Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen.

Erste Mitteilung [1])

von

S. MAZUR und W. ORLICZ (Lwów).

Das Studium der polynomischen Operationen (kurz Polynome) geht auf Herrn M. FRÉCHET zurück. Eine allgemeine Theorie der Operationen dieser besonders wichtigen Klasse wurde aber bisher nicht aufgestellt und die vorliegende Arbeit entstand eben aus einem Versuch dieses Problem anzugreifen. Die hier an die Spitze gestellte allgemeine Definition eines Polynoms stammt von Herrn S. BANACH; sie wurde von ihm bei noch nicht veröffentlichten Untersuchungen über die analytischen Operationen eingeführt.

§ 1.

1. Im folgenden denken wir uns zwei lineare Räume X und Y zu Grunde gelegt [2]). Die Werte aller weiterhin auftretenden Operationen gehören dem Raume Y an, und wo wir von einer Operation schlechtweg sprechen, meinen wir immer eine in X erklärte Operation.

Die Operation $U(x)$ heißt *additiv*, wenn stets $U(x'+x'')=U(x')+U(x'')$. Sind $X_1,..X_k$ lineare Räume und ist $U(x_1,..x_k)$ eine für $x_i\in X_i$ erklärte und inbezug auf jede Veränderliche x_i additive Operation, so nennt man sie *k-additiv*; alsdann ist ersichtlich $U(t_1x_1,..t_kx_k)=t_1..t_kU(x_1,..x_k)$ für rationale t_i.

[1]) Die Hauptergebnisse dieser Mitteilung wurden der Polnischen Mathematischen Gesellschaft (Abteilung Lwów) in der Sitzung vom 21. 12. 1933 mitgeteilt.

[2]) Wegen der Definition eines linearen Raumes vgl.: S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932, insb. p. 26—27.

Sei $U_k^*(x_1,..x_k)$ eine k-additive, für $x_i\in X$ erklärte Operation, und setzen wir $U_k(x)=U_k^*(x,..x)$ für $x\in X$; es ist dann $U_k(tx)=t^kU_k(x)$ für rationale t. Verschwindet die Operation $U_k(x)$ nicht identisch, so sagen wir, daß sie *rational-homogen k-ten Grades* ist; der Bequemlichkeit halber bezeichnen wir noch eine konstante Operation $U_0(x)$ als rational-homogen 0-ten Grades. Endlich verabreden wir: Eine Operation $U(x)$ soll *m-ten Grades* heißen, wenn $U(x)=U_0(x)+..+U_m(x)$, wobei die Operation $U_k(x)$ entweder identisch verschwindet oder rational-homogen k-ten Grades ist, und $U_m(x)\not\equiv 0$ für $m>0$.

Betrachten wir z. B. eine für reelle t erklärte Operation von der Form $U(t)=t^0y_0+..+t^my_m$, wo $y_k\in Y$; sie ist augenscheinlich höchstens m-ten Grades. Im nachstehenden wird häufig von der Bemerkung Gebrauch gemacht, daß eine Operation solcher Art durch ihre Werte in $m+1$ Punkten eindeutig bestimmt ist; es gilt sogar darüber hinaus:

1. *Sind $t_0,..t_m$ reell und voneinander verschieden, so gibt es reelle a_{ki} $(k,i=0,..m)$, so daß $y_k=a_{k0}\bar{y}_0+..+a_{km}\bar{y}_m$ für $\bar{y}_i=t_i^0y_0+..+t_i^my_m$, $y_k\in Y$.*

Dies impliziert u. a., daß jede Operation $U(x)$ höchstens m-ten Grades sich nur auf eine Weise in der Form $U(x)=U_0(x)+..+U_m(x)$ darstellen läßt, wo die Operation $U_k(x)$ entweder identisch verschwindet oder rational-homogen k-ten Grades ist; in der Tat, da $U(tx)=t^0U_0(x)+..+t^mU_m(x)$ für rationale t, so ist wegen 1., mit $t_i=i$, auch $U_k(x)=a_{k0}U(0x)+..+a_{km}U(mx)$. Die obige Darstellung einer Operation höchstens m-ten Grades soll *kanonisch* genannt werden. Man überlegt sich leicht auch folgendes: Ist $U(x)$ eine Operation m-ten Grades, wo $m>0$, und $U(tx)=t^kU(x)$ für rationale t, so ist $k=m$ und $U(x)=U_m(x)$.

Im Anschluß an die Definition einer rational-homogenen Operation k-ten Grades $U_k(x)$ für $k>0$ sei noch folgendes bemerkt. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß die k-additive Operation $U_k^*(x_1,..x_k)$, aus der $U_k(x)$ durch Gleichsetzen der Veränderlichen entsteht, symmetrisch ist; denn sonst ersetze man sie durch

$$\frac{1}{k!}\sum U_k^*(x_{\pi_1},..x_{\pi_k}),$$

wobei die Summation über alle Permutationen $\pi_1,..\pi_k$ von $1,..k$ zu erstrecken ist. Ist aber die Operation $U_k^*(x_1,..x_k)$ symmetrisch, so ist sie schon durch die Operation $U_k(x)$ eindeutig bestimmt. Denn es ist

$$U_k(t_1 x_1 + .. + t_k x_k) = \sum_{\nu_1+..+\nu_k=k} t_1^{\nu_1}..t_k^{\nu_k} \frac{k!}{\nu_1!..\nu_k!} U_k^*(\underbrace{x_1,..x_1}_{\nu_1},..\underbrace{x_k,..x_k}_{\nu_k})$$

für $x_i \in X$ und rationale t_i, wobei die Summe sich über alle Systeme ganzer nichtnegativer Zahlen $\nu_1,..\nu_k$ mit $\nu_1+..+\nu_k=k$ erstreckt; ist also $U_k(x)\equiv 0$, so ist stets

$$U_k^*(\underbrace{x_1,..x_1}_{\nu_1},..\underbrace{x_k,..x_k}_{\nu_k}) \equiv 0$$

und insbesondere $U_k^*(x_1,..x_k)\equiv 0$; damit ist aber schon alles bewiesen. Die symmetrische Operation $U_k^*(x_1,..x_k)$ soll als die *erzeugende Operation* von $U_k(x)$ bezeichnet werden.

2. Ist $U(x)$ eine Operation und sind $h_1,..h_n$ Elemente aus X, so definieren wir die Operation $\underset{h_1..h_n}{\Delta^n} U(x)$ rekurrent durch

$$\underset{h_1}{\Delta^1} U(x) = U(x+h_1) - U(x),$$

$$\underset{h_1..h_k}{\Delta^k} U(x) = \underset{h_k}{\Delta^1}\,(\underset{h_1..h_{k-1}}{\Delta^{k-1}} U(x)) \qquad (k=2,..n).$$

Sie läßt sich auch, wie man sofort bestätigt, in expliziter Form folgendermaßen darstellen

$$(1)\qquad \underset{h_1..h_n}{\Delta^n} U(x) = \sum_{\varepsilon_1,..\varepsilon_n=0}^{1} (-1)^{n-(\varepsilon_1+..+\varepsilon_n)} U(x+\varepsilon_1 h_1 + .. + \varepsilon_n h_n);$$

insbesondere für $h_1=h,..h_n=h$ geht daraus

$$(2)\qquad \underset{h..h}{\Delta^n} U(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} U(x+kh)$$

hervor.

Ist $U_k(x)$ eine rational-homogene Operation k-ten Grades, $U_k^*(x_1,..x_k)$ die erzeugende Operation von $U_k(x)$ und $h\in X$, so gilt

$$\underset{h}{\Delta^1} U_k(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} U_k^*(\underbrace{x,..x}_{i},\underbrace{h,..h}_{k-i});$$

mithin bildet ersichtlich $\underset{h}{\Delta^1} U_k(x)$ eine Operation höchstens $(k-1)$-ten Grades. Hieraus folgt schon unmittelbar, da ja stets $\underset{h}{\Delta^1} U_0(x) = 0$, falls $U_0(x)$ eine konstante Operation bezeichnet, daß allgemein für jede Operation $U(x)$ höchstens m-ten Grades, $\underset{h}{\Delta^1} U(x)$ eine Operation höchstens $(m-1)$-ten Grades ist $(m=1,2,..)$; durch wiederholte Anwendung ergibt sich

2. *Ist $U(x)$ eine Operation höchstens m-ten Grades, so gilt* $\underset{h_1..h_{m+1}}{\Delta^{m+1}} U(x) = 0$ *für* $h_k, x\in X$.

Wir wollen nun zeigen, daß umgekehrt jede nur der Bedingung $\underset{h..h}{\Delta^{m+1}} U(x) = 0$ für $h, x\in X$ genügende Operation $U(x)$, höchstens m-ten Grades ist. Dies ist trivial, wenn $m=0$; wir nehmen daher an, m sei eine natürliche Zahl. Den Ausgangspunkt des Beweises bildet die Identität

$$(3)\qquad U(x+nh) = U(x) + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \underset{h..h}{\Delta^k} U(x),$$

die man ganz einfach durch den Schluß von n auf $n+1$ verifizieren kann. Nach Annahme ist stets $\underset{h..h}{\Delta^{m+1}} U(x) = 0$ und mithin auch $\underset{h..h}{\Delta^k} U(x) = 0$, falls nur $k>m$; aus (3) folgt somit — wenn man noch $0, x$ an Stelle von x, h einsetzt —

$$U(nx) = U(0) + \sum_{k=1}^{m} \binom{n}{k} \underset{x..x}{\Delta^k} U(0);$$

dies erweist sich übrigens als gültig auch für $n=0$. Man ersieht hieraus, daß es jedenfalls Operationen $U_1(x),..U_m(x)$ gibt, so daß

$$(4)\qquad U(nx) = U(0) + \sum_{k=1}^{m} n^k U_k(x)$$

für $x\in X$ und ganze nichtnegative n; darin ist insbesondere die Gleichheit $U(x) = U_0(x) + .. + U_m(x)$ für $x\in X$ enthalten, wenn wir als $U_0(x)$ die Konstante $U(0)$ wählen. Es kommt nun alles darauf hinaus zu zeigen, daß $U_k(x)$ entweder identisch verschwindet, oder rational-homogen k-ten Grades ist; dabei darf $k>0$ angenommen werden. Wir setzen

(5) $$U_k^*(x_1,..x_k)=\frac{1}{k!}\underset{x_1..x_k}{\Delta^k}U_k(0)$$

für $x_i \in X$; es genügt zu beweisen: Die Operation $U_k^*(x_1,..x_k)$ ist k-additiv und $U_k^*(x,..x)=U_k(x)$ für $x \in X$.

Wegen (4) folgt zunächst aus 1., auf $t_i = i$ angewandt, daß stets $U_k(x)=a_{k0}U(0\,x)+..+a_{km}U(m\,x)$; nach dem vorangehenden ist somit stets $\underset{h..h}{\Delta^i}U_k(x)=0$ für $i>m$. Indem man also U, k durch U_k, i in (3) ersetzt, erhält man

(6) $$U_k(x+n\,h)=U_k(x)+\sum_{i=1}^{m}\binom{n}{i}\underset{h..h}{\Delta^i}U_k(x).$$

Bei Benutzung dieser Formel ergibt sich sofort mittels Induktion: Sind $h_1,..h_r$ Elemente aus X, dann gibt es Operationen $V_{\nu_1..\nu_r}(x)$ ($\nu_i=0,..m$), so daß

(7) $$U_k(x+n_1h_1+..+n_rh_r)=\sum_{\nu_1,..\nu_r=0}^{m}n_1^{\nu_1}..n_r^{\nu_r}V_{\nu_1..\nu_r}(x)$$

für $x \in X$ und ganze nichtnegative n_i. Für das weitere kommt übrigens nur der Spezialfall $r=k+1$, $x=0$ zur Anwendung; alsdann nimmt (7), wenn $y_{\nu_1..\nu_{k+1}}=V_{\nu_1..\nu_{k+1}}(0)$ gesetzt wird, die Form

(8) $$U_k(n_1h_1+..+n_{k+1}h_{k+1})=\sum_{\nu_1,..\nu_{k+1}=0}^{m}n_1^{\nu_1}..n_{k+1}^{\nu_{k+1}}y_{\nu_1..\nu_{k+1}}$$

an. Hierin ist aber $y_{\nu_1..\nu_{k+1}}=0$, falls $\nu_1+..+\nu_{k+1}\neq k$. Denn zunächst lehrt die aus (4) für ganze nichtnegative p, n und $x \in X$ unmittelbar folgende Beziehung

$$U(0)+\sum_{k=1}^{m}(p\,n)^kU_k(x)=U(0)+\sum_{k=1}^{m}p^kU_k(n\,x),$$

daß $U_k(n\,x)=n^kU_k(x)$; sodann entnehmen wir aus (8), daß

$$\sum_{\nu_1,..\nu_{k+1}=0}^{m}(n\,n_1)^{\nu_1}..(n\,n_{k+1})^{\nu_{k+1}}y_{\nu_1..\nu_{k+1}}=n^k\sum_{\nu_1,..\nu_{k+1}=0}^{m}n_1^{\nu_1}..n_{k+1}^{\nu_{k+1}}y_{\nu_1..\nu_{k+1}}$$

für ganze nichtnegative n_i, n und mithin $n^{\nu_1+..+\nu_{k+1}}y_{\nu_1..\nu_{k+1}}= =n^k y_{\nu_1..\nu_{k+1}}$, also $n^{\nu_1+..+\nu_{k+1}}=n^k$ für $y_{\nu_1..\nu_{k+1}}\neq 0$, d. h. $\nu_1+..+\nu_{k+1}=k$ für $y_{\nu_1..\nu_{k+1}}\neq 0$, wie behauptet. Man erkennt so, daß (8) sich in der einfacheren Gestalt

(9) $$U_k(n_1h_1+..+n_{k+1}h_{k+1})=\sum_{\nu_1+..+\nu_{k+1}=k}n_1^{\nu_1}..n_{k+1}^{\nu_{k+1}}y_{\nu_1..\nu_{k+1}}$$

schreiben läßt. Ersetzt man nun U, n, x durch $U_k, k+1, 0$ in (1), so kommt wegen (9)

(10) $$\underset{h_1..h_{k+1}}{\Delta^{k+1}}U_k(0)=$$

$$\sum_{\nu_1+..+\nu_{k+1}=k}\Big(\sum_{\varepsilon_1,..\varepsilon_{k+1}=0}^{1}(-1)^{k+1-(\varepsilon_1+..+\varepsilon_{k+1})}\varepsilon_1^{\nu_1}..\varepsilon_{k+1}^{\nu_{k+1}}\Big)y_{\nu_1..\nu_{k+1}};$$

ferner gilt

(11) $$\sum_{\varepsilon_1,..\varepsilon_{k+1}=0}^{1}(-1)^{k+1-(\varepsilon_1+..+\varepsilon_{k+1})}\varepsilon_1^{\nu_1}..\varepsilon_{k+1}^{\nu_{k+1}}=(1-0^{\nu_1})..(1-0^{\nu_{k+1}}).$$

Aus (10) und (11) folgt ohne weiteres

(12) $$\underset{h_1..h_{k+1}}{\Delta^{k+1}}U_k(0)=0,$$

da es zu jedem System ganzer nichtnegativer Zahlen $\nu_1,..\nu_{k+1}$ mit $\nu_1+..+\nu_{k+1}=k$ ein i mit $\nu_i=0$, also $0^{\nu_i}=1$, gibt.

Damit sind wir aber schon am Ziel. Erstens: Sind $x_1', x_1'', x_2,..x_k$ Elemente aus X, so leitet man aus (5) ohne Schwierigkeit

$$U_k(x_1'+x_1'', x_2,..x_k)=U_k(x_1', x_2,..x_k)+U_k(x_1'', x_2,..x_k)+\frac{1}{k!}\underset{x_1'\,x_1''\,x_2..x_k}{\Delta^{k+1}}U_k(0)$$

her; daraus ergibt sich, indem man (12) mit $h_1=x_1'$, $h_2=x_1''$, $h_3=x_2,..h_{k+1}=x_k$ anwendet, daß $U_k^*(x_1,..x_k)$ inbezug auf x_1 additiv ist; da hierbei $U_k^*(x_1,..x_k)$, wie aus (5) einleuchtet, eine symmetrische Operation von $x_1,..x_k$ bildet, so ist $U_k^*(x_1,..x_k)$ k-additiv. Zweitens: Nach (12) mit $h_1=h,..h_{k+1}=h$ ist $\underset{h..h}{\Delta^{k+1}}U_k(0)=0$ und daher auch $\underset{h..h}{\Delta^i}U_k(0)=0$ für $i>k$; ersetzt man x, h durch $0, x$ in (6), so folgt

$$U_k(n\,x)=U_k(0)+\sum_{i=1}^{k}\binom{n}{i}\underset{x..x}{\Delta^i}U_k(0);$$

ordnet man nun die rechte Seite nach Potenzen von n, so erhält n^k wegen (5) den Koeffizient $U_k^*(x,..x)$ und da, wie wir schon wissen, $U_k(nx) = n^k U_k(x)$, so ist $U_k^*(x,..x) = U_k(x)$ für $x \in X$.

Somit ist bewiesen

3. *Ist $U(x)$ eine Operation mit $\underset{h..h}{\Delta^{m+1}} U(x) = 0$ für $h, x \in X$, so ist sie höchstens m-ten Grades.*

Aus 2. und 3. folgt

Satz I. *Damit die Operation $U(x)$ höchstens m-ten Grades sei, ist notwendig und hinreichend, daß $\underset{h..h}{\Delta^{m+1}} U(x) = 0$ für $h, x \in X$ sei.*

Eine Bemerkung möge hier noch hinzugefügt werden:

4. *Ist $U(x)$ eine Operation mit $\underset{h_1..h_{m+1}}{\Delta^{m+1}} U(0) = 0$ für $h_k \in X$, so ist sogar $\underset{h_1..h_{m+1}}{\Delta^{m+1}} U(x) = 0$ für $h_k, x \in X$.* — Dies kann man sofort mittels Induktion nachweisen.

3. Ist $U_k(x)$ eine rational-homogene Operation k-ten Grades, $U_k^*(x_1,..x_k)$ die erzeugende Operation von $U_k(x)$ und $h, x \in X$, so gilt

$$U_k(x+th) = \sum_{i=0}^{k} t^i \binom{k}{i} U_k^*(\underbrace{x,..x}_{k-i}, \underbrace{h,..h}_{i})$$

für rationale t; daraus schließt man sofort:

5. *Ist $U(x)$ eine Operation höchstens m-ten Grades, so gibt es zu je zwei Elementen h_0, x_0 aus X, Elemente $y_0,..y_m$ aus Y mit $U(x_0+th_0) = t^0 y_0 + .. + t^m y_m$ für rationale t.*

Die Umkehrung hiervon gilt sogar in der schärferen Form:

6. *Ist $U(x)$ eine Operation derart, daß es zu je zwei Elementen h_0, x_0 aus X, Elemente $y_0,..y_m$ aus Y mit $U(x_0+th_0) = t^0 y_0 + .. + t^m y_m$ für $t = 0,..m+1$ gibt, so ist sie höchstens m-ten Grades.* — Sei $V(t) = t^0 y_0 + .. + t^m y_m$ für reelle t. Ersetzt man in (2) einmal h, n, x durch $h_0, m+1, x_0$, dann U, h, n, x durch $V, 1, m+1, 0$ und beachtet, daß $U(x_0 + kh_0) = V(k)$ für $k = 0,..m+1$, so folgt

$$\underset{h_0..h_0}{\Delta^{m+1}} U(x_0) = \underset{1..1}{\Delta^{m+1}} V(0). \tag{13}$$

Da $V(t)$ eine Operation höchstens m-ten Grades bildet, so ist mit Rücksicht auf 2. $\underset{1..1}{\Delta^{m+1}} V(0) = 0$, also wegen (13) auch $\underset{h_0..h_0}{\Delta^{m+1}} U(x_0) = 0$; wendet man nun 3. an, so ergibt sich die Behauptung.

In dem vorstehenden Satze ist m als fest, d. h. von der Wahl der Elemente h_0, x_0 aus X unabhängig, vorausgesetzt. Daß diese Voraussetzung nicht entbehrt werden kann, zeigt das folgende einfache Beispiel: Sei A eine Basis in X, d. h. die Minimalmenge im System aller Teilmengen R von X mit der Eigenschaft, daß jedes $x \in X$ sich als lineare Kombination endlich vieler Elemente aus R mit rationalen (bzw. reellen) Koeffizienten darstellen läßt. Schreibt man nun die Menge A (wenn sie unendlich ist) als eine transfinite Folge $a_0, a_1,..a_\xi,..$ $(\xi < \alpha)$, so ist jedes $x \in X$ auf nur eine einzige Weise in der Form (*) $x = \sum'_{\xi<\alpha} t_\xi a_\xi$ darstellbar, wobei t_ξ rationale (bzw. reelle), mit Ausnahme endlich vieler verschwindende, Zahlen sind. Sei nun $\bar{y}_k \in Y$, $\bar{y}_k \neq 0$ $(k = 0, 1,..)$, und setzen wir für jedes $x \in X$ der Darstellung (*) gemäß $U(x) = \sum_{k=0}^{\infty} t_k^k \bar{y}_k$. Die so für $x \in X$ definierte Operation $U(x)$ leistet das Verlangte; sind h_0, x_0 Elemente aus X, dann gibt es Elemente $y_0,..y_m$ aus Y, so daß $U(x_0 + th_0) = t^0 y_0 + .. + t^m y_m$ sogar für alle rationalen (bzw. reellen) t.

Die Sätze 5 und 6 führen zu dem interessanten

Satz II. *Damit die Operation $U(x)$ höchstens m-ten Grades sei, ist notwendig und hinreichend, daß es zu je zwei Elementen h_0, x_0 aus X, Elemente $y_0,..y_m$ aus Y mit $U(x_0+th_0) = t^0 y_0 + .. + t^m y_m$ für rationale t gebe.*

4. Wir wollen nun den Begriff einer Operation m-ten Grades auf den Fall mehrerer Veränderlichen verallgemeinern. Gegeben seien lineare Räume $X_1,..X_n$; die in diesem Abschnitte weiter vorkommenden Operationen sind für $x_i \in X_i$ erklärt, insofern nicht das Gegenteil bemerkt ist.

Seien $\nu_1,..\nu_n$ ganze nichtnegative Zahlen mit $\nu_1 + .. + \nu_n = k > 0$. Wir betrachten eine für $x_{pq} \in X_p$ $(p = 1,..n;\ q = 1,..\nu_p)$ erklärte k-additive Operation $U^*_{\nu_1..\nu_n}(x_{11},..x_{1\nu_1},..x_{n1},..x_{n\nu_n})$ und setzen

$$U_{\nu_1..\nu_n}(x_1,..x_n) = U^*_{\nu_1..\nu_n}(\underbrace{x_1,..x_1}_{\nu_1},..\underbrace{x_n,..x_n}_{\nu_n}); \tag{14}$$

dann ist $U_{\nu_1..\nu_n}(t_1 x_1,..t_n x_n) = t_1^{\nu_1}..t_n^{\nu_n} U_{\nu_1..\nu_n}(x_1,..x_n)$ für rationale t_i. Wird also weiter

$$U_k(x_1,..x_n) = \sum_{\nu_1+..+\nu_n=k} U_{\nu_1..\nu_n}(x_1,..x_n) \tag{15}$$

gesetzt, wobei die Summation über alle Systeme ganzer nichtnegativer Zahlen $\nu_1,..\nu_n$ mit $\nu_1+..+\nu_n=k$ zu erstrecken ist, so gilt $U_k(tx_1,..tx_n)=t^k\,U_k(x_1,..x_k)$ für rationale t. Verschwindet die Operation $U_k(x_1,..x_n)$ nicht identisch, so heißt sie rational-homogen k-ten Grades; unter einer rational-homogenen Operation 0-ten Grades ist eine konstante Operation $U_0(x_1,..x_n)=U_{0..0}(x_1,..x_n)$ zu verstehen. Die Operation $U(x_1,..x_n)$ wird als m-ten Grades bezeichnet, falls $U(x_1,..x_n)=U_0(x_1,..x_n)+..+U_m(x_1,..x_n)$, wo die Operation $U_k(x_1,..x_n)$ entweder identisch verschwindet, oder rational-homogen k-ten Grades ist, und $U_m(x_1,..x_n)\not\equiv 0$ für $m>0$. Demnach läßt sich jede Operation $U(x_1,..x_n)$ höchstens m-ten Grades auf die Form

$$U(x_1,..x_n) = \sum_{\nu_1+..+\nu_n\leqslant m} U_{\nu_1..\nu_n}(x_1,..x_n) \tag{16}$$

bringen, wobei die Summe sich über alle Systeme ganzer nichtnegativer Zahlen $\nu_1,..\nu_n$ mit $\nu_1+..+\nu_n\leqslant m$ erstreckt, und die Operationen $U_{\nu_1..\nu_n}(x_1,..x_n)$ in der vorhin dargelegten Weise definiert sind.

Wie aus obigen Definitionen sofort hervorgeht, ist die für reelle t_i durch

$$U(t_1,..t_n) = \sum_{\nu_1+..+\nu_n\leqslant m} t_1^{\nu_1}..t_n^{\nu_n}\, y_{\nu_1..\nu_n} \tag{17}$$

erklärte Operation, wo $y_{\nu_1..\nu_n}\in Y$, höchstens m-ten Grades. Wir merken uns hier: Sind $t_{0i},..t_{mi}$ reell und für jedes einzelne i voneinander verschieden ($i=1,..n$), so ist die Operation $U(t_1,..t_n)$ durch ihre Werte für $t_1=t_{k_1 1},..t_n=t_{k_n n}$ ($k_i=0,..m$) eindeutig bestimmt und man kann $y_{\nu_1..\nu_n}$ als lineare Kombinationen der $(m+1)^n$ Elemente $\tilde{y}_{k_1..k_n}=U(t_{k_1 1},..t_{k_n n})$ ausdrücken, mit reellen, von $y_{\nu_1..\nu_n}$ unabhängigen, Koeffizienten; für $n=1$ ist dies mit 1. gleichbedeutend.

Daraus folgt insbesondere, daß die soeben erwähnte Darstellung (16) einer Operation $U(x_1,..x_n)$ höchstens m-ten Grades eindeutig ist; in Übereinstimmung mit der im Abschnitte **1** für $n=1$ eingeführten Bezeichnung soll sie kanonisch genannt werden. Offenbar gilt: Ist $U(x_1,..x_n)$ eine Operation m-ten Grades, wo $m>0$, und $U(tx_1,..tx_n)=t^k\,U(x_1,..x_n)$ für rationale t, so ist $k=m$ und $U(x_1,..x_n)=U_m(x_1,..x_n)$; ist ferner $U(t_1x_1,..t_nx_n)=t_1^{\nu_1}..t_n^{\nu_n}\,U(x_1,..x_n)$ für rationale t_i, so sind ν_i ganze nichtnegative Zahlen mit $\nu_1+..+\nu_n=m$ und $U(x_1,..x_n)=U_{\nu_1..\nu_n}(x_1,..x_n)$.

Über die Definition (14) der Operation $U_{\nu_1..\nu_n}(x_1,..x_n)$ ist folgendes zu bemerken: Es bedeutet keine wesentliche Einschränkung, wenn wir voraussetzen, daß $U^*_{\nu_1..\nu_n}(x_{11},..x_{1\nu_1},..x_{n1},..x_{n\nu_n})$ für jedes einzelne p eine symmetrische Operation von $x_{p1},..x_{p\nu_p}$ ist; ist die Operation $U^*_{\nu_1..\nu_n}(x_{11},..x_{1\nu_1},..x_{n1},..x_{n\nu_n})$ dieser Symmetriebedingung unterworfen, so ist sie durch die Operation $U_{\nu_1..\nu_n}(x_1,..x_n)$ eindeutig bestimmt. Den leichten Beweis überlassen wir dem Leser. Die für jedes p inbezug auf $x_{p1},..x_{p\nu_p}$ symmetrische Operation $U^*_{\nu_1..\nu_n}(x_{11},..x_{1\nu_1},..x_{n1},..x_{n\nu_n})$ wird, im Einklang mit der früheren Ausdrucksweise bei $n=1$, als die erzeugende Operation von $U_{\nu_1..\nu_n}(x_1,..x_n)$ bezeichnet.

5. Seien $X_1,..X_n$ lineare Räume. Wir machen die Menge aller n-tupel $(x_1,..x_n)$, in denen $x_i\in X_i$, zu einem linearen Raume durch die Festsetzungen ($x_i, x_i', x_i''\in X_i$ und t reell): $(x_1',..x_n')+(x_1'',..x_n'')=(x_1'+x_1'',..x_n'+x_n'')$, $t(x_1,..x_n)=(tx_1,..tx_n)$; dieser Raum heißt der *Produktraum* aus $X_1,..X_n$ und wird mit $X_1\times..\times X_n$ bezeichnet. Wir setzen noch zur Abkürzung $X^n=\underbrace{X\times..\times X}_{n}$.

Die Beherschung der Operationen m-ten Grades mehrerer Veränderlichen wird erleichtert durch das folgende Prinzip

(A) *Ist $U(x_1,..x_n)$ eine für $x_i\in X_i$ erklärte Operation, so ist, damit $U(x_1,..x_n)$ m-ten Grades sei, notwendig und hinreichend, daß die durch $U(x)=U(x_1,..x_n)$ für $x=(x_1,..x_n)\in X=X_1\times..\times X_n$ definierte Operation m-ten Grades sei.*

Beweis. Notwendig: Sei (16) die kanonische Darstellung von $U(x_1,..x_n)$ und $U^*_{\nu_1..\nu_n}(x_{11},..x_{1\nu_1},..x_{n1},..x_{n\nu_n})$ die erzeugende Operation von $U_{\nu_1..\nu_n}(x_1,..x_n)$. Wir definieren die Operation $U_k^*(x^1,..x^k)$ für $x^i\in X$, $x^i=(x_{1i},..x_{ni})$ durch

$$U_k^*(x^1,..x^k) = \sum_{\nu_1+..+\nu_n=k} U^*_{\nu_1..\nu_n}(x_{11},..x_{1\nu_1},..x_{n\nu_1+..+\nu_{n-1}+1},..x_{n\nu_1+..+\nu_n}).$$

Sie ist offenbar k-additiv; setzt man $U_k(x) = U_k^*(x, .. x)$ und $U_0(x) = U_{0..0}(x_1, .. x_n)$ für $x \in X$, so gilt $U(x) = U_0(x) + .. + U_m(x)$ und $U_m(x) \not\equiv 0$, falls $m > 0$. Hinreichend: Sei $U(x) = U_0(x) + .. + U_m(x)$ die kanonische Darstellung von $U(x)$ und $U_k^*(x^1, .. x^k)$ die erzeugende Operation von $U_k(x)$. Betrachten wir die für $x_{pq} \in X_p$ $(p = 1, .. n;\ q = 1, .. \nu_p)$ durch

$$U^*_{\nu_1..\nu_n}(x_{11}, .. x_{1\nu_1}, .. _{n1}, .. x_{n\nu_n}) = \frac{k!}{\nu_1! .. \nu_n!} U_k^*(x^{11}, .. x^{1\nu_1}, .. x^{n1}, .. x^{n\nu_n}) \tag{18}$$

erklärte Operation, wobei ν_i ganze nichtnegative Zahlen mit $\nu_1 + .. + \nu_n = k$ sind und $x^{pq} = (\underbrace{0, .. 0}_{p-1}, x_{pq}, \underbrace{0, .. 0}_{n-p})$; es folgt ohne weiteres, daß sie k-additiv ist. Setzt man $\tilde{x}^p = (\underbrace{0, .. 0}_{p-1}, x_p, \underbrace{0, .. 0}_{n-p})$, so gilt $x = \tilde{x}^1 + .. + \tilde{x}^n$ und hieraus ergibt sich sofort

$$U_k(x) = \sum_{\nu_1 + .. + \nu_n = k} \frac{k!}{\nu_1! .. \nu_n!} U_k^*(\underbrace{\tilde{x}^1, .. \tilde{x}^1}_{\nu_1}, .. \underbrace{\tilde{x}^n, .. \tilde{x}^n}_{\nu_n}). \tag{19}$$

Wir definieren nun für $x_i \in X_i$ zunächst die Operation $U_{\nu_1..\nu_n}(x_1, .. x_n)$ durch (14) und sodann $U_k(x_1, .. x_n)$ durch (15); die Anwendung von (18) und (19) liefert die Beziehung $U_k(x_1, .. x_n) = U_k(x)$. Wird also noch $U_0(x_1, .. x_n) = U_0(x)$ für $x_i \in X_i$ gesetzt, so gilt $U(x_1, .. x_n) = U_0(x_1, .. x_n) + .. + U_m(x_1, .. x_n)$ und $U_m(x_1, .. x_n) \not\equiv 0$, falls $m > 0$.

Mit Hilfe des obigen Prinzips lassen sich offenbar die Ergebnisse der Abschnitte **2** und **3** auf Operationen mehrerer Veränderlichen unmittelbar ausdehnen. Formulieren wir insbesondere den allgemeinen Satz, den man auf diese Weise aus Satz II erhält:

Satz II$_n$. *Damit die Operation $U(x_1, .. x_n)$ höchstens m-ten Grades sei, ist notwendig und hinreichend, daß es zu je zwei Elementen h_{i0}, x_{i0} aus X_i $(i = 1, .. n)$, Elemente $y_0, .. y_m$ aus Y mit $U(x_{10} + t h_{10}, .. x_{n0} + t h_{n0}) = t^0 y_0 + .. + t^m y_m$ für rationale t gebe.*

Dieser Satz bildet ein brauchbares Kriterium dafür, daß eine Operation höchstens m-ten Grades sei; aus ihm folgt umgekehrt wieder das Prinzip (A), wie auch das folgende zweite, bei den Induktionsbeweisen besonders nützliche, Prinzip

(B) *Ist $U(x_1, .. x_n)$ eine für $x_i \in X_i$ erklärte Operation, r eine natürliche Zahl $< n$, so ist, damit $U(x_1, .. x_n)$ m-ten Grades sei, notwendig und hinreichend, daß die durch $U(x, x_{r+1}, .. x_n) = U(x_1, .. x_n)$ für $x = (x_1, .. x_r) \in X = X_1 \times .. \times X_r$ und $x_i \in X_i$ $(i = r+1, .. n)$ definierte Operation m-ten Grades sei.*

Die Sonderrolle, die hierbei die Veränderlichen $x_1, .. x_r$ spielen, könnte natürlich ebensogut beliebigen anderen r Veränderlichen $x_{\pi_1}, .. x_{\pi_r}$ $(1 \leqslant \pi_1 < .. < \pi_r \leqslant n)$ zugeteilt werden.

Wir beweisen jetzt vermöge des Satzes II$_n$ zunächst [3])

7. *Ist $U(x_1, .. x_n)$ eine Operation höchstens m-ten Grades, so ist sie auch höchstens m-ten Grades inbezug auf jede Veränderliche x_i.* — Denn sei $x_{i0} \in X_i$ $(i = 2, .. n)$ und $V(x_1) = U(x_1, x_{20}, .. x_{n0})$ für $x_1 \in X_1$; sind h_{10}, x_{10} Elemente aus X_1 und $h_{i0} = 0$ $(i = 2, .. n)$, so gibt es Elemente $y_0, .. y_m$ aus Y, so daß $U(x_{10} + t h_{10}, .. x_{n0} + t h_{n0}) = t^0 y_0 + .. + t^m y_m$ und mithin auch $V(x_{10} + t h_{10}) = t^0 y_0 + .. + t^m y_m$ für rationale t.

Hierzu bildet gewissermaßen die Umkehrung

Satz III. *Ist $U(x_1, .. x_n)$ eine Operation höchstens m_i-ten Grades inbezug auf die Veränderliche x_i $(i = 1, .. n)$, so ist sie höchstens m-ten Grades mit $m = m_1 + .. + m_n$.*

Beweis. Es genügt den Satz für $n = 2$ zu beweisen; für ein beliebiges n folgt er dann sofort mittels Induktion unter Benutzung der Prinzipe (A) und (B). Seien h_{i0}, x_{i0} Elemente aus X_i $(i = 1, 2)$. Man kann zunächst Operationen $V_0(x_1), .. V_{m_2}(x_1)$ für $x_1 \in X_1$ so erklären, daß stets

$$U(x_1, x_{20} + t h_{20}) = \sum_{k=0}^{m_2} t^k V_k(x_1) \tag{20}$$

für rationale t; sodann ergibt sich aus 1., auf $m = m_2$ und $t_i = i$ angewandt, daß stets

$$V_k(x_1) = \sum_{i=0}^{m_2} a_{ki} U(x_1, x_{20} + i h_{20}).$$

Demnach ist $V_k(x_1)$ höchstens m_1-ten Grades; es gibt also Elemente $y_{01}, .. y_{m_1 1}$ aus Y mit

$$V_k(x_{10} + t h_{10}) = \sum_{i=0}^{m_1} t^i y_{i1} \tag{21}$$

[3]) Man kann dies auch direkt leicht beweisen.

für rationale t. Aus (20) und (21) erhält man $U(x_{10}+th_{10}, x_{20}+th_{20}) = t^0 y_0 + .. + t^m y_m$ für rationale t, mit geeigneten $y_k \in Y$.

In diesem Satze ist m_i als fest, d. h. von den Werten der Veränderlichen x_j $(j \neq i)$ unabhängig, gedacht $(i = 1,..n)$; daß dies wesentlich ist, erhellt aus dem folgenden Beispiel: Sei die aus den Gliedern der transfiniten Folge $a_{0i}, a_{1i}, .. a_{\xi i}, ..$ $(\xi < \alpha_i$ und je zwei Glieder verschieden) bestehende Menge eine Basis in X_i; sei ferner $\bar{y}_k \in Y$, $\bar{y}_k \neq 0$ $(k = 0, 1, ..)$. Ist $x_i \in X_i$ und $x_i = \sum_{\xi < \alpha_i} t_{\xi i} a_{\xi i}$, wo $t_{\xi i}$ rationale (bzw. reelle) mit höchstens endlich vielen Ausnahmen verschwindende Zahlen sind, so setzen wir $U(x_1, .. x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} (t_{k1} .. t_{kn})^k \bar{y}_k$.

6. Sei $U_k(x)$ eine rational-homogene Operation k-ten Grades und $U_k^*(x_1, .. x_k)$ die durch (5) für $x_i \in X$ definierte Operation. Wegen 2. ist alsdann (12) erfüllt und hieraus ergibt sich durch dieselbe Schlußweise wie beim Beweise des Satzes 3, daß $U_k^*(x_1, .. x_k)$ eine k-additive und symmetrische Operation von $x_1, .. x_k$ mit $U_k^*(x, .. x) = U_k(x)$ für $x \in X$ bildet. Man kann diese für verschiedene folgende Überlegungen wichtige Bemerkung auch folgenderweise formulieren:

8. *Ist $U_k(x)$ eine rational-homogene Operation k-ten Grades und $U_k^*(x_1, .. x_k)$ die erzeugende Operation von $U_k(x)$, so gilt*

$$U_k^*(x_1, .. x_k) = \frac{1}{k!} \underset{x_1 .. x_k}{\Delta^k} U_k(0) \textit{ für } x_i \in X.$$

Kommen wir nun auf Bezeichnungen des Abschnittes 4 zurück. Sei $U^*_{\nu_1 .. \nu_n}(x_{11}, .. x_{1\nu_1}, .. x_{n1}, .. x_{n\nu_n})$ die erzeugende Operation von $U_{\nu_1 .. \nu_n}(x_1, .. x_n)$; wir setzen $U_{\nu_1 .. \nu_n}(x) = U_{\nu_1 .. \nu_n}(x_1, .. x_n)$ für $x = (x_1, .. x_n) \in X = X_1 \times .. \times X_n$ und $x^{pq} = (\underbrace{0, .. 0}_{p-1}, x_{pq}, \underbrace{0, .. 0}_{n-p})$ $(p = 1, .. n;\ q = 1, .. \nu_p)$. In Verallgemeinerung von 8. gilt dann

$$U^*_{\nu_1 .. \nu_n}(x_{11}, .. x_{1\nu_1}, .. x_{n1}, .. x_{n\nu_n}) = \frac{1}{\nu_1! .. \nu_n!} \underset{x^{11} .. x^{1\nu_1} .. x^{n1} .. x^{n\nu_n}}{\Delta^k} U_{\nu_1 .. \nu_n}(0)$$

für $x_{pq} \in X_p$ $(p = 1, .. n;\ q = 1, .. \nu_p)$. Der Beweis ergibt sich leicht aus 8. und der Tatsache, daß $U_{\nu_1 .. \nu_n}(x_1, .. x_n)$ bei festen x_j $(j \neq i)$ inbezug auf die Veränderliche x_i entweder konstant oder rational-homogen ν_i-ten Grades ist $(i = 1, .. n)$.

§ 2.

7. Wir setzen von nun an voraus, daß die zugrunde gelegten Räume X und Y vom Typus (F) sind[4]).

Eine additive und stetige Operation heißt *linear*. Sind $X_1, .. X_k$ Räume vom Typus (F) und ist $U(x_1, .. x_k)$ eine für $x_i \in X_i$ erklärte, k-additive und stetige Operation, so bezeichnet man sie als *k-linear*; alsdann ist $U(t_1 x_1, .. t_k x_k) = t_1 .. t_k U(x_1, .. x_k)$ für reelle t_i.

Eine stetige rational-homogene Operation k-ten Grades $U_k(x)$ wird als ein *homogenes Polynom k-ten Grades* erklärt; einem solchen kommt also die Eigenschaft $U_k(tx) = t^k U_k(x)$ für reelle t zu. Allgemein ist unter einem *Polynom m-ten Grades* eine stetige Operation m-ten Grades zu verstehen. Hierbei ist folgendes zu bemerken: 1° Ist $U_k(x)$ ein homogenes Polynom k-ten Grades, so ist die erzeugende Operation $U_k^*(x_1, .. x_k)$ von $U_k(x)$ stetig und mithin k-linear; denn nach 8. ist

$$U_k^*(x_1, .. x_k) = \frac{1}{k!} \sum_{\varepsilon_1, .. \varepsilon_k = 0}^{1} (-1)^{k - (\varepsilon_1 + .. + \varepsilon_k)} U_k(\varepsilon_1 x_1 + .. + \varepsilon_k x_k). \tag{22}$$

2° Ist $U(x)$ ein Polynom m-ten Grades und $U(x) = U_0(x) + .. + U_m(x)$ die kanonische Darstellung von $U(x)$, so bildet die Operation $U_k(x)$, falls sie nicht identisch verschwindet, ein homogenes Polynom k-ten Grades; in der Tat, da $U(tx) = t^0 U_0(x) + .. + t^m U_m(x)$ für rationale t, so ist nach 1., mit $t_i = i$, $U_k(x) = a_{k0} U(0x) + .. + a_{km} U(mx)$ und demnach mit $U(x)$ zugleich $U_k(x)$ stetig. Man könnte also ein homogenes Polynom k-ten Grades bzw. ein Polynom m-ten Grades in der gleichen Weise erklären, wie wir es im Abschnitte **1** im Falle einer rational-homogenen Operation k-ten Grades bzw. einer Operation m-ten Grades getan haben; es genügte zu diesem Zwecke die Stetigkeit der dort zum Ausgangspunkte genommenen k-additiven Operation $U_k^*(x_1, .. x_k)$ vorauszusetzen. Auf diese Weise eben wurden die in Rede stehenden Begriffe von Herrn Banach eingeführt. Die Polynome höchstens m-ten Grades und mithin auch m-ten Grades können übrigens, wie man aus den Sätzen I und II ersieht, noch auf andere Arten definiert werden; die homogenen Polynome k-ten Grades $U_k(x)$ sind unter den Polynomen k-ten Grades

[4]) Wegen der Definition eines Raumes vom Typus (F) siehe das unter [2]) zitierte Buch, insb. p. 35.

jedesmal durch die Eigenschaft $U_k(tx) = t^k U_k(x)$ für reelle t gekennzeichnet. Auf Grund von Satz I können wir zunächst behaupten:

Satz I*. *Damit die stetige Operation $U(x)$ ein Polynom höchstens m-ten Grades sei, ist notwendig und hinreichend, daß $\underset{h..h}{\Delta^{m+1}} U(x) = 0$ für $h, x \in X$ sei.*

Man kann hierin nach 2. und 4. statt „$\underset{h..h}{\Delta^{m+1}} U(x) = 0$ für $h, x \in X$" auch „$\underset{h_1..h_{m+1}}{\Delta^{m+1}} U(0) = 0$ für $h_k \in X$" setzen. Die letztgenannte Bedingung wurde von Herrn Fréchet zur Definition eines Polynoms höchstens m-ten Grades genommen. Sein Hauptresultat lautet: Jedes Polynom höchstens m-ten Grades $U(x)$ läßt sich in der Form $U(x) = U_0(x) + .. + U_m(x)$ schreiben, wobei die Operation $U_k(x)$ entweder identisch verschwindet oder ein homogenes Polynom k-ten Grades ist[5]). Dies ist natürlich im Satze I* enthalten.

Herr Fréchet beweist den oben erwähnten Satz unter der Voraussetzung, daß X, Y einer besonderen Klasse von Räumen, die er „algébrophiles" nennt, angehören. Bei unseren Überlegungen genügt es aber anzunehmen, daß die linearen Räume X, Y einen Limesbegriff zulassen und dabei die Verknüpfungen, d. h. die Addition von Elementen und die Multiplikation der Zahlen mit Elementen, stetig sind. Somit ist hier das Fréchet'sche Ergebnis in zweifacher Hinsicht verschärft.

Berücksichtigt man ferner den Satz II, so kommt

Satz II*. *Damit eine stetige Operation $U(x)$ ein Polynom höchstens m-ten Grades sei, ist notwendig und hinreichend, daß es zu je zwei Elementen h_0, x_0 aus X, Elemente $y_0, .. y_m$ aus Y mit $U(x_0 + th_0) = t^0 y_0 + .. + t^m y_m$ für reelle t gebe.*

Durch die hier ausgesprochene Eigenschaft wurde ein Polynom höchstens m-ten Grades von Herrn R. S. Martin in seiner Dissertation erklärt[6]).

[5]) M. Fréchet, Les polynômes abstraits, J. Math. pures appl. (9) 8 (1929) p. 71—92. Vgl. auch: M. Fréchet, Une définition fonctionnelle des polynômes, Nouv. Ann. Math. 9 (1929) p. 145—162; M. Fréchet, Sur les fonctionnelles continues, Ann. École norm. 27 (1910) p. 193—216.

[6]) R. S. Martin, California Institute thesis, 1932. Diese Arbeit war uns leider nicht zugänglich; sie ist nach der folgenden zitiert: A. D. Michal et A. H. Clifford, Fonctions analytiques implicites dans des espaces vectoriels abstraits, C. R. Acad. Sci. Paris 196 (1933) p. 735—737.

Alle obigen Definitionen und Bemerkungen lassen sich sofort auf Operationen mehrerer Veränderlichen übertragen. Im allgemeinen bedeutet es aber keinerlei Einschränkung, wenn wir uns auf das Studium der Polynome nur einer Veränderlichen beschränken; denn das Prinzip (A), wie übrigens auch das Prinzip (B), bleibt richtig, wenn wir in ihm „ein Polynom m-ten Grades" an Stelle von „m-ten Grades" einsetzen. Sind $X_1, .. X_n$ Räume vom Typus (F), so machen wir dabei — wie hinfort — den Produktraum $X = X_1 \times .. \times X_n$ zu einem Raume vom Typus (F), indem wir die Entfernung des Punktes $x = (x_1, .. x_n)$ vom Nullpunkt etwa durch $|x| = \max(|x_1|, .. |x_n|)$ erklären. Augenscheinlich hat jedes für reelle t_i erklärtes Polynom höchstens m-ten Grades $U(t_1, .. t_n)$ die Form (17), wo $y_{\nu_1 .. \nu_n} \in Y$.

8. Von den Ergebnissen des § 1 ist nur der Satz III nicht ohne weiteres auf Polynome übertragbar und verlangt eine eingehendere Behandlung. Der Satz II_n nimmt hier den folgenden Wortlaut an:

Satz II_n^*. *Damit die stetige Operation $U(x_1, .. x_n)$ ein Polynom höchstens m-ten Grades sei, ist notwendig und hinreichend, daß es zu je zwei Elementen h_{i0}, x_{i0} aus X_i $(i = 1, .. n)$, Elemente $y_0, .. y_m$ aus Y mit $U(x_{10} + th_{10}, .. x_{n0} + th_{n0}) = t^0 y_0 + .. + t^m y_m$ für reelle t gebe.*

Seien nun $X_1, .. X_n$ Räume vom Typus (F) und $U(x_1, .. x_n)$ eine für $x_i \in X_i$ erklärte Operation. Dann beweisen wir vorerst[7])

9. *Ist die Operation $U(x_1, .. x_n)$ inbezug auf jede Veränderliche x_i linear, so ist sie stetig.* — Angenommen die Behauptung sei richtig für $n-1 \geqslant 1$. Sei $x_{ip} \in X_i$ $(p = 1, 2, ..)$, $x_{i0} \in X_i$ und $x_{ip} \to x_{i0}$; wir setzen $U_p(x_n) = U(x_{1p}, .. x_{n-1p}, x_n)$ für $x_n \in X_n$. Wegen der Annahme ist die Folge der linearen Operationen $\{U_p(x_n)\}$ in jedem Punkte gegen $U(x_n) = U(x_{10}, .. x_{n-10}, x_n)$ konvergent; mithin sind die Operationen $U_p(x_n)$, nach einem von uns

[7]) Für Räume vom Typus (B) ist dieser Satz in den Arbeiten von Herrn M. Kerner zu finden: M. Kerner, Zur Theorie der impliziten Funktionaloperationen, Studia Math. 3 (1931) p. 156—173; M. Kerner, Die Differentiale in der allgemeinen Analysis, Ann. of Math. 34 (1933) p. 546—572. Vgl. auch: M. Fréchet, Sur les fonctionnelles bilinéaires, Trans. Amer. Math. Soc. 15 (1915) p. 215—234.

bewiesenen Satze [8]), in jedem Punkte gleichgradig stetig, insbesondere also $U_p(x_{np}) - U_p(x_{n0}) \to 0$, und da $U_p(x_{n0}) \to U(x_{n0})$, so erhält man $U_p(x_{np}) \to U(x_{n0})$, d. h. $U(x_{1p}, .. x_{np}) \to U(x_{10}, .. x_{n0})$, w. z. b. w.

Hieraus ergibt sich leicht der umfassendere Satz

10. *Ist die Operation m-ten Grades $U(x_1, .. x_n)$ inbezug auf jede Veränderliche x_i stetig, so ist sie stetig.* — Sei (16) die kanonische Darstellung von $U(x_1, .. x_n)$. Nach der im Abschnitte **4** erwähnten Verallgemeinerung von 1., kann man offenbar die Operation $U_{\nu_1 .. \nu_n}(x_1, .. x_n)$ als lineare Kombination der Operationen $U(k_1 x_1, .. k_n x_n)$ $(k_i = 0, .. m)$ ausdrücken; daraus folgt, daß sie inbezug auf jede Veränderliche x_i stetig ist. Mithin ist aber die erzeugende Operation $U^*_{\nu_1 .. \nu_n}(x_{11}, .. x_{1\nu_1}, .. x_{n1}, .. x_{n\nu_n})$ von $U_{\nu_1 .. \nu_n}(x_1, .. x_n)$, wie man aus ihrer im Abschnitte **6** angegebenen Darstellung unmittelbar ersieht, inbezug auf jede Veränderliche x_{pq} linear; vermöge 9. ist damit schon alles bewiesen.

Aus den Sätzen III und 10. folgt

Satz III*. *Ist die Operation $U(x_1, .. x_n)$ ein Polynom höchstens m_i-ten Grades inbezug auf die Veränderliche x_i $(i = 1, .. n)$, so ist sie ein Polynom höchstens m-ten Grades mit $m = m_1 + .. + m_n$.*

Damit ist die Übertragung des Satzes III auf den Fall von Polynomen geleistet. Eine Verschärfung von 10. liefert der

Satz IV. *Ist die Operation $U(x_1, .. x_n)$ ein Polynom inbezug auf jede Veränderliche x_i, so ist sie ein Polynom.*

Beweis. Wie beim Beweise des Satzes III genügt es den Fall $n = 2$ zu erledigen. Bei festem x_1 ist $U(x_1, x_2)$ ein Polynom etwa $m_2(x_1)$-ten Grades der Veränderlichen x_2; es bezeichne R_{1m} die Menge aller x_1, für die $m_2(x_1) \leqslant m$ $(m = 0, 1, ..)$. Unter Verwendung des Satzes II* schließt man zunächst leicht, daß die Mengen R_{1m} abgeschlossen sind. Aus $R_{10} + R_{11} + .. = X_1$ folgt sodann, daß eine der Mengen R_{1m}, etwa R_{1m_2}, eine Kugel enthält; sei x_{10} ihr Mittelpunkt und r_0 ihr Radius. Wir behaupten, daß $U(x_1, x_2)$ ein Polynom höchstens m_2-ten Grades inbezug auf die Veränderliche x_2 ist. Berücksichtigt man den Satz II*, so ist nur mehr zu zeigen: Sind h_{20}, x_{20} Elemente aus X_2, so bildet $U(x_1, x_{20} + t h_{20})$ für festes x_1 ein Polynom höchstens m_2-ten Grades der reellen Veränderlichen t; das erreichen wir wieder mit Hilfe des Satzes II*. Zu diesem Zweck setzen wir $W(t, s) = U(x_{10} + s(x_1 - x_{10}), x_{20} + t h_{20})$ für reelle t, s. Ist s fest mit $|s(x_1 - x_{10})| \leqslant r_0$, so bildet $U(x_{10} + s(x_1 - x_{10}), x_2)$, nach Definition von x_{10} und r_0, ein Polynom höchstens m_2-ten Grades der Veränderlichen x_2 und mithin $W(t, s)$ ein Polynom höchstens m_2-ten Grades der Veränderlichen t. Demnach kann man die Operationen $V_0(s), .. V_{m_2}(s)$ in der Menge S aller s mit $|s(x_1 - x_{10})| \leqslant r_0$ so erklären, daß

$$W(t, s) = \sum_{k=0}^{m_2} t^k V_k(s) \tag{23}$$

für $s \in S$ und beliebige t. Nun ist nach 1., auf $m = m_2$ und $t_i = i$ angewandt, $V_k(s) = a_{k0} W(0, s) + .. + a_{k m_2} W(m_2, s)$; da hierin $W(i, s)$ Polynome der Veränderlichen s sind, so kann jede der Operationen $V_k(s)$ ebenfalls als ein für reelle s erklärtes Polynom aufgefaßt werden. Alsdann stellt bei festem t sowohl die linke wie auch die rechte Seite von (23) ein Polynom der Veränderlichen s dar und beide stimmen für $s \in S$ überein; folglich sind sie identisch. Somit erweist sich (23) für alle t, s als gültig; insbesondere ist also $U(x_1, x_{20} + t h_{20}) = W(t, 1)$ ein Polynom höchstens m_2-ten Grades der Veränderlichen t. Ganz ebenso folgt: Es gibt eine ganze nichtnegative Zahl m_1, so daß $U(x_1, x_2)$ ein Polynom höchstens m_1-ten Grades inbezug auf die Veränderliche x_1 bildet. Es genügt den Satz III* zu berücksichtigen, um den Beweis zu beendigen.

Darin ist insbesondere enthalten: Ist eine für reelle t_i erklärte Operation $U(t_1, .. t_n)$ ein Polynom inbezug auf jede Veränderliche t_i, so ist sie ein Polynom; dieser Spezialfall läßt sich übrigens auch direkt mittels Induktion leicht beweisen. Wir wenden ihn jetzt an zur Ableitung des folgendes Satzes:

Satz V. *Ist $U(x)$ eine stetige Operation derart, daß $U(x_0 + t h_0)$ für je zwei Elemente h_0, x_0 aus X ein Polynom der reellen Veränderlichen t bildet, so ist sie ein Polynom.*

Beweis. Bei festem h ist $U(th)$ ein Polynom etwa $m(h)$-ten Grades der reellen Veränderlichen t; durch analoge Schlußweise wie beim Beweise des Satzes IV folgt: es gibt ein $\bar{h}_0$, eine Zahl $r_0 > 0$ und eine ganze nichtnegative Zahl m, so daß $m(h) \leqslant m$

[8]) S. Mazur und W. Orlicz, Über Folgen linearer Operationen, Studia Math. 4 (1933) p. 152—157.

für alle h mit $|h-\tilde{h}_0| \leqslant r_0$. Seien nun $h_1, .. h_n$ den Bedingungen $|h_i - \tilde{h}_0| < r_0$ genügende und sonst beliebige Elemente aus X. Die für reelle t_i erklärte Operation $U(t_1 h_1 + .. + t_n h_n)$ ist ein Polynom inbezug auf jede Veränderliche t_i und mithin ein Polynom etwa höchstens ν-ten Grades:

$$U(t_1 h_1 + .. + t_n h_n) = \sum_{\nu_1 + .. + \nu_n \leqslant \nu} t_1^{\nu_1} .. t_n^{\nu_n} y_{\nu_1 .. \nu_n} \tag{24}$$

für reelle t_i, wo $y_{\nu_1 .. \nu_n} \in Y$. Sind $s_1, .. s_n$ reell und $|s_1 h_1 + .. + s_n h_n - \tilde{h}_0| \leqslant r_0$, so bildet $U(t(s_1 h_1 + .. + s_n h_n))$, mit Rücksicht auf die Definition von $\tilde{h}_0$ und r_0, ein Polynom höchstens m-ten Grades der reellen Veränderlichen t und da nach (24) stets

$$U(t(s_1 h_1 + .. + s_n h_n)) = \sum_{k=0}^{\nu} t^k \sum_{\nu_1 + .. + \nu_n = k} s_1^{\nu_1} .. s_n^{\nu_n} y_{\nu_1 .. \nu_n},$$

so muß jedenfalls

$$\sum_{\nu_1 + .. + \nu_n = k} s_1^{\nu_1} .. s_n^{\nu_n} y_{\nu_1 .. \nu_n} = 0 \tag{25}$$

für $k > m$ sein. Nun bilden im n-dimensionalen euklidischen Raume die Punkte $(s_1, .. s_n)$ mit $|s_1 h_1 + .. + s_n h_n - \tilde{h}_0| \leqslant r_0$. eine Menge, deren Inneres, in Anbetracht dessen, daß $|h_i - \tilde{h}_0| < r_0$, gewiß nicht leer ist; besteht also die Gleichung (25) in dieser Menge, so ist sie sogar identisch erfüllt. Man erkennt so, daß $y_{\nu_1 .. \nu_n} = 0$, falls nur $\nu_1 + .. + \nu_n = k > m$, und daher bildet $U(t_1 h_1 + .. + t_n h_n)$ nach (24) ein Polynom höchstens m-ten Grades. Seien jetzt Elemente h_0, x_0 aus X gegeben. Es gibt dann offenbar reelle $a_1, .. a_n, b_1, .. b_n$ und Elemente $h_1, .. h_n$, so daß $x_0 = a_1 h_1 + .. + a_n h_n$, $h_0 = b_1 h_1 + .. + b_n h_n$ und $|h_i - \tilde{h}_0| < r_0$. Aus dem vorigen und der Gleichheit $x_0 + t h_0 = (a_1 + t b_1) h_1 + .. + (a_n + t b_n) h_n$ ersieht man sofort, daß $U(x_0 + t h_0)$ ein Polynom höchstens m-ten Grades der reellen Veränderlichen t ist. Wir wenden noch den Satz II* an und der Beweis ist erbracht.

(Reçu par la Rédaction le 27. 8. 1934).