Numerische Abschätzungen in elliptischen linearen Differentialgleichungen

von

J. SCHAUDER (Lwów).

Es sei

$$(1)\qquad \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}+\sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial u}{\partial x_j}+c\,u=f;\qquad \text{Diskr.}\ (a_{ik})=1$$

eine lineare Differentialgleichung vom elliptischen Typus[1]). Dabei sollen die Koeffizienten a_{ik}, b_j, c wie auch das freie Glied f in den unabhängigen Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ Hölderbedingungen erfüllen. Ich habe schon früher auf eine Methode hingewiesen[2]), die ohne Verwendung von Fundamentallösungen oder verallgemeinerten Potentialen Schranken für u und ihre Ableitungen liefert; anschließend führte dieser Weg unmittelbar zur Lösung der ersten Randwertaufgabe (ohne Benutzung der Integralgleichungen).

In der ausführlichen Darstellung[3]) habe ich betont, daß aus dem Beweisgang leicht numerische Abschätzungen für die in Betracht kommenden Konstanten gewonnen werden können[4]). Der

[1]) Auch Systeme von Differentialgleichungen der Form

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}^{(j)}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_k}+\sum_{m=1}^{s}\sum_{r=1}^{n} b_{rm}^{(j)}\frac{\partial u_m}{\partial x_r}+\sum_{m=1}^{s} c_m^{(j)} u_m=f_j;\ j=1,2,\ldots,s.$$

können zugelassen werden.

[2]) J. Schauder, Sur les équations aux dérivées partielles du type elliptique, C. R. Acad. Sc. 195 (27. XII. 1932) p. 1365 und J. Schauder, Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du type elliptique, C. R. 196 (9. I. 1933) p. 89.

[3]) J. Schauder, Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math. Zeitschr. 38, Heft 2 (Januar 1934) p. 257—282.

[4]) loc. cit. [3]), Fußnote 6 und ff.

Genauigkeit halber will ich hier diejenigen Schranken angeben, die sich noch durch etwas sorgfältigere Abschätzung in den Formeln der unter [3]) zitierten Arbeit (sie wird als bekannt vorausgesetzt) erzielen lassen[5]).

Sei G[6]) ein Gebiet der Klasse Bh und u eine Lösung der Gleichung (1), deren Ableitungen zweiter Ordnung Hölderbedingungen mit dem Exponenten α genügen[7]). Der Hölderexponent von a_{ik}, b_j, c und f sei derselbe. Wir verstehen weiter unter $\omega(\varepsilon)$ eine nichtnegative und nichtabnehmende Funktion, die keineswegs stetig zu sein braucht. Wir setzen voraus, daß uns eine Abschätzung für $|u|$, für die ersten Ableitungen $|D_1 u|$, sowie auch für die Kontinuitätsmoduln der ersten Ableitungen bekannt ist, nämlich

$$(2)\qquad \operatorname*{Max}_{G}\left(|u|+\sum_j\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|\right)\leqslant C;\quad \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(P_1)-\frac{\partial u}{\partial x_j}(P_2)\right|\leqslant \omega(r_{12})$$

und weiter

$$\sum|a_{ik}|+\sum|b_j|+|c|\leqslant m$$

$$(3)\qquad \sum\|a_{ik}\|_\alpha+\sum\|b_j\|_\alpha+\|c\|_\alpha\leqslant M;\quad M\geqslant 1.$$

Es ist nun leicht daraus die Schranken für $\|u\|_{\alpha,2}$ zu ermitteln. In der Tat sei R der Rand des Gebietes G; sei R_1 eine Teilmenge[8]) von R, die wir weiterhin als ein Hyperebenenstück $x_1=\text{const.}$ annehmen. Durch diese Einschränkung büßen wir nichts an Allgemeinheit ein.

Sei P ein beliebiger Punkt in $G+R_1$. Er hat dann von $R-R_1$ eine positive Entfernung $d(P)$. Die obere Schranke von $d(P)$, falls P in $G+R_1$ variiert, bezeichnen wir mit D. Ist λ eine

[5]) Diese Arbeit wird im Folgenden mit M. Z. zitiert. Die dort eingeführten Bezeichnungen für $\|u\|_{\alpha,n}$, $H_{\alpha,n}^{G}(f)$ werden beibehalten. Die Definitionen von $W(P,\lambda)$, W erhalten einen etwas anderen Sinn, was natürlich genau erörtert wird.

[6]) Ein Gebiet besteht nur aus inneren Punkten.

[7]) Wir werden voraussetzen, daß auch am Rande die Lösung α-Hölderstetige Ableitungen zweiter Ordnung besitzt. Von dieser Zusatzbedingung kann man sich nämlich leicht befreien. Übrigens läßt sich mühelos beweisen, daß eine Lösung u von (1), deren Randwerte φ auf einem Randstücke R_1 sich als zweimal α-Hölderstetig differenzierbar erweisen, in der abgeschlossenen Umgebung von R_1 α-Hölderstetige Ableitungen zweiter Ordnung besitzt. (Vgl. M. Z., p. 278).

[8]) die auch leer sein kann.

Zahl aus dem Intervall[9]) $\langle 0, \frac{k(m)}{10\sqrt{n}\,k'(m)} \rangle$, so wird unter $W(P, \lambda)$ der Durchschnitt[10]) von G mit demjenigen n-dimensionalen Würfel verstanden, der P als Mittelpunkt besitzt und dessen achsenparallel laufende Kanten die Länge $a_P = \frac{2}{\sqrt{n}}\,\lambda\, d(P)$ haben. Unser Ziel ist die obere Schranke $N(\lambda)$ der Funktion $w(P, \lambda)$

$$(4) \qquad w(P, \lambda) = \| u \|_{\alpha, 2}^{W(P, \lambda)} \cdot [d(P)]^{1+\alpha}; \; P \varepsilon G + R_1$$

zu bestimmen. Dabei wird die elementare, in jedem genügend regulären (z. B. konvexen) Teilgebiete g vom Durchmesser δ geltende Ungleichheit

$$(5) \qquad \operatorname*{Max}_{g} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \right| \leqslant \frac{\omega(\delta)}{\delta} + \delta^\alpha H_\alpha^g \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} \right)$$

benutzt. Es werde nun derjenige Punkt P_0 betrachtet $- P_0 \varepsilon G + R_1 -$ für welchen

$$(6) \qquad N(\lambda) \leqslant 2\, w(P, \lambda).$$

Wir müssen zwei Fälle unterscheiden, je nachdem die Entfernung s des Punktes P_0 von R_1

$$(7) \qquad \alpha) \;\; s \leqslant \frac{3\lambda\, d(P_0)\, k'(m)}{k(m)} = 3\eta \quad \text{oder} \quad \beta) \;\; s > 3\eta.$$

Im Falle α) konstruieren wir um P_0 als Mittelpunkt achsenparallel einen Würfel W von der Kantenlänge 10η. W ragt teilweise über das Gebiet hinaus. Um eine Abschätzung in $W(G+R_1)$ vornehmen zu können, müssen wir in irgendeiner Weise die Lösung u, ihre Derivierten $D_1 u$, $D_2 u$ einzeln auf den ganzen Würfel erweitern, so daß die Normen $\|u\|_\alpha$, $\|D_1 u\|_\alpha$, $\|D_2 u\|_\alpha$ erhalten bleiben. Genauer, es handle sich z. B. um ein gewisses $D_2 u$. Wir setzen $D_2 u(P)$ für $P \varepsilon W - (G + R_1)$ gleich dem Werte $D_2 u(\overline{P})$ in demjenigen Punkte $\overline{P}$ des Randteiles R_1, der dem Punkte P am nächsten gelegen ist. Wir ordnen nunmehr jedem Punkte P aus W einen Würfel W_P zu, mit P als Mittelpunkt und

[9]) $k(m)$ bezw. $k'(m)$ sind die untere bezw. die obere Schranke von $\sqrt{\lambda_i}$, unter λ_i die Eigenwerte der Matrix (a_{ik}) verstanden (Vgl. M. Z., Formel (5)).

[10]) Diese Definition von $W(P, \lambda)$ schließt alle in M. Z. behandelten Fälle in sich ein.

den zu den Koordinatenachsen parallelen Kanten der Länge $\frac{1}{2}\, a_{P_0}$. Für $P \varepsilon W - (G + R_1)$ hat man

$$(8\,\mathrm{a}) \qquad \| D_2 u \|_\alpha^{W_P \cdot W} \leqslant \| u \|_{\alpha, 2}^{W_{\overline{P}} \cdot W} \leqslant \| u \|_{\alpha, 2}^{W(\overline{P}, \lambda)} \leqslant 16 \| u \|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)}.$$

Um die erste Ungleichheit in (8 a) zu verifizieren, muß man nur beachten, daß $\overline{P}$, der dem Punkte P am nächsten gelegene Punkt von R_1, offenbar auch in W liegt, nämlich auf der Senkrechten zu R_1 durch P. Die zweite Ungleichheit in (8 a) ist einfach die Folge der Tatsache $\frac{1}{2}\, a_{P_0} \leqslant a_{\overline{P}}$ [11]), woraus auf $W_{\overline{P}} \cdot W \subset W(\overline{P}, \lambda)$ geschlossen werden kann. Die letzte Ungleichheit ergibt sich endlich genau so, wie in M. Z. Seite 267. Gehört aber P zu $(G + R_1) \cdot W$, so ist aus denselben Gründen

$$(8\,\mathrm{b}) \qquad \| D_2 u \|_\alpha^{W_P \cdot W} \leqslant \| u \|_{\alpha, 2}^{W(P, \lambda)} \leqslant 16 \| u \|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)}.$$

Die Würfel W_P, die jedem $P \varepsilon W$ zugeordnet werden, erfüllen wegen (8) alle Voraussetzungen des Hilfssatzes II aus M. Z. (p. 264). Wir gelangen somit, wenn wir diesen Hilfssatz anwenden, zur Ungleichheit

$$(9) \qquad \| u \|_{\alpha, 2}^{W(G + R_1)} \leqslant K_1(m) \| u \|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)}.$$

Die Konstante $K_1(m)$ hängt, wie dies durch die Schreibweise angedeutet wurde, von m ab, der in Formel (3) vorkommenden Zahl. Ebensolche Bedeutung kommt auch den weiterhin benutzten Konstanten $K_2(m)$, $K_3(m)$ etc. zu[12]).

Die Gewinnung der Schranke für $\| u \|_{\alpha, 2}^{W(P_0, \lambda)}\, d_0^{\,1+\alpha}$ bereitet nun[13]) keine besondere Schwierigkeit. Sei $\overline{P}_0$ der dem Punkte P_0 am nächsten gelegene Punkt von R_1. Wir verlegen den Koordinatenursprung nach $\overline{P}_0$. Dadurch wird an $\| u \|_{\alpha, 2}$ nichts geändert. In dem neuen Koordinatensystem möge etwa die x_1-Koordinate von P_0 positiv sein. Der durch

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 4\eta$$
$$(10) \qquad |x_i| \leqslant \eta; \quad i = 2, \ldots, n$$

definierte Quader $\mathfrak{W}$ enthält $W(P_0, \lambda)$, was aus geometrischen

[11]) Vgl. M. Z., p. 267, Beweis der Formeln (23) — (25).

[12]) Man darf offensichtlich alle $K_i(m) \geqslant 1$ annehmen.

[13]) $d_6 = d(P_0)$.

Überlegungen sofort ersichtlich wird. Wir müssen uns nur die Definition von $W(P_0, \lambda)$ vergegenwärtigen wie auch die Tatsache, daß in dem zu erledigenden Fall α) die Entfernung s nicht größer ist als 3η. Ebenso ist auch die Relation $\mathfrak{W} \subset W(G+R_1)$ geometrisch evident. Endlich ist die Entfernung des Quaders $\mathfrak{W}$ von den in G gelegenen Randpunkten von $(G+R_1)W$ nicht kleiner als η. Wir können also die Hilfssätze III bis VI aus M. Z., Kap. III anwenden[14]) und ähnlich wie in M. Z., Kap. III, Seite 274—276 vorgehen.

Wir schreiben zu diesem Zwecke in $W(G+R_1)$ die Gleichung (1) in der Form

$$(11)\quad F_0(u) = \sum_{i,k} a^0_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = \sum_{i,k} (a^0_{ik} - a_{ik}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_j b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} - c u + f = \psi .$$

Es ist, den Formeln (11) und (5) gemäß, und da der Durchmesser von $W(G+R_1)$ nicht mehr als $10\eta\sqrt{n}$ beträgt

$$(12)_1\quad \operatorname*{Max}_{W(G+R_1)} |\psi| \leqslant K_2(m)\,[\lambda^{2\alpha} d_0^{2\alpha} M . H_\alpha^{W(G+R_1)}(D_2 u) + M\lambda^{\alpha-1} d_0^{\alpha-1}\,\omega(10\eta\sqrt{n}) + C + \operatorname{Max}|f|]$$

$$(12)_2\quad H_\alpha^{W(G+R_1)} \leqslant K_2(m)\,[M\lambda^\alpha d_0^\alpha H_\alpha^{W(G+R_1)}(D_2 u) + \frac{M}{\lambda d_0}\,\omega(10\eta\sqrt{n}) + MC + \lambda^{1-\alpha} d_0^{1-\alpha} C + \lambda d_0 H_\alpha^{W(G+R_1)}(D_2 u) + \frac{1}{\lambda^\alpha d_0^\alpha}\,\omega(10\eta\sqrt{n}) + H(f)] .$$

Die Funktion u, als Lösung der elliptischen Differentialgleichung $F_0(u) = \psi$ mit **konstanten** Koeffizienten betrachtet, kann im Quader $W(G+R_1)$ in der Gestalt einer Summe $u = u_1 + u_2$ dargestellt werden, wobei u_1 die Gleichung $F_0(u_1) = \psi$ erfüllt und am Rande von $W(G+R_1)$ **verschwindet**, während u_2 die Lösung der **homogenen** Gleichung $F_0(u_2) = 0$ ist, welche am Rande von $W(G+R_1)$ dieselben Werte wie u annimmt. Hilfssatz VI aus M. Z. ermöglicht uns nun u_1 im kleineren Gebiete $\mathfrak{W}$ [und demzufolge auch in $W(P_0, \lambda)$] folgendermaßen abzuschätzen:

$$(13)\quad \|u_1\|_{\alpha,2}^{W(P_0,\lambda)} \leqslant \|u_1\|_{\alpha,2}^{\mathfrak{W}} \leqslant K_3(m)\left[\frac{1}{\lambda^\alpha d_0^\alpha} \cdot \operatorname*{Max}_{(G+R_1)W} |\psi| + H_\alpha^{(G+R_1)W}(\psi)\right].$$

Nimmt man jetzt die Formeln (12) zu Hilfe, ersetzt in (12) rechts $H_\alpha^{W(G+R_1)}(D_2 u)$ durch die aus (9) fließenden Abschätzungen und trägt zuletzt alles in (13) ein, so kommt man zu

$$(14)\quad \|u_1\|_{\alpha,2}^{W(P_0,\lambda)} \leqslant K_4(m)\,[\lambda^\alpha d_0^\alpha M . \|u\|_{\alpha,2}^{W(P_0,\lambda)} + \frac{M}{\lambda d_0}\,\omega(10\eta\sqrt{n}) + \frac{C + \operatorname{Max}|f|}{\lambda^\alpha d_0^\alpha} + MC + \lambda d_0 \|u\|_{\alpha,2}^{W(P_0,\lambda)} + \frac{1}{\lambda^\alpha d_0^\alpha}\,\omega(10\eta\sqrt{n}) + \lambda^{1-\alpha} d_0^{1-\alpha} C + H(f)] .$$

Was u_2 anbetrifft, so muß beachtet werden, daß die Randwerte von u_2 — am Rande von $W(G+R_1)$ — mit denen von u übereinstimmen. Für diese Randwerte gilt also

$$u_2 = u = u(P_0) + \sum_j [x_j - x_j(P_0)]\,\frac{\partial u}{\partial x_j}(P_0) + \eta\, O[\omega(10\eta\sqrt{n})] = u_2^1 + u_2^2 + u_2^3 .$$

u_2^1 ist konstant und $|u_2^1| \leqslant C$; u_2^2 ist eine **Linearform**, deren Koeffizienten dem absoluten Betrage nach $\leqslant C$ sind. Da weiter offensichtlich $F_0(u_2^2) = 0$ und $\|u_2^2\|_{\alpha,2} \leqslant C$ ist, bleibt nur noch die Betrachtung von u_2^3. Wird zu diesem Zwecke Hilfssatz IV aus M. Z. benutzt, so erhält man — falls mit φ die Randwerte von u auf R_1 bezeichnet werden —

$$(15)\quad \|u_2\|_{\alpha,2}^{W(P_0,\lambda)} \leqslant \|u\|_{\alpha,2}^{\mathfrak{W}} \leqslant K_5(m)\left[C + \lambda d_0 C + \frac{\omega(10\eta\sqrt{n})}{\lambda^{1+\alpha} d_0^{1+\alpha}} + \|\varphi\|_{\alpha,2}\right].$$

Die Zusammenfassung von (14) und (15) liefert

$$(16)\quad \|u\|_{\alpha,2}^{W(P_0,\lambda)} \leqslant K_6(m)\,[\lambda^\alpha d_0^\alpha M . \|u\|_{\alpha,2}^{W(P_0,\lambda)} + \lambda d_0 \|u\|_{\alpha,2}^{W(P_0,\lambda)} + \ldots + H(f)] .$$

[14]) Natürlich sind die dort gegebenen Dimensionen belanglos. Es handelt sich vorwiegend darum, daß $\mathfrak{W}$ und W aus zwei Standardfiguren von fester gegenseitiger Lage durch homothetische Kürzung im Verhältnis η hervorgehen.

Für

$$(17)\qquad \frac{1}{\lambda_0}=\frac{10\sqrt{n}\,k'(m)}{k(m)}\operatorname{Max}[1, K_6(m)\,D\,M^{\frac{1}{\alpha}}]$$

erhält man aus (16) eine Abschätzung für $d_0^{1+\alpha}\|u\|_{\alpha,2}^{W(P_0,\lambda)}$. Uns interessiert insbesondere eine Abschätzung für genügend große M[15]). Dann ist

$$(18)\qquad \lambda_0=\frac{k(m)}{10\sqrt{n}\,k'(m)\,K_6(m)\,M^{\frac{1}{\alpha}}D}$$

und man bekommt durch Einsetzen von (18) in (16)

$$(19)\qquad \frac{N(\lambda_0)}{2}\leqslant w(P_0,\lambda_0)=d_0^{1+\alpha}\|u\|_{\alpha,2}^{W(P_0,\lambda)}\leqslant$$

$$\leqslant K_7(m)D^{\alpha+1}\left[M^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\omega\left(\frac{1}{M^{\frac{1}{\alpha}}}\right)+M(C+\operatorname{Max}|f|+H_\alpha^{\;G}(f)+\|\varphi\|_{\alpha,2}\right]$$

Die Erledigung des Falles β) geschieht nach demselben Schema und ist sogar einfacher. Hier führen die Überlegungen des Kap. II aus M. Z. direkt zum Ziele.

Wir bilden um P_0 als Mittelpunkt einen achsenparallelen Würfel W, jetzt aber nur von der Kantenlänge 6η, d. h. genau so wie in M. Z. p. 266. In den dortigen Formeln (30), (31) muß nur die sich für $\operatorname{Max}_W|D_2u|$ aus Formel (5) der vorliegenden Note für $g=W$ ergebende Ungleichheit eingetragen werden und zugleich berücksichtigt werden, daß nach (2) die Koeffizienten a_{ik} als α-Hölderstetig vorausgesetzt waren. Das Ergebnis ist wieder Formel (19), wobei sogar rechts $\|\varphi\|_{\alpha,2}$ fehlt[16]). Die verlangte Abschätzung für $N(\lambda_0)$ wurde auf diese Weise gewonnen.

Auf dem gewöhnlichen Wege (Vgl. M. Z. p. 269) leitet man aus (19) eine entsprechende Ungleichheit für jedes Gebiet $G'\subset G$, daß sich ganz, teilweise oder überhaupt nicht an den Rand R von G anschmiegt, ab. So z. B. gilt für das ganze Gebiet G selbst

[15]) Sonst bekommt man eine nur von m abhängige Abschätzung.

[16]) Da jetzt W ganz zu G gehört.

$$(20)\qquad \|u\|_{\alpha,2}^{G}\leqslant K(m)\left[M^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\omega\left(\frac{1}{M^{\frac{1}{\alpha}}}\right)+\right.$$

$$\left.+(C+\operatorname{Max}_G|f|+H_\alpha^{\;G}(f)+\|\varphi\|_{\alpha,2}^{R}\right]^{17)}$$

oder unter Benutzung des Landau'schen O-Symbols abgekürzt

$$(21)\qquad \|u\|_{\alpha,2}^{G}=O\left[M^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}\omega\left(\frac{1}{M^{\frac{1}{\alpha}}}\right)\right]$$

Durch besondere Wahl der Funktion $\omega(\varepsilon)$ erhält man schon aus der kürzeren Form (21) mannigfache Schranken. Ich nenne folgende zwei Grenzfälle: α) $\omega(\varepsilon)=2C=$ konst. β) $\omega(\varepsilon)=$ $=\varepsilon\left(\sum_{i,k}\operatorname{Max}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\,\partial x_k}\right|\right)$. Der erste Fall besagt, daß uns nur eine Abschätzung für $|u|+\sum_j\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|$ gegeben ist, im zweiten wird eine „a priori" Abschätzung für $|u|$, $|D_1u|$, $|D_2u|$ gefordert. Diese beiden extremen Spezialfälle werden unter anderem in einer vor kurzem erschienenen Note angekündigt[18]), in welcher übrigens von dem Ideenkreise ausgiebig Gebrauch gemacht wird, der sich bereits in meinen Untersuchungen befindet.

Die hier entwickelte Methode ergibt auch viele andere Abschätzungen, z. B. $\|u\|_{\alpha,1}=O(M)\,\omega\left(\frac{1}{M^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{19)}$ u. s. w. Setzt man

[17]) Man könnte auch die Konstante $K(m)$ in ihrer Abhängigkeit von m (und auch von D) genauer verfolgen. In der Tat lassen sich für $k(m)$ und $k'(m)$ (vgl. Fußnote 9) Abschätzungen nach unten und oben bestimmen; dasselbe gilt für alle $K_i(m)$.

[18]) R. Caccioppoli, Sulle equazioni ellittiche a derivate parziali con n variabili indipendenti, Rend. Accad. dei Lincei XIX (7. I. 1934), p. 83—89. Dagegen rührt von diesem Verfasser die nachträgliche Bemerkung her, daß Methoden und Hilfsmittel solcher Art, wie ich sie benutzt habe, ausreichen, um den Fall der α-Hölderstetigen Koeffizienten zu erledigen; ich habe mich nämlich in meinen früheren Untersuchungen mit $(\alpha+\varepsilon)$-Hölderstetigen Koeffizienten a_{ik} begnügt. Wohl aber ist auch dieser Beitrag in den Überlegungen der vorliegenden Note enthalten.

[19]) Folgt direkt aus Formel (19) und nachträgliche Anwendung der Überlegungen aus M. Z. p. 269. Man bekommt auf diese Weise die genauere Abschätzung:

die Kenntnis der „a priori" — Schranken nur für u und deren Kontinuitätsmodul voraus, so wird man zu den den Ungleichheiten (19), (20), (21) u. s. w. analogen Ungleichheiten geführt, in welchen $M^{\frac{1+\alpha}{\alpha}}$ durch $M^{\frac{2+\alpha}{\alpha}}$ ersetzt wird. Endlich kann man — wenn man will — Fälle betrachten, wo statt der Ungleichheit (3) die folgende benutzt wird

$$|a_{ik}(P_1) - a_{ik}(P_2)| \leq \overline{\omega}(r_{1,2})\,;\ \text{etc.} \tag{22}$$

$$\frac{\overline{\omega}(\varepsilon)}{\varepsilon^{\alpha}} \leq \overline{M} \quad \text{(für kleine } \varepsilon\text{)}.$$

Es scheint mir aber, daß man, um einen wirklichen Fortschritt für die sog. „a priori" Abschätzungen in der Theorie der nichtlinearen elliptischen Differentialgleichungen zu erzielen, für lineare Differentialgleichungen dieser Art Abschätzungen gewinnen muß, die erheblich schärfer sind oder sogar eine andere Natur besitzen (Vgl. diesbezüglich M. Z., Fußnote 6).

$$\|u\|_{\alpha,1}^{G} \leq \overline{k}(m)\left[M\,\omega\left(\frac{1}{M^{\frac{1}{\alpha}}}\right) + \frac{C + \operatorname{Max}|f|}{M^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} + \frac{H(f)}{M^{\frac{1}{\alpha}}}\right]$$

Da weiter nach dem Inhalte der Fußnote [1]) dieselben Abschätzungen auch für die dort angegebenen Systeme gelten, so lassen sich weitere Schranken durch Differentiation der Gleichung (1) gewinnen; z. B.: gilt statt (2)

$$|u| + \Sigma \operatorname{Max}|D_1 u| + \Sigma \operatorname{Max}|D_2 u| \leq C; \quad |D_2 u(P_1) - D_2 u(P_2)| \leq \omega(r_{1\,2})$$

und statt (3)

$$\|a_{ik}\|_{\alpha,1} \leq M; \ldots \quad \|c\|_{\alpha,1} \leq M,$$

so ist $\|u\|_{\alpha,2} = O(M)\,\omega\left(\frac{1}{M^{\frac{1}{\alpha}}}\right)$, (entsprechendes für $\|u\|_{\alpha,3}$)

etc.

(Reçu par la Rédaction le 19. 7. 1934).