{\lambda_i} Hx_i$. Пусть $m>n$. Используя неравенство (23) найдём, что

$$p_B(\varphi_m-\varphi_n) \leqslant c^{\frac12}\left(\sum_{i=n+1}^m \frac{(x, Hx_i)}{\lambda_i} x_i,\ H\sum_{i=n+1}^m \frac{(x, Hx_i)}{\lambda_i} x_i\right) = c^{\frac12}\sum_{i=n+1}^m \frac{|(x, Hx_i)|^2}{\lambda_i^2}.$$

В силу (22) и условия $|\lambda_i|\to\infty$ ряд $\sum_{i=1}^\infty \frac{|(x, Hx_i)|^2}{\lambda_i^2}$ сходится, поэтому $p_B(\varphi_m-\varphi_n)\to 0$. Таким образом, последовательность $\{\varphi_n\}$ — фундаментальна в $X'_{\mathscr{A}}$. Теперь сходимость φ_n к HAx следует из указанной выше слабой сходимости последовательности $\{\varphi_n\}$ к HAx.

Теорема 9. *Пусть $A\in\mathscr{H}$ и $H\colon X\to X'_{\mathscr{A}}$ — ограниченный оператор. Если $\lambda\in\varrho(A)$, то H — образ (единственного) решения уравнения $x-\lambda Ax = y$ имеет вид*

$$(25)\qquad Hx = \lambda\sum_i \frac{(y, Hx_i)}{\lambda_i-\lambda} Hx_i + Hy,$$

где ряд сходится в пространстве $X'_{\mathscr{A}}$.

Доказательство. В силу (24)

$$Hx = \lambda\sum_i \frac{(x, Hx_i)}{\lambda_i} Hx_i + Hy.$$

Теперь (25) следует из предыдущего равенства и того, что

$$(x, Hx_i) = \lambda_i\frac{(y, Hx_i)}{\lambda_i-\lambda}.$$

7. Теория Гильберта–Шмидта. Скажем, что оператор A принадлежит классу $\mathscr{H}(\nu, H)$, если выполнены условия (3), 1), 4)–6), § 5 и

2_ν) $(x, HA^\nu x)\geqslant 0$, $x\in X$,

3_ν) $HA^{\nu+1}\neq 0$,

$(\nu = 0, 1, \ldots)$. Таким образом, класс $\mathscr{H}(0, H)$ совпадает с ранее введённым классом $\mathscr{H}$.

Справедлива следующая

Теорема 10. *Если X — отделимое локально выпуклое пространство и оператор $A\in\mathscr{H}(\nu, H)$ $(\nu\geqslant 0)$, то существует хотя бы одно собственное значение уравнения $x-\lambda Ax = 0$, все его собственные значения вещественны, а собственные элементы x_i и x_j, соответствующие различным собственным значениям, удовлетворяют условию обобщенной ортогональности $(x_i, HA^\nu x_j) = 0$.*

Множество собственных значений $|\lambda_1|\leqslant|\lambda_2|\leqslant\ldots\leqslant|\lambda_n|\leqslant\ldots$, которым соответствуют собственные элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, нормированные условиями $(x_i, HA^\nu x_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$, обладает следующими экстремальными свойствами:

на множестве элементов x таких, что

$$(x, HA^\nu x) = 1, \quad (x, HA^\nu x_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n-1$$

абсолютное значение функционала $(x, HA^{\nu+1}x)$ достигает при $x = x_n$ максимума, равного $1/|\lambda_n|$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Для любых элементов $x, y\in X$

$$(x, HA^{\nu+1}y) = \sum_i \frac{(x, Hx_i)(x_i, Hy)}{\lambda_i^{2\nu+1}}.$$

Если $HA^\nu\colon X\to X'_{\mathscr{A}}$ — ограниченный оператор, то для любого $x\in X$ имеет *место разложение*

$$HA^{\nu+1}x = \sum_i \frac{(x, Hx_i)}{\lambda_i^{2\nu+1}} Hx_i. \tag{26}$$

Если $\lambda \in \varrho(A)$, *то для единственного решения* x *уравнения* $x-\lambda Ax = y$, $y \in X$ *справедливо разложение*

$$HA^{\nu}x = \lambda \sum_i \frac{(y, Hx_i)}{\lambda_i^{2\nu}(\lambda_i-\lambda)} Hx_i + HA^{\nu}y, \tag{27}$$

причём ряды (26) *и* (27) *сходятся в пространстве* $X'_{\mathscr{A}}$.

Доказательство. Справедливость теоремы для $\nu = 0$ легко следует из результатов §§ 5 и 6. Пусть $\nu \geqslant 1$. Из формул 1) следует, что оператор H симметризует любую итерацию оператора A. Следовательно, оператор $T = HA^{\nu}$ тоже симметризует оператор A и для него выполнены условия 2) и 3). Если $\lambda \in p\sigma$ и $x \in \mathscr{P}_\lambda$, то $A^{\nu}x = \lambda^{-\nu}x$, поэтому $(x, Tx) = \lambda^{-\nu}(x, Hx) \neq \emptyset$, если $x \neq 0$. Таким образом, мы видим, что операторы A и T удовлетворяют всем условиям, определяющим класс $\mathscr{H}(0, HA^{\nu})$. Другими словами, $\mathscr{H}(\nu, H) = \mathscr{H}(0, HA^{\nu})$. Но, доказываемая теорема справедлива при $\nu = 0$, что и завершает доказательство в общем случае.

8. Некоторые частные случаи. Докажем сначала следующую лемму, дающую достаточные условия для выполнения условия 6), § 5.

Лемма 7. *Если* $A \in \mathscr{L}_0(X)$ *и выполнено условие* (9) (*выполнено* (9) *для* $\lambda \in R$), *тогда* $G_0 \subset \varrho$ ($G_0 \cap R \subset \varrho \cap R$) *и резольвента* R_λ — *непрерывна в нуле* (R_λ-*непрерывна в нуле как функция вещественного аргумента*), *т.е.* $\lim_{\lambda\to 0} R_\lambda = I$ ($\lim_{\lambda\to 0,\, \lambda\in R} R_\lambda = I$) *в пространстве* $\mathscr{L}(X)$.

Доказательство. Так как $A \in \mathscr{L}_0(X)$, то $AR_0 = A \in \mathscr{L}(X)$ т.е. выполнено (3) для $\lambda_0 = 0$. Таким образом, для точки $\lambda_0 = 0$ проходят все рассуждения § 2. В этом случае $V_\lambda = L_\lambda$, и из неравенства (6) для $\lambda_0 = 0$ получим, что $G_0 \cap p\sigma = \emptyset$. Поэтому, в силу (9) $G_0 \subset \varrho$. Теперь из неравенства (11) для $\lambda \in G_0$ и $p_B \in \{p_B\}_{B\in\mathscr{F}}$ получим

$$p_B(R_\lambda) \leqslant c \sup_{f\in B} q(f)\left[1+\frac{c_p|\lambda|}{1-c_{p0}|\lambda|}\right],$$

где q — зависит только от p. Таким образом, множество $\{R_\lambda\}$ — ограничено в пространстве $\mathscr{L}(X)$ для λ достаточно близкого к нулю. Теперь непрерывность R_λ есть следствие тождества

$$R_\lambda = I+\lambda R_\lambda A.$$

Пусть теперь A — компактный оператор в X. В силу теоремы Ж. Лере [1] A имеет дискретный спектр. Так как условия леммы 7 для такого A выполнены, то для него выполнены условия 5) и 6), § 5. Аналогично, если $A \in \mathscr{L}_0(X)$ и некоторая его итерация A^m является компактным оператором, то спектр A дискретен (см., например, [15]) и, тем самым, для него также справедливы условия 5) и 6), § 5.

Таким образом, в частности, для симметризуемых компактных и супер-непрерывных „потенциально компактных" (A^m — компактен, для некоторого целого $m \geqslant 1$) операторов в локально выпуклых пространствах справедлива теория Гильберта–Шмидта.

Литература

[1] J. Leray, *Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme completement continu d'un espace vectoriel a voisinages convexes*, Acta Sci. Math. Szeged 12, Part B (1950), стр. 177–186.

[2] A. Zaanen, *Über vollstetige symmetrische und symmetrisierbare Operatoren*, Nieuw Archief v. Wiskunde (2), 22 (1943), стр. 57–80.

[3] W. Reid, *Symmetrizable completely continuous linear transformations in Hilbert space*, Duke Math. Journ. 18, N 1, (1951), стр. 41–56.

[4] Д. Ф. Харазов, *О некоторых свойствах линейных операторов, обеспечивающих справедливость теории Гильберта-Шмидта*, УМН, т. XII, № 4 (1957), стр. 201–207.

[5] *Симметризуемые операторы в банаховых пространствах и их приложения*, Studia Math. 27 (1966), стр. 169–188.

[6] — *О симметризуемых операторах, некоторая итерация которых удовлетворяет условию положительной определённости*, Матем. зам. т. 5, № 1 (1969), стр. 71–76.

[7] — *О симметризуемых операторах в банаховых пространствах*, Сообщ. АН Гр. ССР, т. 68, № 2 (1972), стр. 273–276.

[8] К. Иосида, *Функциональный анализ*, „Мир", Москва 1967.

[9] Ж. Дьедонне, *Основы современного анализа*, Москва 1964.

[10] H. H. Schaffer, *Halbgeordnete lokalkonvexe Vectorräum*. II, Math. Ann. B. 138 (1959), стр. 259–286.

[11] Х. Шефер, *Топологические векторные пространства*, Москва 1971.

[12] H. G. Garnir, M. de Wilde, T. Schmets, *Analyse fonctionnelle*, I, 1968.

[13] Д. Ф. Харазов, *О теоремах типа сравнения для собственных значений некоторых операторов с дискретным спектром*, Труды Тбил. мат. инст. XXIX (1964), стр. 219–227.

[14] А. Робертсон, В. Робертсон, *Топологические векторные пространства*, Москва 1967.

[15] Р. Эдвардс, *Функциональный анализ. Теория и приложения*, Москва 1969.

Received February 18, 1973 (649)