Über die Dimension linearer Räume

von

H. LÖWIG (Prag).

In dieser Abhandlung mache ich den Vorschlag, zwei Begriffe „affine Dimensionszahl eines linearen Raumes“ und „metrische Dimensionszahl eines linearen metrischen Raumes“ durch folgende Definitionen einzuführen:

Definition 1. *Unter der affinen Dimensionszahl eines linearen Raumes* $\mathfrak{R}$ *verstehe man die kleinste Kardinalzahl* $\aleph$ *von der Eigenschaft, daß es mindestens eine Teilmenge von* $\mathfrak{R}$ *von der Mächtigkeit* $\aleph$ *gibt, deren lineare Hülle mit* $\mathfrak{R}$ *zusammenfällt.*

Definition 2. *Unter der metrischen Dimensionszahl eines linearen metrischen Raumes* $\mathfrak{R}$ *verstehe man die kleinste Kardinalzahl* $\aleph$ *von der Eigenschaft, daß es mindestens eine Teilmenge von* $\mathfrak{R}$ *von der Mächtigkeit* $\aleph$ *gibt, deren abgeschlossene lineare Hülle mit* $\mathfrak{R}$ *zusammenfällt.*

Unter der linearen Hülle einer Teilmenge $\mathfrak{M}$ eines linearen Raumes ist dabei die lineare Mannigfaltigkeit aller Linearkombinationen endlich vieler Elemente von $\mathfrak{M}$ zu verstehen. (Linearkombinationen mit beliebigen komplexen Koeffizienten, wenn es sich um einen komplexen linearen Raum, und mit reellen Koeffizienten, wenn es sich um einen reellen linearen Raum handelt). Unter der abgeschlossenen linearen Hülle einer Teilmenge eines linearen metrischen Raumes ist die lineare Mannigfaltigkeit der starken Häufungsstellen der einfachen linearen Hülle dieser Menge zu verstehen. (Die Worte „lineare Hülle“ und „abgeschlossene lineare Hülle“ werden hier in Anlehnung an die Abhandlung von F. HAUSDORFF „Zur Theorie der linearen metrischen Räume“, J. reine angew. Math. 167 (1932), p. 294—311, insb. p. 295 gebraucht. Auch sonst wird in dieser Arbeit vielfach die in der zitierten HAUSDORFF’schen Abhandlung gebrauchte Terminologie verwendet

werden). Es ist klar, daß die affine Dimensionszahl eines linearen metrischen Raumes niemals kleiner sein kann als seine metrische Dimensionszahl.

Im folgenden soll auseinandergesetzt werden, welcher Zusammenhang zwischen den Begriffen „affine Dimensionszahl eines linearen Raumes“ und „metrische Dimensionszahl eines linearen metrischen Raumes“ und denjenigen Teilmengen eines linearen bzw. linearen metrischen Raumes besteht, welche man als „Basen“ bzw. als „Grundmengen“ zu bezeichnen pflegt. Bei diesen Erörterungen wird der folgende Satz der Mengenlehre benützt: *Für jede unendliche Kardinalzahl* $\aleph$ *ist* $\aleph^2 = \aleph$.

Definition 3. *Eine Teilmenge* $\mathfrak{M}$ *eines linearen Raumes* $\mathfrak{R}$ *heiße eine Basis von* $\mathfrak{R}$, *wenn endlich viele Elemente von* $\mathfrak{M}$ *stets linear unabhängig sind und die lineare Hülle von* $\mathfrak{M}$ *mit* $\mathfrak{R}$ *zusammenfällt.*

Bekanntlich besitzt jeder lineare Raum mindestens eine Basis.

Satz 1. *Jede Basis eines linearen Raumes* $\mathfrak{R}$ *hat eine Mächtigkeit, welche der affinen Dimensionszahl von* $\mathfrak{R}$ *gleich ist.*

Um diesen Satz zu begründen, genügt es zu beweisen, daß zwei Basen eines linearen Raumes stets die gleiche Mächtigkeit besitzen; denn jede Teilmenge von $\mathfrak{R}$, deren lineare Hülle $\mathfrak{R}$ ist, enthält eine Basis von $\mathfrak{R}$. Es seien also $\mathfrak{B}^{(1)}$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$ zwei Basen von $\mathfrak{R}$. Dann kann jedes Element von $\mathfrak{B}^{(1)}$ auf genau eine Weise als Linearkombination endlich vieler Elemente von $\mathfrak{B}^{(2)}$ dargestellt werden. In diesen Linearkombinationen muss auch jedes Element von $\mathfrak{B}^{(2)}$ mindestens einmal wirklich vorkommen; ein Element $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{B}^{(2)}$, welches in keiner dieser Linearkombinationen vorkäme, könnte man nämlich durch endlich viele Elemente von $\mathfrak{B}^{(1)}$ und daher auch durch endlich viele von $\mathfrak{x}$ verschiedene Elemente von $\mathfrak{B}^{(2)}$ linear ausdrücken: es wären dann also nicht endlich viele Elemente von $\mathfrak{B}^{(2)}$ stets linear unabhängig. Also ist $\mathfrak{B}^{(2)}$ die Vereinigungsmenge einer $\mathfrak{B}^{(1)}$ äquivalenten Gesamtheit endlicher Mengen. Sind daher $\aleph^{(1)}$ und $\aleph^{(2)}$ die Mächtigkeiten von $\mathfrak{B}^{(1)}$ und $\mathfrak{B}^{(2)}$ und ist $\aleph_0$ die Mächtigkeit der abzählbaren Mengen, dann ist

$$\aleph^{(2)} \leqq \aleph_0 \aleph^{(1)}. \tag{1}$$

Nun werde angenommen, daß $\aleph^{(1)}$ und $\aleph^{(2)}$ beide unendlich sind. Dann folgt aus (1)

$$\aleph^{(2)} \leqq \aleph^{(1)}.$$

Da man ebenso die Ungleichung $\aleph^{(1)} \leq \aleph^{(2)}$ beweisen kann, ergibt sich die zu beweisende Gleichung

$$\aleph^{(2)} = \aleph^{(1)}. \tag{2}$$

Daß aber Gleichung (2) auch richtig ist, wenn mindestens eine der beiden Kardinalzahlen $\aleph^{(1)}$ und $\aleph^{(2)}$ endlich ist, kann als bekannt angesehen werden.

Satz 2. *Ein linearer Raum $\mathfrak{R}$, der nicht nur aus einem Nullelement besteht, hat die Mächtigkeit des Kontinuums, wenn seine affine Dimensionszahl kleiner als die Mächtigkeit des Kontinuums ist, und sonst eine Mächtigkeit, welche gleich dieser affinen Dimensionszahl ist.*

Beim Beweise können wir uns auf den Fall beschränken, daß die affine Dimensionszahl des Raumes unendlich ist. Wir wollen sie mit $\aleph$ bezeichnen. Es sei weiter $\mathfrak{M}$ eine Basis von $\mathfrak{R}$; diese hat dann nach Satz 1 die Mächtigkeit $\aleph$. Die Menge aller Teilmengen von $\mathfrak{M}$, welche aus n Elementen bestehen (n eine natürliche Zahl), hat offenbar genau die Mächtigkeit $\aleph^n = \aleph$. Anderseits hat die Menge der Belegungen einer solchen Menge von n Elementen von $\mathfrak{M}$ mit der Menge der von Null verschiedenen reellen (oder komplexen) Zahlen die Mächtigkeit des Kontinuums. Also hat die Menge der Linearkombinationen von genau n Elementen von $\mathfrak{M}$ die Mächtigkeit $\aleph_\alpha \aleph$, wenn $\aleph_\alpha$ die Mächtigkeit des Kontinuums ist. $\mathfrak{R}$ selbst hat daher die Mächtigkeit $\aleph_0 \aleph_\alpha \aleph$, d. h. wieder die Mächtigkeit $\aleph_\alpha \aleph$. Da aber

$$\aleph_\alpha \aleph = \operatorname{Max}(\aleph_\alpha, \aleph)$$

ist, ist die Mächtigkeit von $\mathfrak{R}$ gleich der größeren der beiden Kardinalzahlen $\aleph_\alpha$ und $\aleph$. Das wurde aber in Satz 2 gerade behauptet.

Definition 4. *Eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ eines linearen metrischen Raumes $\mathfrak{R}$ heiße eine Grundmenge von $\mathfrak{R}$, wenn erstens kein Element von $\mathfrak{M}$ der abgeschlossenen linearen Hülle der übrigen Elemente von $\mathfrak{M}$ angehört und zweitens die abgeschlossene lineare Hülle von $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{R}$ zusammenfällt.*

F. Hausdorff verlangt in der bereits zitierten Abhandlung von einer Grundmenge $\mathfrak{M}$ nur, daß endlich viele ihrer Elemente stets linear unabhängig seien und daß die abgeschlossene lineare Hülle von $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{R}$ zusammenfalle.

S. Banach nennt auf Seite 58 seines Buches „Théorie des opérations linéaires" (Warszawa 1932) eine Grundmenge (ensemble fondamental) von $\mathfrak{R}$ überhaupt jede Teilmenge von $\mathfrak{R}$, deren abgeschlossene lineare Hülle mit $\mathfrak{R}$ zusammenfällt.

Satz 3. *Jede Grundmenge eines linearen Raumes $\mathfrak{R}$ besitzt eine Mächtigkeit, welche gleich der metrischen Dimensionszahl von $\mathfrak{R}$ ist.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{G}$ eine Grundmenge von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{R}$, deren Mächtigkeit gleich der metrischen Dimensionszahl von $\mathfrak{R}$ ist und deren abgeschlossene lineare Hülle mit $\mathfrak{R}$ zusammenfällt. Dann ist jedes Element von $\mathfrak{M}$ starkes Grenzelement einer Folge von Linearkombinationen endlich vieler Elemente von $\mathfrak{G}$. Also gehört jedes Element von $\mathfrak{M}$ der abgeschlossenen linearen Hülle einer höchstens abzählbaren Teilmenge von $\mathfrak{G}$ an. In diesen höchstens abzählbaren Teilmengen von $\mathfrak{G}$, welche so den Elementen von $\mathfrak{M}$ zugeordnet sind, muß auch jedes Element von $\mathfrak{G}$ mindestens einmal wirklich vorkommen; aus der entgegengesetzten Annahme würde nämlich folgen, daß ein Element von $\mathfrak{G}$ der abgeschlossenen linearen Hülle der übrigen Elemente von $\mathfrak{G}$ angehört. Also ist $\mathfrak{G}$ die Vereinigungsmenge einer $\mathfrak{M}$ äquivalenten Gesamtheit höchstens abzählbarer Mengen. Ist daher $\aleph^{(1)}$ die Mächtigkeit von $\mathfrak{M}$ und $\aleph^{(2)}$ die Mächtigkeit von $\mathfrak{G}$ und ist $\aleph^{(1)}$ unendlich, dann kann man analog wie beim Beweise des Satzes 1 schließen, daß

$$\aleph^{(2)} \leq \aleph^{(1)}$$

ist. Nun ist aber $\aleph^{(1)}$ die metrische Dimensionszahl von $\mathfrak{R}$. Nach Definition 2 muß daher

$$\aleph^{(2)} = \aleph^{(1)}$$

sein, wie in Satz 3 behauptet wurde.

In dem Falle, daß $\mathfrak{R}$ *euklidisch* und vollständig ist, ist jedes vollständige normierte Orthogonalsystem eine Grundmenge.

(Ein linearer metrischer Raum wird hier euklidisch genannt, wenn es in ihm eine symmetrische skalare bilineare Funktion (im Falle eines komplexen linearen metrischen Raumes eine hermiteisch symmetrische skalare bilineare Funktion) $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ mit

$$f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}) = |\mathfrak{x}|^2$$

für alle $\mathfrak{x}$ gibt. Zwei Elemente $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ eines euklidischen Raumes heißen orthogonal, wenn $f(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = 0$ ist. Eine Menge $\mathfrak{M}$ eines vollständigen euklidischen Raumes $\mathfrak{R}$ heißt ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem, wenn die Elemente von $\mathfrak{M}$ alle den absoluten Betrag Eins haben, paarweise zueinander orthogonal sind und es kein Element von $\mathfrak{R}$ gibt, welches vom Nullelement verschieden und zu allen Elementen von $\mathfrak{M}$ orthogonal ist. Daß es in jedem vollständigen euklidischen Raume mindestens ein vollständiges normiertes Orthogonalsystem gibt, kann man mit Hilfe des Auswahlprinzips leicht einsehen. Der Leser sei hier auch auf die Arbeit des Verfassers „Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder transfiniter Dimensionszahl" verwiesen, die in den „Acta Litt. Sci. Szeged" 7 (1934), p. 1—33 erschienen ist.

Also hat jedes vollständige normierte Orthogonalsystem eines vollständigen euklidischen Raumes eine Mächtigkeit, welche gleich der metrischen Dimensionszahl des Raumes ist.

Ob jeder lineare metrische Raum eine Grundmenge im Sinne unserer Definition 4 besitzt, konnte nicht entschieden werden. (Man könnte von einer Wohlordnung des Raumes ausgehen und in dieser die Menge aller derjenigen Elemente betrachten, welche nicht der abgeschlossenen linearen Hülle der Menge ihrer Vorgänger angehören. Die so ausgesonderte Menge muss aber keine Grundmenge des Raumes im Sinne unserer Definition 4 sein).

Satz 4. *Eine lineare Mannigfaltigkeit $\mathfrak{P}$ eines linearen metrischen Raumes und ihre abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{P}}$ haben stets die gleiche metrische Dimensionszahl.*

Es sei $\mathfrak{M}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{P}$, deren abgeschlossene Hülle in $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{P}$ zusammenfällt und deren Mächtigkeit möglichst klein ist. Dann fällt offenbar auch die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{M}$ in $\overline{\mathfrak{P}}$ mit $\overline{\mathfrak{P}}$ zusammen. Also ist die metrische Dimensionszahl von $\overline{\mathfrak{P}}$ höchstens gleich der metrischen Dimensionszahl von $\mathfrak{P}$. Anderseits kann man zu jeder unendlichen Teilmenge von $\overline{\mathfrak{P}}$, deren abgeschlossene Hülle mit $\overline{\mathfrak{P}}$ zusammenfällt, eine ebensolche Teilmenge von $\mathfrak{P}$ von gleicher Mächtigkeit angeben; man braucht nur jedes Element $\mathfrak{x}$ der erstgenannten Menge durch eine gegen $\mathfrak{x}$ stark konvergente Folge von Elementen von $\mathfrak{P}$ zu ersetzen. Damit ist Satz 4 bewiesen; denn auf den hier nicht berücksichtigten Fall, dass $\mathfrak{P}$ oder $\overline{\mathfrak{P}}$ endlichdimensional ist, braucht nicht eingegangen zu werden.

Bekanntlich kann man jeden linearen metrischen Raum $\mathfrak{R}$ zu einem vollständigen linearen metrischen Raum $\mathfrak{R}^*$ derart erweitern, dass $\mathfrak{R}^*$ die abgeschlossene lineare Hülle von $\mathfrak{R}$ in $\mathfrak{R}^*$ ist. *In diesem Falle haben also $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}^*$ stets die gleiche metrische Dimensionszahl.*

(Reçu par la Rédaction le 17. 3. 1934).