Sur les groupes linéaires bornés (III) [1])

par

H. AUERBACH (Lwów).

Nous avons affirmé que presque tous les éléments d'un groupe linéaire continu borné et connexe G sont du même ordre, les éléments exceptionnels étant d'ordre inférieur [2]). Nous nous sommes aperçu plus tard que la démonstration de cette proposition indiquée à l'endroit cité est insuffisante.

Dans le Mémoire présent nous démontrons ce théorème à l'aide d'un résultat de M. WEYL qui permet d'établir en même temps certaines autres propriétés communes à presque tous les éléments du groupe G. En s'appuyant sur le théorème I ainsi obtenu nous généralisons ensuite le théorème sur l'existence de deux générateurs [3]). D'après le théorème généralisé, deux éléments pris au hasard dans le groupe G déterminent presque toujours un sous-groupe dénombrable partout dense.

En se servant de ce théorème et d'un raisonnement de M. J. v. NEUMANN, MM. J. SCHREIER et S. ULAM ont établi l'existence de deux générateurs pour tout groupe topologique compact et connexe [4]).

Le contenu du dernier paragraphe se rattache aux théorèmes I et IV de la seconde partie et est indépendant de ce qui précède.

---

[1]) Les deux prémières parties: Studia Math. 4 (1933) p. 113 — 127 et 158 — 166; désignées dans la suite par I, II.

[2]) II, p. 164, théorème VI.

[3]) Comptes Rendus 197 (1933) p. 1385. La connaissance de cette Note n'est pas supposée.

[4]) Voir Fundamenta Mathematicae 24.

§ 1.

Soit G_1 un groupe linéaire semi-simple unitaire d'ordre s et de rang l. D'après les principes de la théorie des groupes semi-simples, le groupe G_1 contient une infinité de sous-groupes abéliens clos d'ordre l[5]). Soit γ_1 un de ces groupes. On peut représenter le groupe G_1 par l'équation

$$A = P^{-1} C P \tag{1}$$

C désignant l'élément général du groupe γ_1 dépendant de l paramètres et P un élément du groupe G_1 dépendant de $s-l$ paramètres[6]). Le groupe γ_1 étant clos il en résulte, d'après la théorie de la mesure, que presque tous les éléments du groupe G_1 sont normaux d'ordre l, les éléments exceptionnels étant d'ordre inférieur[7]).

Soit maintenant G un groupe linéaire continu borné et connexe non commutatif d'ordre r. Il se compose d'un groupe semi-simple unitaire G_1 et d'un groupe abélien G_2, engendré par les matrices infinitésimales distinguées[8]). Nous désignerons comme précédemment par s et l l'ordre et le rang du groupe G_1 et par γ_1 un sous-groupe abélien clos de G_1 d'ordre l.

Soit encore γ le groupe abélien composé des groupes γ_1 et G_2 d'ordre $l+r-s$. D'aprés le théorème que nous venons de citer, tout élément du groupe G est le produit de deux éléments appartenant respectivement à G_1 et G_2. En multipliant les deux membres de l'équation (1) par l'élément général du groupe G_2 on voit que tout élément du groupe G est semblable à un élément du groupe γ. On en conclut comme précédemment que presque tous les éléments du groupe G sont normaux et du même ordre (qui est au moins égal à $l+r-s$), les éléments exceptionnels étant d'ordre inférieur.

---

[5]) Voir E. Cartan, La Théorie des Groupes Finis et Continus et l'Analysis Situs (Mém. Sc. Math. 42, 1930) p. 38.

[6]) H. Weyl, Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen. III., Math. Zeitschr. 24 (1926) p. 377—395; p. 378.

[7]) Voir II, p. 160, théorème II.

[8]) II, p. 162, théorème III.

Nous avons ainsi complété la démonstration du théorème VI de la seconde partie. Par considération de la même équation on obtient encore sans peine le

Théorème I. *Presque tout élément du groupe G est le produit d'un élément normal d'ordre l du groupe G_1 et d'un élément normal du groupe G_2 qui est un générateur de ce groupe. Presque tout élément de G est aussi générateur d'un sous-groupe abélien de G, composé d'un sous-groupe abélien clos de G_1 d'ordre l et du groupe G_2.*

Il importe de remarquer que les divers sous-groupes γ_1 de G_1 coïncident avec les groupes normaux engendrés par les éléments d'ordre l. On peut aussi caractériser les groupes γ_1 ou γ comme les sous-groupes abéliens d'ordre maximal.

§ 2.

En conservant les notations précédentes nous allons considérer d'abord le groupe G_1.

Soient A un élément du groupe G_1 d'ordre l, U une matrice infinitésimale générale[9]) du groupe normal $\gamma_1 = [A]$ et T la matrice correspondante dans le groupe adjoint de G_1. Dans la décomposition de l'espace des paramètres déterminée par la matrice T, les vecteurs appartenant à la racine zéro constituent un sous-groupe abélien d'ordre l dont les éléments réels forment le groupe γ_1. A toute racine $\alpha \neq 0$ corresponde un vecteur $e_\alpha \neq 0$ et un seul tel que $T e_\alpha = \alpha e_\alpha$[10]). Les racines α étant conjuguées deux à deux on peut supposer que les vecteurs e_α le sont aussi.

Tout vecteur, réel ou complexe, peut être représenté d'une seule manière sous la forme

$$e = a_0 + \sum c_\alpha e_\alpha \tag{2}$$

a_0 désignant un vecteur appartenant à la racine zéro et les c_α

---

[9]) C'est-à-dire telle que la matrice correspondante du groupe adjoint admet le plus grand nombre possible de racines caractéristiques différentes.

[10]) Voir E. Cartan, Thèse, p. 55, ou H. Weyl, Math. Zeitschr. 24 (1926) p. 364—366. Pour simplifier l'écriture, nous désignons par la même lettre le groupe fini, son groupe infinitésimal et l'ensemble des vecteurs correspondants.

étant des nombres complexes. Pour que le vecteur soit réel, il faut et il suffit que a_0 soit un vecteur du sous-groupe γ_1 et que les coefficients c_α soient conjugués deux à deux en même temps que les vecteurs correspondants e_α. On le voit tout de suite en passant dans (2) aux valeurs conjuguées.

Soit $B = e^V$ un élément normal d'ordre l du groupe G_1 tel que dans l'équation (2) relative à la matrice V tous les coefficients c_α sont différents de zéro. D'après un théorème de M. CARTAN [11]) tout élément du groupe G_1 est engendré par une matrice infinitésimale. Les matrices infinitésimales H pour lesquelles un ou plusieurs coefficients c_α sont nuls dépendant de moins que s paramètres, l'ensemble des éléments correspondants e^H est de mesure nulle. Enfin, presque tout élément du groupe G_1 est d'ordre l, d'après le théorème I. Par conséquent, on peut prendre pour B presque tout élément du groupe G_1.

En désignant maintenant par e le vecteur représentant la matrice V, posons

$$(3)\qquad \begin{aligned} e &= && a_0 + \sum c_\alpha e_\alpha \\ e_1 &= T e &&= \sum \alpha\, c_\alpha e_\alpha \\ &\cdots\cdots && \\ e_{p-1} &= T e_{p-2} &&= \sum \alpha^{p-1} c_\alpha e_\alpha \end{aligned}$$

$p = s - l$ étant le nombre des racines $\alpha \neq 0$.

Ces vecteurs sont évidemment réels. Le déterminant de la matrice $(c_\alpha, \alpha c_\alpha, \ldots, \alpha^{p-1} c_\alpha)$ étant par hypothèse différent de zéro, les vecteurs e_α s'expriment linéairement par les vecteurs $e, e_1, \ldots, e_{p-1}$ et a_0. Il en résulte que les matrices infinitésimales $V, V_1, \ldots, V_{p-1}$ correspondant aux vecteurs $e, e_1, \ldots, e_{p-1}$ et celles d'une base du groupe γ_1 forment une base infinitésimale du groupe G_1.

Les éléments A, B engendrent un sous-groupe dénombrable partout dense de G. Pour le démontrer, désignons par Γ le plus petit groupe clos contenant ces deux éléments. C'est un groupe

[11]) E. Cartan, Les tenseurs irréductibles et les groupes linéaires simples et semi-simples, Bull. Sc. Math. (2) 49 (1925) p. 130—152; p. 143—144.

de Lie qui contient évidemment le groupe $\gamma_1 = [A]$. Il contient aussi le groupe e^{tV}. En effet, le plus petit groupe clos qui contient le groupe e^{tV} étant un sous-groupe normal [12]) de G_1, son ordre ne peut pas dépasser l; il se confond donc avec $[B]$. Le groupe Γ admet par conséquent les matrices infinitésimales $U, V, V_1 = [UV], \ldots, V_{p-1} = [UV_{p-2}]$ [13]) ainsi que celles du groupe γ_1. C'est donc le plus petit groupe clos contenant G_1.

On voit que l'on peut prendre pour A n'importe quel élément d'ordre l et ensuite choisir à volonté l'élément B qui, toutefois, ne doit pas appartenir à un certain ensemble de mesure nulle dépendant du choix de l'élément A.

Nous passons maintenant au groupe G. Soit A un élément de ce groupe jouissant des propriétés formulées dans le théorème I, d'ailleurs quelconque. L'élément A est donc générateur d'un sous-groupe abélien maximal γ et on a $A = A_1 A_2$, A_1 désignant un élément normal d'ordre l du groupe G_1 et A_2 un élément du groupe G_2. Désignons par B_1 un élément du groupe G_1 déterminant avec A_1 un sous-groupe dénombrable partout dense de ce groupe et posons $B = B_1 B_2$, B_2 étant un élément quelconque de G_2. On voit comme précédemment qu'on peut prendre pour A presque tout élément du groupe G et pour B tout élément qui n'appartient pas à un certain ensemble de mesure nulle dépendant du choix de A.

Le plus petit groupe clos contenant les éléments A, B contient le groupe γ dont A est un générateur et, en particulier, son sous-groupe G_2. Il contient par conséquent les éléments A_1, B_1, donc aussi le groupe G_1. C'est donc le plus petit groupe clos contenant G.

Supposons que l'on ait défini dans l'ensemble des couples ordonnés d'éléments du groupe G la mesure correspondante à celle adoptée pour le groupe G. On peut alors énoncer le

Théorème II. *Soit G un groupe linéaire continu borné et connexe. Presque tout couple d'éléments du groupe G engendre un sous-groupe dénombrable partout dense.*

[12]) I, p. 122, théorème III.
[13]) $[PQ] = PQ - QP$.

§ 3.

Considérons un groupe linéaire borné G ouvert et connexe d'ordre r. Il est le produit direct d'un groupe clos G_1 (qui peut se réduire à l'élément unité) et d'un groupe abélien G_2, isomorphe au groupe des translations d'un espace euclidien [14]). Un élément quelconque A du groupe G est donc le produit de deux éléments bien déterminés A_1, A_2 appartenant respectivement à G_1 et G_2. Ces éléments varient d'une façon continue avec A. En effet, si l'élément A_1 décrit un voisinage d'un élément $\overset{\circ}{A}_1$ dans G_1 et de même A_2 un voisinage d'un élément $\overset{\circ}{A}_2$ dans G_2, le produit $A_1 A_2$ dépend de r paramètres essentiels et par suite décrit un voisinage de l'élément $\overset{\circ}{A} = \overset{\circ}{A}_1 \overset{\circ}{A}_2$ dans G.

Soit H un sous-groupe clos de G. Les éléments A_2 correspondant aux éléments de H forment évidemment un sous-groupe clos de G_2. Ce sous-groupe se réduit à l'élément unité, car dans le cas contraire le groupe G_2 contiendrait un élément cyclique différent de l'élément unité [15]), ce qui n'est pas.

Théorème III. *Soit G un groupe linéaire borné ouvert et connexe, produit direct d'un groupe clos G_1 et d'un groupe abélien G_2 isomorphe au groupe des translations d'un espace euclidien. Tout sous-groupe clos de G est contenu dans le groupe G_1. Par conséquent, une telle représentation du groupe G comme produit direct n'est possible que d'une seule manière.*

En appliquant ce théorème aux sous-groupes clos à un paramètre on voit que le groupe G n'admet pas d'autres matrices infinitésimales régulières que celles du groupe G_1.

Théorème IV. *L'ordre du groupe G_1 est égal au plus grand nombre de matrices infinitésimales régulières et indépendantes du groupe G.*

Théorème V. *Pour qu'un groupe linéaire continu borné et connexe soit clos, il faut* [16]) *et il suffit qu'il admette une base infinitésimale régulière.*

---

[14]) II, p. 160, théorème I et p. 163, théorème IV.

[15]) Un groupe clos, possédant au moins deux éléments, contient toujours un élément cyclique, autre que l'élément unité. Cela est évident, si le groupe est fini. S'il est infini, tout sous-groupe clos à un paramètre contient une infinité d'éléments cycliques.

[16]) I, p. 124.

Nous devons à M. Banach la remarque que les résultats obtenus par lui pour les groupes métriques [17]) permettent d'établir le théorème III sous hypothèses très générales.

(Reçu par la Rédaction le 12. 8. 1934).

---

[17]) S. Banach, Über metrische Gruppen, Studia Math. 3 (1931) p. 101—113.