Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes

von

A. KOLMOGOROFF (Moskau).

Wir gehen von der folgenden Definition des topologischen linearen Raumes aus: Eine Menge E bildet einen *topologischen linearen Raum,* wenn

1. für die Elemente von E die Operationen der Addition und der Multiplikation mit einer reellen Zahl definiert sind, die den Axiomen des allgemeinen linearen Raumes genügen [1]);

2. für jede Untermenge A der Menge E eine abgeschlossene Hülle $\bar{A} \subset E$ definiert ist, die den drei Axiomen der topologischen Räume genügt [2]);

3. die Operationen der Addition und Multiplikation stetig sind.

Die offenen Mengen eines im Sinne der Anmerkung [2]) topologischen Raumes, als Umgebungen der in ihnen enthaltenen Punkte betrachtet, genügen im allgemeinen nur den drei ersten HAUSDORFF'schen Axiomen und dem ersten Trennungsaxiom [3]). In unserem Falle der linearen topologischen Räume jedoch, sowie überhaupt im Falle *topologischer Gruppen,* werden auch das zweite und dritte Trennungsaxiom automatisch erfüllt, d. h. der Raum erweist sich als regulär. Diese Tatsache wird in § 1 bewiesen.

---

[1]) Siehe S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932, chapitre II.

[2]) Siehe z. B. P. Alexandroff, Über stetige Abbildungen kompakter Räume, Math. Ann. 96 (1926), S. 555. Diese Axiome lauten wie folgt:

1. Jede höchstens aus einem Elemente von E bestehende Teilmenge A ist mit ihrer abgeschlossenen Hülle identisch.

2. $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ für eine beliebige Menge $A \subset E$.

3. $\overline{M + N} = \bar{M} + \bar{N}$.

[3]) F. Hausdorff, Mengenlehre, Berlin, 1927, p. 227—229.

Deshalb schiene es vollkommen natürlich, die allgemeine Theorie der linearen Funktionale und Operatoren gerade in allgemeinen linearen topologischen Räumen zu entwickeln. Ein bedeutender Teil dieser Theorie ist jedoch bis heute nur für den Fall *normierter Räume* entwickelt, d. h. solcher Räume, in welchen jedem Element x eine nichtnegative reelle Zahl $|x|$ als Norm zugeordnet ist, die den folgenden Forderungen genügt:

(1) $$|ax| = |a|\,|x|,$$

(2) $$|x+y| \leqslant |x| + |y|,$$

wobei die topologischen Eigenschaften des Raumes durch den Abstand zweier Elemente bestimmt sind, der nach der Formel

(3) $$\varrho(x,y) = |x-y|$$

definiert ist.

Es entsteht die Frage: *Welche linearen topologischen Räume können normiert werden?* D. h. unter welchen Bedingungen kann in einem linearen topologischen Raum eine Norm eingeführt werden, die den Bedingungen (1—2) unterliegt und mit Hilfe von (3) die im Raum a priori gegebenen topologischen Beziehungen definiert? Zur Beantwortung dieser Frage benützen wir die folgende Definition [4]):

Definition. Eine Menge $A \subset E$ heißt *beschränkt*, wenn für jede beliebige Folge $\{a_n\}$ von reellen Zahlen und für jede beliebige Folge von Elementen $\{x_n\}$, die A angehören, aus $a_n \to 0$ die Beziehung $a_n x_n \to 0$ folgt (wo 0 in der zweiten Beziehung die Null des Raumes E ist).

Diese Definition gestattet uns die Formulierung des folgenden Satzes:

Satz. *Für die Normierbarkeit des Raumes E ist notwendig und hinreichend, daß in E mindestens eine beschränkte konvexe Umgebung der Null existiert.*

Dabei heißt eine Menge $A \subset E$ *konvex*, wenn aus $x \in A$, $y \in A$, $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$

(4) $$\frac{\lambda x + \mu y}{\lambda + \mu} \in A$$

folgt.

Dem Beweis dieses Satzes ist der § 2 gewidmet.

[4]) S. Mazur und W. Orlicz, Über Folgen linearer Operationen, Stud. Math. 4 (1933) p. 152—157, insb. p. 152.

§ 1.

In diesem Paragraphen kann E eine beliebige topologische Gruppe sein, d. h. ein beliebiger topologischer Raum, in welchem die allen Axiomen der Gruppe genügende Addition definiert ist und Substraktion und Addition stetig sind. Wir wollen beweisen, daß E in diesem Falle regulär sein wird, daß, mit anderen Worten, für jede beliebige Umgebung $U(x_0)$ eines Elementes $x_0 \in E$ eine Umgebung $V(x_0)$ gefunden werden kann, die zusammen mit ihrer abgeschlossenen Hülle in $U(x_0)$ enthalten ist. Mit Hilfe der Transformation $x' = x - x_0$ wird diese Aufgabe auf den Fall $x_0 = 0$ zurückgeführt.

Es sei also eine Umgebung U der Null gegeben. Da $0+0=0$ ist, kann infolge der Stetigkeit der Addition eine solche Umgebung V der Null gefunden werden, daß aus $x' \in V$, $x'' \in V$ die Beziehung $x' + x'' \in U$ folgt. Es sei nun $x \in \overline{V}$. Da $x - x = 0$ und die Substraktion stetig ist, existiert eine solche Umgebung $W(x)$ des Punktes x, daß aus $x' \in W(x)$ und $x'' \in W(x)$ die Beziehung $x' - x'' \in V$ folgt. Wir finden nun einen Punkt x^*, der sowohl $W(x)$ als auch V angehört (x^* existiert, da $x \in \overline{V}$). Da x und x^* der Umgebung $W(x)$ angehören, ist $x - x^* \in V$. Da ferner $x - x^*$ und x^* der Umgebung V angehören, gehört $x = (x - x^*) + x^*$ der Umgebung U an, woraus

(5) $$\overline{V} \subset U$$

folgt, w. z. b. w.

§ 2.

Die Notwendigkeit der Bedingungen unseres Satzes ist evident, da die aus allen Punkten mit $|x| < 1$ bestehende Sphäre eine konvexe beschränkte Umgebung der Null bildet. Es bleibt zu beweisen, daß die Bedingungen hinreichend sind. Es sei U eine konvexe beschränkte Umgebung der Null. Wir bezeichnen mit aU die Menge der Punkte $x = ax'$, für welche $x' \in U$. Bei jedem beliebigen $a \neq 0$ ist die Menge aU eine beschränkte Umgebung der Null. Wir setzen definitionsgemäß

(6) $$|x| = \sup |a|, \quad x \in E - aU,$$

wo das Zeichen sup über alle a erstreckt wird, für die die Beziehung $x \in E - aU$ gilt.

Man sieht sofort, daß die nach der Formel (6) definierte Norm der Bedingung (1) genügt.

Wir wollen jetzt beweisen, daß die Bedingung (2) ebenfalls erfüllt ist. Bemerken wir zu diesem Zweck vor allem, daß aus $x \in aU$ und $y \in aU$ bei $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$

$$\frac{\lambda x + \mu y}{\lambda + \mu} \in aU$$

folgt und daher, aus $|x| \leqslant \alpha$ und $|y| \leqslant \alpha$

$$\left|\frac{\lambda x + \mu y}{\lambda + \mu}\right| \leqslant \alpha$$

folgt. Setzen wir nun $|x| = \lambda$, $|y| = \mu$, $\lambda + \mu = \alpha$, $x' = \frac{\alpha}{\lambda} x$, $y' = \frac{\alpha}{\mu} y$, dann ist

$$|x'| = \frac{\alpha}{\lambda} |x| = \alpha,$$

$$|y'| = \frac{\alpha}{\mu} |y| = \alpha,$$

$$|x + y| = \left|\frac{\lambda x' + \mu y'}{\lambda + \mu}\right| \leqslant \alpha = \lambda + \mu = |x| + |y|,$$

w. z. b. w.

Es bleibt zu zeigen, daß die Entfernung $\varrho(x, y) = |x - y|$ dieselben Grenzbeziehungen definiert, wie sie im Raume E vorausgesetzt wurden. Wir betrachten den Punkt 0 und beweisen, daß die Mengen aU $(a > 0)$ ein volles System von Umgebungen der Null bilden. Es sei W irgendeine Umgebung der Null; es sollen solche $a > 0$ gefunden werden, daß aU in W enthalten ist. Wäre dies unmöglich, so könnte man eine solche Folge $a_n \to 0$ und eine solche Folge $x_n \in U$ finden, daß die Punkte $a_n x_n$ für alle n außerhalb W liegen und daher die Folge $a_n x_n$ nicht gegen Null strebt, was der Beschränktheit von U widerspricht.

Die Mengen aU bilden also für $a > 0$ ein volles Umgebungssystem der Null. Man sieht sofort, daß die Sphäre $|x| < a$ in der Menge aU enthalten ist. Wenn daher bewiesen werden wird, daß 0 ein innerer Punkt jeder Sphäre $|x| < a$, $a > 0$, ist, so wird damit gezeigt werden, daß das System der Sphären $|x| < a$, $a > 0$, dem vollen Umgebungssystem aU der Null äquivalent ist. Jede Sphäre $|x| < a$, $a > 0$, enthält aber eine Umgebung der Null, welche dem Durchschnitt von $\frac{1}{2} aU$ und $-\frac{1}{2} aU$ gleich ist[5]). In der Tat, ist $x \in \frac{1}{2} aU$ und gleichzeitig $x \in -\frac{1}{2} aU$, so wird x auch in jeder Umgebung bU mit $|b| \geqslant \frac{1}{2} a$ liegen, woraus $|x| \leqslant \frac{1}{2} a < a$ folgt.

Mittels der Transformation $x' = x - x_0$ überzeugen wir uns, daß die Sphären um den Punkt x_0 dem vollen Umgebungssystem dieses Punktes äquivalent sind. Damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

[5]) Es wäre übrigens nicht schwer sich zu überzeugen, daß die Sphäre $|x| < a$ mit dem Durchschnitt von aU und $-aU$ zusammenfällt.

(Reçu par la Rédaction le 26. 5. 1934).