Contents of volume L, number 1

The journal STUDIA MATHEMATICA prints original papers in English, French, German and Russian, mainly on functional analysis, abstract methods of mathematical analysis and on the theory of probabilities. Usually 3 issues constitute a volume.

The submitted papers should be typed on one side only and they should be accompanied by abstracts, normally not exceeding 200 words. The authors are requested to send two copies one of them being the typed, not Xerox, copy. Authors are advised to retain a copy of the paper submitted for publication.

Manuscripts and the correspondence concerning editorial work should be addressed to

STUDIA MATHEMATICA
ul. Śniadeckich 8
00-950 Warszawa, Poland

Correspondence concerning exchange should be addressed to

INSTITUTE OF MATHEMATICS
POLISH ACADEMY OF SCIENCES
ul. Śniadeckich 8,
00-950 Warszawa, Poland

The journal is available at your bookseller or at

ARS POLONA - RUCH
Krakowskie Przedmieście 7
00-068 Warszawa, Poland

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

Über Fixpunkte kompakter Abbildungen in topologischen Vektorräumen*

von

SIEGFRIED HAHN und KARL-FRIEDRICH PÖTTER (Dresden)

Wir betrachten in dieser Arbeit reelle und separierte topologische Vektorräume. Die topologischen Begriffe richten sich dabei vor allem nach Bourbaki [3]. Ist A eine Teilmenge eines topologischen Raumes, so bezeichnen wir mit ∂A den Rand, mit $\bar{A}$ die Abschließung und mit $\operatorname{int}(A)$ das Innere von A. Eine Abbildung f von einem topologischen Raum X in einen topologischen Raum Y heißt *kompakt*, wenn f stetig und $f(X)$ eine relativ kompakte Teilmenge von Y ist. Eine Abbildung h von einem topologischen Raum X in einen topologischen Vektorraum E heiße *finit*, wenn h kompakt ist und $h(X)$ in einem endlichdimensionalen (linearen) Teilraum von E liegt. Eine Teilmenge Z eines topologischen Vektorraumes E wird *zulässig* genannt, wenn es zu jeder kompakten Teilmenge K von Z und zu jeder Nullumgebung V aus E eine finite Abbildung $h\colon K \to Z$ gibt, so daß $x - h(x) \in V$ für alle $x \in K$ gilt. Ist speziell $Z = E$, so heißt der topologische Vektorraum E *zulässig*. Eine Teilmenge M eines topologischen Vektorraumes E heißt *beschränkt*, wenn es zu jeder Nullumgebung V aus E ein $\varrho > 0$ gibt, so daß $M \subset \varrho V$ gilt, *finit beschränkt*, wenn der Durchschnitt von M mit jedem endlichdimensionalen (linearen) Teilraum von E beschränkt ist. Dementsprechend wird ein topologischer Vektorraum als *lokalbeschränkt* bezeichnet, wenn er eine beschränkte Nullumgebung besitzt, als *lokal finit beschränkt*, wenn er eine finit beschränkte Nullumgebung hat. Wir nennen eine Teilmenge S eines Vektorraumes *sternförmig*, wenn $(0,1)S \subset S$ gilt. Eine Nullumgebung W eines topologischen Vektorraumes heißt *einfachberandet*, wenn $(0,1)\overline{W} \subset \operatorname{int}(W)$ gilt.

Die Arbeit behandelt hauptsächlich Existenzaussagen für Fixpunkte kompakter, nicht notwendig linearer Abbildungen, deren Definitionsbereich eine Teilmenge eines topologischen Vektorraumes ist. Mit

* Die Arbeit ist ein Teil der von der Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften der TU Dresden angenommenen Dissertation [7].

einer einheitlichen Vorgehensweise werden eine Reihe neuer Existenzsätze hergeleitet, die viele bekannte Fixpunktsätze als Spezialfälle enthalten.

Einer der ersten allgemeinen Fixpunktsätze in unendlichdimensionalen Räumen, der ohne eine Lipschitzbedingung auskommt, ist der bekannte Satz von Schauder [22], der für eine kompakte Selbstabbildung f einer abgeschlossenen Kugel eines Banachraumes die Existenz eines Fixpunktes sichert. Rothe [21] schwächt die Voraussetzung des Schauderschen Satzes ab, indem er statt der Selbstabbildung für f nur forderte, daß $f(\partial K) \subset K$ gilt, wobei K wie beim Satz von Schauder eine abgeschlossene Kugel eines Banachraumes ist. Eine weitere Abschwächung der Voraussetzungen wurde von Altman [1] vorgenommen, der an die kompakte Abbildung f für die Existenz eines Fixpunktes die folgende Forderung stellte:

Für alle $x \in \partial K$ *gelte* $\|f(x)-x\|^2 \geqslant \|f(x)\|^2 - \|x\|^2$.

Alle diese Sätze gelten für normierte und zum Teil für lokalkonvexe Räume. Oft ist es jedoch von Interesse, auch für nicht notwendig lokalkonvexe topologische Vektorräume Fixpunktaussagen zur Verfügung zu haben. Dazu gibt es bisher relativ wenige Ergebnisse. Beiträge dazu lieferten z.B. Klee [12] und Landsberg [14], die den Schauderschen Satz für zulässige topologische Vektorräume bewiesen.

Als wesentlichstes Ergebnis unserer Arbeit erhalten wir den folgenden Satz:

Es sei E ein zulässiger topologischer Vektorraum, W eine abgeschlossene Nullumgebung in E und f eine kompakte Abbildung von W in E mit der folgenden Eigenschaft: Aus $f(x) = ax$ für $x \in \partial W$ folge $a \leqslant 1$. Dann hat f einen Fixpunkt.

Dieser Satz verallgemeinert eine Aussage von Yamamuro [23], der den Sachverhalt für lokalkonvexe topologische Vektorräume bewies und ein Ergebnis von Landsberg [14], der für W eine abgeschlossene und einfachberandete Nullumgebung forderte.

Speziell folgen aus unserem Ergebnis sämtliche oben zitierten Fixpunktsätze.

Ein wesentliches Anliegen der Arbeit ist es, beim Beweis aller Aussagen ohne den Begriff des Abbildungsgrades auszukommen, der von Altman, Rothe und auch Yamamuro als wichtigstes Beweishilfsmittel benutzt wird.

Der Beweisgedanke zerfällt in drei Teile. Zuerst wird der allgemeine Sachverhalt für endlichdimensionale topologische Vektorräume bewiesen, wobei einfache Homotopiebetrachtungen angestellt werden. Dann werden geeignete Approximationssätze aufgestellt, mit deren Hilfe schließlich die Aussagen über finite Abbildungen auf beliebige kompakte Abbildungen übertragen werden. Mit Hilfe dieses Beweisgedankens erhielten Landsberg und Riedrich in [14], [15], [20] sehr allgemeine Fixpunkt- und Eigenwertaussagen. Die wichtigsten Ergebnisse der Arbeit werden durch Anwendungsbeispiele veranschaulicht.

1. Fixpunktaussagen für kompakte Abbildungen in endlichdimensionalen topologischen Vektorräumen. Wir beginnen diesen Abschnitt mit einigen Vorbetrachtungen über kompakte Vektorfelder in endlichdimensionalen Räumen.

Sei E ein endlichdimensionaler topologischer Vektorraum, $X \subset E$ und f eine kompakte Abbildung von X in E. Dann ist die Abbildung $F = I_X - f$ (I_X bezeichne die Einschränkung der identischen Abbildung I von E auf die Menge X) eine Abbildung von X in E, die wir auch als kompaktes Vektorfeld bezeichnen. Das kompakte Vektorfeld F heißt *nullstellenfrei*, wenn $f(x) \neq x$ für alle $x \in X$ gilt. Zwei nullstellenfreie kompakte Vektorfelder $F = I_X - f$ und $G = I_X - g$ heißen *homotop*, wenn es eine kompakte Abbildung h von $X \times [0,1]$ in E mit $h(x,t) \neq x$ für alle $x \in X$, $t \in [0,1]$ gibt, die den Beziehungen $h(x,0) = f(x)$ und $h(x,1) = g(x)$ genügt.

Viele Probleme der nichtlinearen Analysis (vgl. Granas [5], Klee [12]) lassen sich auf Homotopieerweiterungssätze zurückführen. Wir benötigen einen bekannten, von Granas [5] stammenden Satz dieser Art.

HOMOTOPIEERWEITERUNGSSATZ. *Sei E ein Banachraum, X eine Teilmenge von E und X_0 eine abgeschlossene Teilmenge von X. Ferner seien $F_0 = I_{X_0} - f_0$ und $G_0 = I_{X_0} - g_0$ zwei nullstellenfreie kompakte Vektorfelder, die X_0 in E abbilden und die zueinander homotop sind. Läßt sich F_0 zu einem nullstellenfreien kompakten Vektorfeld F auf ganz X erweitern, so läßt auch G_0 eine solche Erweiterung G zu, die außerdem zu F homotop ist.*

Dabei sprechen wir von einer kompakten, nullstellenfreien Erweiterung F des Vektorfeldes F_0 von X_0 auf X, wenn eine kompakte Abbildung f von X in E existiert mit $f(x) \neq x \, (x \in X)$ und $f(x) = f_0(x) \, (x \in X_0)$.

HILFSSATZ 1. *Sei E ein Banachraum und W eine abgeschlossene Nullumgebung in E. Dann besitzt das auf ∂W definierte nullstellenfreie, kompakte Vektorfeld $I_{\partial W} = I_{\partial W} - o$ keine nullstellenfreie kompakte Erweiterung auf ganz W.*

Beweis. Angenommen, F wäre eine solche Erweiterung. Dann würde eine kompakte Abbildung $f\colon W \to E$ existieren, die auf W keinen Fixpunkt hat und auf ∂W mit der Nullabbildung übereinstimmt. Dann wird durch

$$T(x) = \begin{cases} f(x), & x \in W, \\ o, & x \in E \setminus W \end{cases}$$

eine kompakte Selbstabbildung des Raumes E geliefert. Diese kann offensichtlich keinen Fixpunkt haben, was nach dem Schauderschen Fixpunktsatz unmöglich ist. ■

Wir können nun einen für die vorliegende Arbeit grundlegenden Existenzsatz für Fixpunkte kompakter Abbildungen in endlichdimensionalen topologischen Vektorräumen beweisen. Dieser Satz wurde von Yamamuro [23] sogar für lokalkonvexe Räume bewiesen. Jedoch wurde der Beweis unter Benutzung des Begriffes des Abbildungsgrades geführt. Wie unser Beweis zeigt, braucht man dieses relativ komplizierte Hilfsmittel für den endlichdimensionalen (und auch für den normierten) Fall nicht zu verwenden. In Abschnitt 3 übertragen wir den Sachverhalt sogar auf (gewisse) nicht notwendig lokalkonvexe topologische Vektorräume, wobei ebenfalls der Abbildungsgrad nicht benutzt wird.

SATZ 1. *Es sei E ein endlichdimensionaler topologischer Vektorraum, W eine abgeschlossene Nullumgebung in E und f eine kompakte Abbildung von W in E mit der Eigenschaft, daß für jedes $x \in \partial W$ mit $f(x) = ax$ die Beziehung $a \leqslant 1$ gilt. Dann besitzt f einen Fixpunkt.*

Beweis. Angenommen, f habe keinen Fixpunkt. Wir zeigen, daß dann ein $\lambda_0 \in (0,1)$ und ein $x_0 \in \partial W$ mit $x_0 = \lambda_0 f(x_0)$ existieren. Wäre nämlich für alle $\lambda \in (0,1)$ und $x \in \partial W$ stets $x \neq \lambda f(x)$, so müßte das dann auch für alle $\lambda \in [0,1]$ und $x \in \partial W$ wegen $x \neq f(x)$ und $x \neq o\,(x \in \partial W)$ gelten. Damit würde die Abbildung $H(x,t) = x - \lambda f(x)$ $(x \in \partial W,\ \lambda \in [0,1])$ eine Homotopie zwischen den kompakten Vektorfeldern $I_{\partial W} = I_{\partial W} - o$ und $I_{\partial W} - f_0$ (f_0 bezeichne die Einschränkung von f auf ∂W) liefern. Da das Vektorfeld $I_{\partial W} - f_0$ eine nullstellenfreie Erweiterung auf ganz W besitzt (nämlich $I_W - f$), müßte sich nach dem Homotopieerweiterungssatz von Granas das Vektorfeld $I_{\partial W}$ ebenfalls nullstellenfrei auf ganz W erweitern lassen, was im Widerspruch zu Hilfssatz 1 steht. ■

FOLGERUNG 1: *Es sei E ein endlichdimensionaler topologischer Vektorraum, U eine abgeschlossene Umgebung in E und f eine kompakte Abbildung von U in E. Es existiere ein $a \in \operatorname{int}(U)$ mit der Eigenschaft, daß für jedes $x \in \partial U$ mit $f(x) = ax + (1-a)a$ die Beziehung $a \leqslant 1$ gilt. Dann besitzt f einen Fixpunkt.*

Yamamuro beweist in [23] mit Hilfe des Abbildungsgrades eine Satz 1 ergänzende Aussage. Wir zeigen nun, daß sich dieses Ergebnis unmittelbar aus Satz 1 herleiten läßt.

SATZ 2. *Es seien E ein endlichdimensionaler topologischer Vektorraum, W eine kompakte Nullumgebung von E und f eine stetige Abbildung von W in E mit der Eigenschaft, daß für jedes $x \in \partial W$ mit $f(x) = ax$ die Beziehung $a \geqslant 1$ gilt. Dann besitzt f einen Fixpunkt.*

Beweis. Wir definieren auf W die kompakte Abbildung $g(x) = 2x - f(x)$. Sei nun $g(x) = ax$ für ein $x \in \partial W$. Dann ergibt sich $f(x) = (2-a)x$ mit $x \in \partial W$. Nach Voraussetzung gilt $2 - a \geqslant 1$, also $a \leqslant 1$. Folglich besitzt nach Satz 1 die Abbildung g einen Fixpunkt, der gleichzeitig Fixpunkt von f ist. ■

Wir wollen nun untersuchen, ob Satz 1 auch noch gültig bleibt, wenn die betrachtete Abbildung nur auf einem gewissen Teil der abgeschlossenen Nullumgebung definiert ist.

SATZ 3. *Es sei F ein endlichdimensionaler topologischer Vektorraum, K eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von F mit $o \in K$ und W eine abgeschlossene Nullumgebung von F. Weiter sei f eine kompakte Abbildung von $W \cap K$ in K mit der Eigenschaft, daß für jedes $x \in \partial W \cap K$ mit $f(x) = ax$ die Beziehung $a \leqslant 1$ gilt. Dann besitzt f einen Fixpunkt.*

Beweis. Angenommen, f besitzt keinen Fixpunkt (wie man sich leicht überlegt, folgt unmittelbar aus dem Schauderschen Fixpunktsatz, daß dann $K \cap \partial W \neq \emptyset$ gilt). Aus einem Ergebnis von Dugundji [4] folgt die Existenz einer kompakten Erweiterung $\tilde{f}$ von f auf ganz W mit $\tilde{f}(W) \subset \operatorname{conv}\big(f(W \cap K)\big)$. Da f die Menge $W \cap K$ in die konvexe Menge K abbildet, gilt $\operatorname{conv}\big(f(W \cap K)\big) \subset K$ und somit $\tilde{f}(W) \subset K$. Damit besitzt aber auch die Abbildung $\tilde{f}$ keinen Fixpunkt und nach Satz 1 gibt es ein $t_0 \in (0,1)$ und ein $z_0 \in \partial W$ mit $t_0\tilde{f}(z_0) = z_0$. Wegen $o \in K$ und $\tilde{f}(z_0) \in K$ gilt dann $t_0\tilde{f}(z_0) + (1-t_0)o = t_0\tilde{f}(z_0) = z_0 \in K$. Es gibt also ein $z_0 \in \partial W \cap K$ und ein $t_0 \in (0,1)$ mit $f(z_0) = \frac{1}{t_0} \cdot z_0$, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. ■

Oft ist es von Interesse, Fixpunktaussagen für Abbildungen zu erhalten, die auf dem Äußeren einer beliebigen Nullumgebung definiert sind. So kann man dann zum Beispiel Lösungsaussagen auch für solche Gleichungen machen, die eine Singularität im Nullpunkt besitzen, indem man den zugrunde gelegten Operator außerhalb einer geeignet gewählten Nullumgebung betrachtet. In Anlehnung an eine Arbeit von Riedrich [20] geben wir zunächst folgende Definition.

DEFINITION 1. Es sei E ein topologischer Vektorraum, X eine Teilmenge von E und A eine Teilmenge von X. Wir sagen, daß eine Abbildung $f\colon X \to E$ eine Richtung auf A ausläßt, wenn es ein $y \neq o$ aus E gibt, so daß $f(x) \neq ty$ für alle $t \geqslant 0$ und alle $x \in A$ gilt.

SATZ 4. *Es sei F ein endlichdimensionaler topologischer Vektorraum, W eine kompakte Nullumgebung von F und f eine kompakte Abbildung von $\overline{F \setminus W}$ in F, für die $I_{\overline{F \setminus W}} - f$ auf ∂W eine Richtung ausläßt. Dann besitzt f einen Fixpunkt.*

Beweis. Angenommen, f besitzt keinen Fixpunkt in $\overline{F \setminus W}$. Sei $o \neq u \in F$ ein beliebiges Element aus F. Wegen der Beschränktheit von W gibt es ein $n_0 \in N$ mit $n \cdot u =: v_n \in \operatorname{int}(\overline{F \setminus W})$ für alle $n \geqslant n_0$. Somit ist $\overline{F \setminus W}$ eine abgeschlossene Umgebung von v_n $(n \geqslant n_0)$, auf der f keinen Fixpunkt besitzt. Nach Folgerung 1 gibt es somit ein $\lambda_n \in (0,1)$ und ein $x_n \in \partial(\overline{F \setminus W}) \subset \partial W$ mit $\lambda_n f(x_n) - x_n = (\lambda_n - 1) v_n$ (*). Für jedes $n \geqslant n_0$ gehört somit $(\lambda_n - 1) nu$ der beschränkten Menge $[0,1] \cdot f(\partial W) - \partial W$ an. Daher muß für $n \to \infty$ o. B. d. A. $(\lambda_n - 1) n \to -\beta_0$ mit $\beta_0 \geqslant 0$ gelten. Wegen der Kompaktheit von ∂W gilt dann o. B. d.A. $x_n \to x_0 \in \partial W$ und aus der Stetigkeit von f folgt $f(x_n) \to f(x_0)$. Daher erhalten wir wegen Gleichung (*) die Beziehung $x_0 - f(x_0) = \beta_0 u$. Da u beliebig aus F gewählt worden war, läßt die Abbildung $I_{\overline{F \setminus W}} - f$ auf ∂W keine Richtung aus, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. Also gibt es ein $z_0 \in \overline{F \setminus W}$ mit $f(z_0) = z_0$. ■

2. Approximationssätze. In diesem Abschnitt werden einige Aussagen bereitgestellt, die wir zu einer Übertragung der Ergebnisse des vorigen Abschnitts auf zulässige topologische Vektorräume benötigen.

HILFSSATZ 2. *Es sei E ein topologischer Vektorraum, W eine abgeschlossene Teilmenge von E und A eine abgeschlossene Teilmenge von W. Weiter sei f eine kompakte Abbildung von W in E. Dann ist die Menge $U = \{z = x - \lambda f(x),\ x \in A,\ \lambda \in [a,b]$ mit $-\infty < a \leqslant b < +\infty\}$ abgeschlossen.*

Zum Beweis dieser Aussage verweisen wir auf [6] (Beweis zu Hilfssatz 2).

DEFINITION 2. [15] Es sei E ein topologischer Vektorraum, G eine Menge und Σ ein System von Abbildungen von G in E. Eine Abbildung $f\colon G \to E$ heiße *gleichmäßig Σ-approximierbar*, wenn es zu jeder Nullumgebung V von E ein $h_V \in \Sigma$ mit $f(x) - h_V(x) \in V$ für alle $x \in G$ gibt.

HILFSSATZ 3. *Es sei E ein topologischer Vektorraum, A eine abgeschlossene Teilmenge von E und f eine kompakte, gleichmäßig Σ-approximierbare Abbildung von A in E, die keinen Fixpunkt besitzt. Dann läßt sich f gleichmäßig Σ-approximieren durch Abbildungen ohne Fixpunkt.*

Auch den Beweis dieses Satzes findet man in [6]. Der nun folgende allgemeine und für unsere Arbeit grundlegende Approximationssatz ist in Verbindung mit Hilfssatz 3 ein wesentliches Hilfsmittel zur Übertragung der Aussagen von Abschnitt 1 auf zulässige topologische Vektorräume.

SATZ 5. *Es sei E ein topologischer Vektorraum und W eine abgeschlossene Teilmenge von E. Weiter sei f eine kompakte Abbildung von W in E, $[a,b]$ ein reelles Intervall mit $-\infty < a \leqslant b < +\infty$, sowie A eine in E abgeschlossene Teilmenge von W. Existieren zu jeder Nullumgebung V von E eine Abbildung h_V von W in E, eine Zahl $\lambda_V \in [a,b]$ und ein $x_V \in A$ mit $x_V = \lambda_V h_V(x_V)$ und $f(x) - h_V(x) \in V$ $(x \in W)$, so gibt es auch ein $x_0 \in A$ und ein $\lambda_0 \in [a,b]$ mit $x_0 = \lambda_0 f(x_0)$.*

Diese Aussage läßt sich mit Hilfssatz 2 im wesentlichen so beweisen, wie der Satz 1 aus [15] mit Hilfssatz 2 aus [15] bewiesen wurde.

Als Folgerung ergibt sich zu diesem Satz ein wichtiger Approximationssatz von Landsberg, der damit in [14] zu allgemeinen Fixpunktaussagen gelangte.

FOLGERUNG 2. *Es sei E ein topologischer Vektorraum, W eine abgeschlossene Teilmenge von E und Σ ein System von Abbildungen von W in E, die alle wenigstens einen Fixpunkt besitzen. Dann besitzt auch jede gleichmäßig Σ-approximierbare kompakte Abbildung von W in E einen Fixpunkt.*

Für unsere Zwecke ist der folgende Spezialfall von Satz 5 wesentlich.

FOLGERUNG 3. *Es sei E ein topologischer Vektorraum W eine abgeschlossene Nullumgebung von E, A eine in E abgeschlossene Teilmenge von ∂W und f eine kompakte, fixpunktfreie Abbildung von W in E. Existiert zu jeder Nullumgebung V von E eine Abbildung h_V von W in E, ein $x_V \in A$ und ein $\lambda_V \in (0,1)$ mit $x_V = \lambda_V h_V(x_V)$ und $f(x) - h_V(x) \in V$ für alle $x \in W$, so gibt es auch ein $x_0 \in A$ und ein $\lambda_0 \in (0,1)$ mit $x_0 = \lambda_0 f(x_0)$.*

Beweis. Satz 5 sichert die Existenz eines $x_0 \in A$ und eines $\lambda_0 \in [0,1]$ mit $x_0 = \lambda_0 f(x_0)$. Wegen der Gültigkeit von $x_0 \in A \subset \partial W$ und $o \notin \partial W$ gilt $\lambda_0 \neq 0$ und wegen der Fixpunktfreiheit von f in W gilt $\lambda_0 \neq 1$, woraus sich $\lambda_0 \in (0,1)$ ergibt. ■

Wir benötigen weiterhin einen Approximationssatz, der sich nicht unmittelbar aus Satz 5 ergibt.

SATZ 6. *Es sei E ein topologischer Vektorraum, A eine abgeschlossene Teilmenge von E und f eine kompakte Abbildung von A in E. Weiter sei B eine in E abgeschlossene Teilmenge von A, $[0,a]$ ein reelles Intervall mit $0 \leqslant a < +\infty$ und $u \neq o$ ein beliebiges festes Element aus E. Zu jeder Nullumgebung V von E existiere eine Abbildung $h_V\colon A \to E$ mit $f(x) - h_V(x) \in V$ $(x \in A)$, ein $x_V \in B$ und ein $\lambda_V \in [0,a]$ mit $h_V(x_V) = x_V - \lambda_V u$. Dann existiert auch ein $x_0 \in B$ und ein $\lambda_0 \in [0,a]$ mit $f(x_0) = x_0 - \lambda_0 u$.*

Beweis. Wir nehmen an, daß für alle $x \in B$ und für alle $\lambda \in [0,a]$ stets $o \neq f(x) - x + \lambda u$ gilt. Die Menge M aller $z \in E$ der Gestalt $z = f(x) - x$ $(x \in B)$ ist nach Hilfssatz 2 abgeschlossen. Folglich ist auch die Menge $M + [0,a]u$ wegen der Kompaktheit von $K := [0,a] \cdot u$ abgeschlossen. Es gibt damit eine Nullumgebung V von E mit $f(x) - x - \lambda u \notin V$ für alle $x \in B$ und alle $\lambda \in [0,a]$. Nach Voraussetzung gibt es zu V ein $h_V\colon A \to E$, ein $x_V \in B$ und ein $\lambda_V \in [0,a]$ mit $f(x) - h_V(x) \in V$ für alle $x \in A$ und $h_V(x_V) = x_V - \lambda_V u$, woraus $f(x_V) - x_V + \lambda_V u \in V$ im Widerspruch zur Wahl von V folgt, somit gibt es ein $\lambda_0 \in [0,a]$ und ein $x_0 \in B$ mit $f(x_0) = x_0 - \lambda_0 u$. ■

3. Fixpunktsätze für kompakte Abbildungen in zulässigen topologischen Vektorräumen. Nachdem wir in der Einleitung die zulässigen topologischen Vektorräume definiert haben, wollen wir diese zunächst etwas näher untersuchen. Bekanntlich ist jeder lokalkonvexe topologische Vektorraum zulässig (s. z. B. [12], [14]). Andererseits existieren auch nicht lokalkonvexe, zulässige topologische Vektorräume, so daß diese Raumklasse eine echte Erweiterung der Klasse der lokalkonvexen topologischen Vektorräume darstellt. Bislang ist es noch nicht geklärt, ob die Forderung der Zulässigkeit überhaupt eine Einschränkung für einen topologischen Vektorraum bedeutet, denn man konnte noch für keinen topologischen Vektorraum nachweisen, daß er nicht zulässig ist. Beispiele für nicht lokalkonvexe zulässige topologische Vektorräume liefern die Räume L^p $(0<p<1)$ und $S(0,1)$ (Raum der Klassen der auf $[0,1]$ erklärten, reellen, meßbaren Funktionen, versehen mit der Topologie der Maßkonvergenz). Die Zulässigkeit dieser Räume wurde von Riedrich in [18] und [19] nachgewiesen. Weitere Beispiele zulässiger Räume findet man in [12] und [20]. Für zulässige Räume konnten in letzter Zeit eine Reihe interessanter Resultate hergeleitet werden (s. z. B. [15], [17], [20]). Dabei war der folgende leicht zu zeigende Sachverhalt von entscheidender Bedeutung:

Bemerkung 1. *Ein topologischer Vektorraum E ist genau dann zulässig, wenn jede kompakte Abbildung f mit Werten in E, die als Definitionsbereich einen topologischen Raum A besitzt, gleichmäßig Σ-approximierbar ist, wobei Σ das System der finiten Abbildungen von A in E ist.*

In der Einleitung erwähnten wir einen Fixpunktsatz für zulässige topologische Vektorräume, der von Landsberg [14] stammt. Landsberg [14] und Landsberg/Riedrich [15] benutzten beim Beweis entscheidend die Tatsache, daß eine abgeschlossene und einfachberandete Nullumgebung ein Retrakt des zugehörigen topologischen Vektorraumes ist. Der nun folgende grundlegende Satz verzichtet auf die Forderung der einfachen Berandung der Nullumgebung und stützt sich im wesentlichen beim Beweis auf Satz 1, Hilfssatz 4 und Folgerung 2 dieser Arbeit.

Hauptsatz 1. *Es sei E ein zulässiger topologischer Vektorraum, W eine abgeschlossene Nullumgebung von E und f eine kompakte Abbildung von W in E mit der Eigenschaft, daß für jedes $x\in\partial W$ mit $f(x)=ax$ die Beziehung $a\leqslant 1$ gilt. Dann besitzt f einen Fixpunkt.*

Beweis. Hätte f keinen Fixpunkt, so existierte wegen der Zulässigkeit von E und Hilfssatz 3 zu jeder Nullumgebung V von E eine finite, fixpunktfreie Abbildung h_V von W in E, die ihre Werte in dem endlichdimensionalen Teilraum E_V von E besitzt und für die $f(x)-h_V(x)\in V$ für alle $x\in W$ gilt. Dann ist $W\cap E_V=W_V$ bzgl. der induzierten Topologie von E_V eine abgeschlossene Nullumgebung in E_V. Wir betrachten die Einschränkung $\tilde{h}_V$ von h_V auf W_V. Dann existiert nach Satz 1 ein $x_V\in \partial_V W_V\subset\partial W$ und ein $\lambda_V\in(0,1)$ mit $x_V=\lambda_V\tilde{h}_V(x_V)$ ($\partial_V W_V$ bezeichne die Randbildung von W_V bzgl. der Topologie von E_V). Da V beliebig gewählt war, existiert nach Folgerung 3 ein $\lambda_0\in(0,1)$ und ein $x_0\in\partial W$ mit $x_0=\lambda_0 f(x_0)$. Mit $a_0=\dfrac{1}{\lambda_0}>1$ ergibt sich damit ein Widerspruch zur Voraussetzung. Folglich hat f einen Fixpunkt. ■

Hauptsatz 1 stellt eine Übertragung eines Ergebnisses von Yamamuro [23] auf zulässige topologische Vektorräume dar. Yamamuro bewies den Sachverhalt für lokalkonvexe topologische Vektorräume mit Hilfe des Abbildungsgrades. Es sei bemerkt, daß Hauptsatz 1 auch mit Hilfe des in [8] bereitgestellten Abbildungsgrades für kompakte Vektorfelder in nicht notwendig lokalkonvexen (aber zulässigen) topologischen Vektorräumen bewiesen werden kann (vgl. dazu [8], Satz 7).

Als Vorbild für die nächste Aussage dient der Fixpunktsatz von Rothe [20], in dem bekanntlich die Existenz eines Fixpunktes für kompakte Abbildungen f von einer abgeschlossenen Kugel K um den Nullpunkt eines Banachraumes E in E mit $\|f(x)\|\leqslant\|x\|$ für alle $x\in\partial K$ bewiesen wird.

Bemerkung 2. *Es seien E, W und f wie in Hauptsatz 1 erklärt. Weiter sei p ein auf E definiertes, positiv homogenes Funktional, das auf ∂W positiv ist. Gilt $p\big(f(x)\big)\leqslant p(x)$ für jedes $x\in\partial W$, so hat f einen Fixpunkt.*

Beweis. Angenommen, f besitze keinen Fixpunkt. Dann existiert nach Hauptsatz 1 ein $x_0\in\partial W$ und ein $\lambda_0\in(0,1)$ mit $x_0=\lambda_0 f(x_0)$. Damit ist aber $p(x_0)=p\big(\lambda_0 f(x_0)\big)=\lambda_0 p\big(f(x_0)\big)<p\big(f(x_0)\big)$ im Widerspruch zur Voraussetzung. ■

Oftmals wird es günstig sein, als spezielles Funktional das Minkowskifunktional $m(x)$ der abgeschlossenen Nullumgebung W zu benutzen $\left(m(x)=\inf\left\{\varrho>0\colon \dfrac{1}{\varrho}\cdot x\in W\right\}\right)$. Ist speziell W noch einfachberandet, ergibt sich dann aus Bemerkung 2 eine von Landsberg in [14] bewiesene Verallgemeinerung des Rotheschen Satzes. Natürlich enthält Bemerkung 2 den Satz von Rothe als Spezialfall, da wir für E einen normierten Raum, für W die Einheitskugel und für p die Norm benutzen können.

Bemerkung 3. *E, W und f seien wie in Hauptsatz 1 definiert. Weiter sei p ein auf E erklärtes, positiv homogenes Funktional, das auf ∂W nicht verschwindet. Gilt für jedes $x\in\partial W$ stets $p^2\big(f(x)-x\big)\geqslant p^2\big(f(x)\big)-p^2(x)$, so besitzt f einen Fixpunkt.*

Beweis. Angenommen, f besitze keinen Fixpunkt. Nach Hauptsatz 1 existiert dann ein $\lambda_0>1$ und ein $x_0\in\partial W$ mit $f(x_0)=\lambda_0 x_0$. Nach Voraussetzung gilt $p^2\big(f(x_0)-x_0\big)=p^2\big((\lambda_0-1)x_0\big)=(\lambda_0-1)^2p^2(x_0)\geqslant p^2(\lambda_0 x_0)-p^2(x_0)=(\lambda_0^2-1)p^2(x_0)$. Wegen $p(x_0)\neq 0$ folgt daraus $\lambda_0\leqslant 1$ im Widerspruch zu $\lambda_0>1$. Somit hat f einen Fixpunkt. ■

Ist in Bemerkung 3 die Nullumgebung W außerdem noch einfachberandet und p das Minkowskifunktional von W, so ergibt sich aus Bemerkung 3 eine Aussage von Landsberg [14].

Setzen wir für E einen normierten Raum, für W eine Kugel um den Nullpunkt and für p die Norm voraus, so geht Bemerkung 3 in den bekannten Fixpunktsatz von Altman [1] über.

Wir wollen nun eine Ergänzung von Hauptsatz 1 beweisen, die sich auf Satz 2 stützt.

Satz 7. *Es sei E ein zulässiger und lokalbeschränkter topologischer Vektorraum, W eine abgeschlossene und beschränkte Nullumgebung in E sowie f eine kompakte Abbildung von W in E mit folgenden Eigenschaften:*

1. $o \notin \overline{f(\partial W)}$.
2. *Für jedes $x \in \partial W$ mit $f(x) = ax$ gelte $a \geqslant 1$.*

Dann hat f eine Fixpunkt.

Beweis. V sei eine beliebige Nullumgebung, die wir o. B. d. A. als beschränkt und sternförmig voraussetzen können. Dann ist $\Omega = \left\{\frac{1}{n}\cdot V\right\}_{n\in N}$ eine Nullumgebungsbasis von E. Angenommen, f habe keinen Fixpunkt. Dann existiert nach Hilfssatz 3 zu jedem $n \in N$ eine finite, fixpunktfreie Abbildung h_n von W in einen endlichdimensionalen Teilraum E_n von E, so daß $f(x)-h_n(x) \in \frac{1}{n} V$ für alle $x \in W$ gilt. Nach Satz 2 gibt es ein $\lambda_n \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$ und ein $x_n \in \partial_n W_n \subset \partial W$ mit $\lambda_n h_n(x_n) = x_n$ (∂_n bezeichnet wieder die Randbildung in E_n). Die Folge $(\lambda_n)_{n\in N}$ ist dann beschränkt. Wäre nämlich o. B. d. A. $(\lambda_{n'})_{n'\in N}$ eine gegen ∞ konvergierende Teilfolge von $(\lambda_n)_{n\in N}$, so müßte wegen der Beschränktheit von W die Folge $h_{n'}(x_{n'})$ gegen o konvergieren. Da f eine kompakte Abbildung ist, gilt wieder o. B. d. A. $f(x_{n'}) \to z \in \overline{f(\partial W)}$. Aus $f(x_{n'}) - h_{n'}(x_{n'}) \in \frac{1}{n'} V$ und aus der Beschränktheit von V folgt dann die Gültigkeit von $z = o$ im Widerspruch zu $o \notin \overline{f(\partial W)}$. Folglich gibt es ein $B > 1$ und ein $A < 0$, so daß $A \leqslant \lambda_n \leqslant B$ für alle $n \in N$ gilt. Also gehört λ_n für jedes $n \in N$ der beschränkten Menge $[A, 0] \cup [1, B]$ an. Dann liegt in mindestens einem dieser disjunkten Intervalle eine unendliche Teilfolge $(\lambda_{n_k})_{k\in N}$. Somit gibt es nach Satz 5 ein $\lambda_0 \in [A, 0] \cup [1, B]$ und ein $x_0 \in \partial W$ mit $\lambda_0 f(x_0) = x_0$. Wegen $x_0 \in \partial W$ und $f(x) \neq x$ $(x \in W)$ gilt sogar $\lambda_0 \in [A, 0) \cup (1, B]$ und wir haben wegen $\lambda_0 < 1$ einen Widerspruch zur Voraussetzung. Somit besitzt f einen Fixpunkt in W. ■

In der nichtlinearen Analysis kommt es oft vor, daß Lösungen gewisser Gleichungen von Interesse sind, die in einem gewissen Kegel des zugrundeliegenden Raumes enthalten sind (eine konvexe Menge K in einem linearen Raum E heiße Kegel, wenn $o \in K$ gilt und aus $x \in K$ die Relation $-x \notin K$ folgt). So kann zum Beispiel nach positiven Lösungen von Integralgleichungen oder Gleichungssystemen gefragt werden. Wir geben nun einen Fixpunktsatz an, der es gestattet, Lösungsaussagen für Probleme mit derartigen Nebenbedingungen zu machen, und der Satz 3 auf unendlichdimensionale topologische Vektorräume überträgt.

Hauptsatz 2. *Es sei E ein topologischer Vektorraum, W eine abgeschlossene Nullumgebung von E und K eine zulässige, abgeschlossene und konvexe Teilmenge von E, die den Nullpunkt enthält. Weiter sei f eine kompakte Abbildung von $W \cap K$ in K mit der Eigenschaft, daß für jedes $x \in K \cap \partial W$ mit $f(x) = ax$ die Beziehung $a \leqslant 1$ gilt. Dann besitzt f einen Fixpunkt.*

Der Beweis kann prinzipiell wie der Beweis von Hauptsatz 1 geführt werden und soll daher hier übergangen werden. Speziell gilt die Fixpunktaussage, wenn K ein zulässiger Kegel ist.

Bemerkung 4. *Es sei E ein topologischer Vektorraum und K eine zulässige, abgeschlossene und konvexe Teilmenge von E. Dann besitzt jede kompakte Selbstabbildung von K einen Fixpunkt.*

Beweis. Wir ersetzen in Hauptsatz 2 die Nullumgebung W durch E und beachten, daß die Fixpunkteigenschaft einer Menge in einem topologischen Vektorraum invariant gegenüber Translationen ist. ■

Diese Bemerkung ist eine Übertragung des Fixpunktsatzes von Tychonoff auf beliebige topologische Vektorräume, da bekanntlich in einem lokalkonvexen topologischen Vektorraum jede konvexe Teilmenge zulässig ist.

Wir wollen nun den Satz 4 der Arbeit auf zulässige, lokalbeschränkte topologische Vektorräume übertragen.

Hauptsatz 3. *Es sei E ein zulässiger, lokalbeschränkter topologischer Vektorraum und W eine abgeschlossene, beschränkte Nullumgebung von E. Weiter sei f eine kompakte Abbildung von $\overline{E\setminus W}$ in E mit der Eigenschaft, daß die Abbildung $I_{\overline{E\setminus W}}-f$ auf ∂W eine Richtung ausläßt. Dann besitzt f einen Fixpunkt.*

Beweis. Wir nehmen wieder an, daß f keinen Fixpunkt besitzt. Sei $o \neq u \in E$ beliebig gewählt und V eine beliebige beschränkte Nullumgebung von E, die ganz in W liegt. Dazu gibt es wegen Hilfssatz 3 eine fixpunktfreie kompakte Abbildung h_V von $\overline{E\setminus W}$ in einen endlichdimensionalen Teilraum E_V von E (der o. B. d. A. das Element u enthält), so daß $f(x)-h_V(x) \in V$ für alle $x \in \overline{E\setminus W}$ gilt. Dann ist die Einschränkung $\tilde{h}_V$ von h_V auf $E_V \cap (\overline{E\setminus W})$ eine fixpunktfreie kompakte Abbildung von $E_V \cap (\overline{E\setminus W}) = \overline{E_V \setminus (E_V \cap W)} = \overline{E_V \cap W_V}$, wobei $W_V = E_V \cap W$ bezüglich der induzierten Topologie eine abgeschlossene Nullumgebung in E_V ist. Nach Satz 4 existiert ein $\beta_V > 0$ und ein $x_V \in \partial_V W_V$ mit $h_V(x_V) = x_V - \beta_V u$. Nun gehört $\beta_V u$ wegen $V \subset W$ der beschränkten Menge $-f(\partial W) + \partial W + W$ an. Wegen $u \neq o$ existiert deswegen ein $A > 0$ mit $\beta_V < A$ für alle $V \subset W$. Damit können wir Satz 6 anwenden, wonach es ein $\beta_0 \in [0, A]$

und ein $x_0 \in \partial W$ mit $f(x_0) = x_0 - \beta_0 u$ gibt. Wegen der Fixpunktfreiheit von f gilt sogar $\beta_0 \in (0, A]$. Damit läßt die Abbildung $I_{\overline{E \setminus W}} - f$ auf ∂W keine Richtung aus, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. ■

Für kompakte Abbildungen, die außerhalb einer Nullumgebung definiert sind, wollen wir zum Abschluß dieses Abschnittes einen Fixpunktsatz beweisen, der in unendlichdimensionalen normierten Räumen gilt und der als Folgerung die klassische Eigenwertaussage von Birkhoff und Kellogg [2] enthält.

Satz 8. *Es sei E ein unendlichdimensionaler normierter Raum, W eine einfachberandete, beschränkte und abgeschlossene Nullumgebung und f eine kompakte Abbildung von $\overline{E \setminus W}$ in E mit folgenden Eigenschaften:*

1. $o \notin \overline{f(\partial W)}$.
2. *Für jedes $x \in \partial W$ mit $f(x) = ax$ gelte $a \notin (0, 1)$.*

Dann hat f einen Fixpunkt in $\overline{E \setminus W}$.

Beweis. Es sei K eine abgeschlossene Kugel um den Nullpunkt von E mit $K \cap \overline{f(\partial W)} = \emptyset$ und $K \subset W$. Nach einem Ergebnis von Dugundji [4] ist ∂K ein Retrakt von K. Eine zugehörige Retraktion sei r (d.h. $r(K) = \partial K$ und $r|\partial K = I_{\partial K}$). Weiter sei m das Minkowskifunktional von W. Wir setzen

$$R(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in \overline{E \setminus W}, \\ \dfrac{x}{m(x)} & \text{für } x \in W \setminus K, \\ \dfrac{r(x)}{m\big(r(x)\big)} & \text{für } x \in K. \end{cases}$$

Dann wird durch $g = f \cdot R$ eine kompakte Selbstabbildung von E definiert, welche nach dem Fixpunktsatz von Schauder einen Fixpunkt y besitzt. Wir nehmen an, daß y nicht in $\overline{E \setminus W}$ liegt. Dann muß y wegen $\overline{f(\partial W)} \cap K = \emptyset$ in $\overline{W \setminus K}$ liegen. Daraus folgt $m(y) \dfrac{y}{m(y)} = f\left(\dfrac{y}{m(y)}\right)$. Setzen wir $x_0 = \dfrac{y}{m(y)} \in \partial W$, so gilt $f(x_0) = m(y) x_0$ mit $0 < m(y) < 1$ im Widerspruch zur Voraussetzung 2. Folglich liegt y in $\overline{E \setminus W}$.

Folgerung 4 (Birkhoff–Kellogg–Theorem). *Es sei $f\colon \partial B \to E$ eine kompakte Abbildung des Randes der Einheitskugel B eines unendlichdimensionalen normierten Raumes E in E mit $o \notin \overline{f(\partial B)}$. Dann gibt es ein $\lambda_0 > 0$ und ein $x_0 \in \partial B$ mit $f(x_0) = \lambda_0 x_0$.*

Beweis. Offensichtlich ist die Abbildung $g(x) = f\left(\dfrac{x}{\|x\|}\right)$ $(x \in \overline{E \setminus B})$ eine kompakte Abbildung von $\overline{E \setminus B}$ in E. Besitzt g einen Fixpunkt y_0, so liefert, wie man leicht zeigt, $x_0 = \dfrac{y_0}{\|y_0\|}$ und $\lambda_0 = \|y_0\|$ das Verlangte. Besitzt g keinen Fixpunkt, so läßt sich wegen $o \notin \overline{g(\partial B)}$ auf g der Satz 8 anwenden und es gibt ein $\lambda_0 \in (0, 1)$ und ein $x_0 \in \partial B$ mit $g(x_0) = \lambda_0 x_0$. Wegen $x_0 \in \partial B$ gilt $g(x_0) = f(x_0)$ und wir haben $f(x_0) = \lambda_0 x_0$. ■

4. Beispiele. Zur Illustration unserer Fixpunktaussagen wollen wir in diesem Abschnitt zwei Anwendungsbeispiele angeben.

a) Beispiel zu Hauptsatz 1. Wie üblich bezeichnen wir mit $S(0, 1)$ den Raum aller (Klassen der) endlichen, meßbaren Funktionen über $[0, 1]$. Wir arbeiten stets mit geeignet gewählten Repräsentanten der Klassen. Bekanntlich besitzt der Raum $S(0, 1)$ folgende Eigenschaften.

1. Der Raum $S(0, 1)$ ist ein zulässiger metrischer Vektorraum mit der Metrik

$$d(x, y) = \int_0^1 \frac{|x(t) - y(t)|}{1 + |x(t) - y(t)|} \mu(dt),$$

woraus folgt, daß die Konvergenzart in diesem Raum die Maßkonvergenz ist.

2. Der Raum $S(0, 1)$ ist vollständig.
3. Der Raum $S(0, 1)$ ist nicht lokalkonvex.

Satz 9. *Es sei $K(s, t)$ eine in $[0, 1] \times [0, 1]$ stetige, reellwertige Funktion mit $|K(s, t)| \leqslant 1$ für $s, t \in [0, 1]$. Dann hat für jedes $\lambda \in [-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$ und jedes $y \in S(0, 1)$ mit $|y(s)| \leqslant \dfrac{k}{2} < \frac{1}{2}$ $(s \in (0, 1))$ die Integralgleichung*

$$y(s) = x(s) - \lambda \int_0^1 K(s, t) \frac{x(t)}{1 + |x(t)|} dt$$

eine Lösung $x_0 \in S(0, 1)$ mit $d(x_0, o) \leqslant k$.

Beweis. Es sei $W = \{x \in S\colon d(x, o) \leqslant k\}$. Wir betrachten den Operator $F\colon W \to S$, der durch

$$\big(F(x)\big)(s) = y(s) + \lambda \int_0^1 K(s, t) \frac{x(t)}{1 + |x(t)|} dt$$

definiert ist. Dann ist F eine stetige Abbildung von W in S. Sei nämlich $(x_n)_{n \in N}$ eine Folge aus W mit $x_n \to x \in W$, dann folgt unmittelbar $\dfrac{x_n}{1 + |x_n|} \to \dfrac{x}{1 + |x|}$, und nach dem Satz von Lebesgue über den Grenzübergang unter dem Integralzeichen ergibt sich $F(x_n) \to F(x)$.

Weiterhin ist $\overline{F(W)}$ kompakt. Dazu zeigen wir, daß für den Operator $F'\colon W\to C$, der durch $\big(F'(x)\big)(s) = \int\limits_0^1 K(s,t)\dfrac{x(t)}{1+|x(t)|}\,dt$ definiert sei, die Menge $F'(W)$ relativ kompakt im Raum $C(0,1)$ (versehen mit der üblichen Normtopologie $\|x\| = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|$, $x\in C(0,1)$) ist. Dann ist die Menge $F'(W)$ auch relativ kompakt im Raum $S(0,1)$, denn im Raum $C(0,1)$, als Teilmenge des Raumes $S(0,1)$ aufgefaßt, zieht die Konvergenz bezüglich der Norm die bezüglich der Metrik des Raumes S nach sich. Nach dem Satz von Arzela–Ascoli folgt unter Berücksichtigung der gleichmäßigen Stetigkeit von $K(s,t)$ aus den Ungleichungen

$$\big|\big(F'(x)\big)(s)\big|\leqslant 1 \quad\text{und}\quad \big|\big(F'(x)\big)(s_1)-\big(F'(x)\big)(s_2)\big|\leqslant k\cdot\max|K(s_1,t)-K(s_2,t)|$$

die relative Kompaktheit von $F'(W)$ in $C(0,1)$ und damit in $S(0,1)$. Folglich ist $\overline{F'(W)}$ kompakt in $S(0,1)$. Damit ist F also eine kompakte Abbildung von W in S. Sei nun $F(x) = ax$ für ein $x\in\partial W$ (d. h. $d(x,o) = k$). Wir erhalten dann $|a||x(s)|\leqslant |y(s)|+|\lambda|\int\limits_0^1 |K(s,t)|\dfrac{|x(t)|}{1+|x(t)|}\,dt \leqslant \dfrac{k}{2}+2|\lambda|\dfrac{k}{2} \leqslant k$, woraus $|a||x(s)|\leqslant k\big(1+|x(s)|\big)$ folgt. Integration liefert

$$|a|\int\limits_0^1 \frac{|x(s)|}{1+|x(s)|}\,ds = |a|k\leqslant k,$$

woraus $|a|\leqslant 1$ oder auch $a\leqslant 1$ folgt.

Nach Hauptsatz 1 gibt es somit ein $x_0\in W$ mit $x_0 = F(x_0)$. ■

b) **Beispiel zu Hauptsatz 3.** Wie üblich bezeichnen wir mit $L^p(0,1)$ $(0<p<1)$ den Raum aller Klassen der (meßbaren) zur p-ten Potenz über $[0,1]$ integrierbaren reellen Funktionen. Die Topologie des Raumes L^p $(0<p<1)$ kann bekanntlich mittels der p-Norm $|||x||| = \int\limits_0^1 |x(t)^p|\,dt$ $(x\in L^p)$ erklärt werden, die $L^p(0,1)$ zu einem nicht lokalkonvexen, lokalbeschränkten zulässigen topologischen Vektorraum macht. Wir arbeiten wieder mit geeignet gewählten Repräsentanten der Klassen.

SATZ 10. *Es seien ein $p\in(0,1)$ und ein $t\in(0,1)$ sowie zwei Elemente f und g aus $C(0,1)$ (versehen mit der Supremumsnorm) gegeben. Dann gibt es zu jeder oberen Schranke M von f und g, zu jedem $y\in L^p(0,1)$ mit $|||y|||\leqslant t$, zu jedem $u\in L^p(0,1)$ und jedem reellen k mit $1+\dfrac{1}{(1-t)^p}<k^{1+p}$ ein $x_0\in L^p(0,1)$ und ein $\beta_0>0$ mit $|||x_0||| = k$ und*

$$Mx_0(s)-\beta_0 u(s) = \frac{f(s)}{|||x_0|||}+\frac{g(s)}{|||x_0-y|||}.$$

Beweis. Es sei $W = \{x\in L^p(0,1)\colon |||x|||\leqslant k\}$. Auf $\overline{E\setminus W}$ betrachten wir den Operator F, definiert durch

$$\big(F(x)\big)(s) = \frac{f(s)}{M|||x|||}+\frac{g(s)}{M|||x-y|||}.$$

Dann gilt:

1. F ist eine Abbildung von $\overline{E\setminus W}$ in $L^p(0,1)$.

Das folgt unmittelbar aus $|||F(x)|||\leqslant \dfrac{1}{k^p}+\dfrac{1}{k^p(1-t)^p}<k$.

2. F ist stetig.

Das folgt unmittelbar aus der Stetigkeit der p-Norm und der Positivität von $|||x|||$ und $|||x-y|||$ auf $\overline{E\setminus W}$.

3. $\overline{F(E\setminus W)}$ ist kompakt.

Dazu zeigen wir, daß $F(\overline{E\setminus W})$ relativ kompakt in $C(0,1)$ ist. Wegen $f,g\in C(0,1)$ und der Positivität von $|||x|||$ und $|||x-y|||$ auf $\overline{E\setminus W}$ gilt $F(\overline{E\setminus W})\subset C(0,1)$. Aus den beiden Ungleichungen $\big|\big(F(x)\big)(s)\big|\leqslant\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k(1-t)}$ und $\big|\big(F(x)\big)(s_1)-\big(F(x)\big)(s_2)\big|\leqslant\dfrac{|f(s_1)-f(s_2)|}{Mk}+\dfrac{|g(s_1)-g(s_2)|}{Mk(1-t)}$ folgt wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f und g aus dem Satz von Arzela–Ascoli die relative Kompaktheit von $F(\overline{E\setminus W})$ in $C(0,1)$ und damit in $L^p(0,1)$.

Wegen $|||F(x)|||<\dfrac{1}{k^p}+\dfrac{1}{k^p(1-t)^p}<k$ gilt $F(x)\in\operatorname{int}(W)$ und damit besitzt F keinen Fixpunkt. Nach Hauptsatz 3 gibt es ein $x_0\in\partial W$ und ein $\beta>0$ mit

$$Mx_0(s)-M\beta u(s) = \frac{f(s)}{|||x_0|||}+\frac{g(s)}{|||x_0-y|||}.\ ■$$

Literatur

[1] M. Altman, *A fixed point theorem in Banach spaces*, Bull. Acad. polon. Sci. 5 (1957), S. 89–92.

[2] G. D. Birkhoff, and O. D. Kellogg, *Invariant points in function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 23 (1922), S. 96–115.

[3] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques*, Chap. I–II, Act. Sci. Ind. 1189, Paris 1953.

[4] J. Dugundji, *An extension of Tietze's theorem*, Pacific J. Math. 1 (1951), S. 353–367.

[5] A. Granas, *The theory of compact vector fields and some of its applications to topology of functional spaces* (I), Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 30, Warszawa 1962.

[6] S. Hahn, und K.-F. Pötter, *Eine Verallgemeinerung eines Satzes von Schaefer*, Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden 19 (1970), S. 1383–1385.
[7] — — *Über Fixpunkte kompakter Abbildungen in topologischen Vektorräumen* Dissertation Techn. Univ. Dresden 1971.
[8] — und T. Riedrich, *Der Abbildungsgrad kompakter Vektorfelder in nicht notwendig lokalkonvexen topologischen Vektorräumen*, Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden, 22 (1973), S. 37–42.
[9] L. W. Kantorowitsch und G. P. Akilow, *Funktionalanalysis in normierten Räumen*, Berlin 1964.
[10] J. L. Kelley, *General topology*, Princeton–Toronto–London–New York 1955.
[11] V. Klee, *Shrinkable neighbourhoods in Hausdorff linear spaces*, Math. Ann. 141 (1960), S. 281–285.
[12] — *Leray–Schauder theory without local convexity*, Math. Ann. 141 (1960), S. 286–296.
[13] M. A. Krasnoselskii, *Positive Lösungen von Operatorengleichungen* (russ.) 1962.
[14] M. Landsberg, *Über die Fixpunkte kompakter Abbildungen*, Math. Ann. 154 (1964), S. 427–431.
[15] — und T. Riedrich, *Über positive Eigenwerte kompakter Abbildungen in topologischen Vektorräumen*, Math. Ann. 163 (1966), S. 50–61.
[16] J. Reinermann, *Über Fixpunkte kontrahierender Abbildungen in uniformen Räumen und deren Darstellung durch konvergente Iterationsverfahren*, Ber. der Ges. für Math. u. Datenverarb.: Bonn 1968.
[17] T. Riedrich, *Das Birkhoff-Kellogg-Theorem für lokal radial beschränkte Räume*, Math. Ann. 166 (1966), S. 264–276.
[18] — *Der Raum $S(0, 1)$ ist zulässig*, Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden 13 (1964), S. 1–6.
[19] — *Die Räume $L^p(0, 1)$ $(0 < p < 1)$ sind zulässig*, Wiss. Z. Techn Univ. Dresden 12 (1963), S. 1149–1152,
[20] — *Existenzsätze für positive Eigenwerte kompakter Abbildungen in topologischen Vektorräumen*, Habilitationsschrift, Techn. Univ. Dresden 1966.
[21] E. Rothe, *Zur Theorie der topologischen Ordnung und der Vektorfelder in Banachschen Räumen*, Compositio Math. 5 (1937), S. 177–197.
[22] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen*, Studia Math. 2 (1930), S. 171–180.
[23] S. Yamamuro, *Some fixed point theorems in localconvex spaces*, Yokohama Math. J. 11 (1963), S. 5–12.

Received August 15, 1972 (576)

STUDIA MATHEMATICA, T. L. (1974)

An imbedding theorem for $H^\circ(G, \Omega)$ spaces

by

NEIL S. TRUDINGER (St. Lucia, Australia)

Abstract. A vector-valued Orlicz space $L(G, \Omega)$ is defined for a convex function, G, of m variables and a domain, Ω, in Euclidean n space. When $m = n$, a norm can be introduced into $C_0^1(\Omega)$ by the taking the $L(G, \Omega)$ norm of the gradient of functions in $C_0^1(\Omega)$. By completion we obtain the space $H^\circ(G, \Omega)$. We prove an imbedding theorem for the space $H^\circ(G, \Omega)$ which includes as a special case an imbedding theorem established by Donaldson and Trudinger for Orlicz – Sobolev spaces.

§ 1. Introduction. In the paper [1], imbedding theorems are established for Orlicz–Sobolev spaces. In the present paper, we consider a more general class of spaces which permit different integral behaviour of derivatives in different directions and we derive the appropriate imbeddings into extended Orlicz spaces. The results extend those in [1] and the techniques we employ are on the whole a refinement and extension of those introduced there. Theorem 1, and its special cases which we treat, can be viewed as interesting extensions of the well-known Sobolev imbedding theorem. The body of the paper is divided into three sections. In Section 2, we discuss the convex functions, called G-functions, and the spaces $L(G, \Omega)$, in terms of which the imbedding theorem is cast. In Section 3, we introduce the $H^\circ(G, \Omega)$ spaces and discuss the imbedding theorem, Theorem 1, together with some applications. The proof of the main theorem is finally supplied in Section 4, along with a brief treatment of possible extensions.

§ 2. G-functions and $L(G, \Omega)$ spaces. Let $\boldsymbol{R}^m$ denote m-dimensional Euclidean space. A function $G\colon \boldsymbol{R}^m \to [0, \infty]$ will be called a *G-function* of m variables if it satisfies the following properties:

(i) $G(0) = 0$;

(ii) $G(\infty) = \infty$, that is, $\lim\limits_{|x|\to\infty} G(x) = \infty$;

(iii) G is *convex*, that is,

$$G\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leqslant \lambda G(x) + (1-\lambda) G(y)$$

for all $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, $x, y \in \boldsymbol{R}^m$;

(iv) G is *symmetric*, that is, $G(x) = G(-x)$ for all $x \in \boldsymbol{R}^m$;