Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen.

Zweite Mitteilung [9])

von

S. MAZUR und W. ORLICZ (Lwów).

§ 3.

9. Seien wieder X und Y Räume vom Typus (F). Die Operation $U(x)$ heißt *beschränkt* im Punkte $x_0 \in X$, wenn stets für $h_n \in X$ $(n=1,2,..)$ mit $h_n \to 0$ die Folge $\{U(x_0+h_n)\}$ beschränkt ist [10]); ist eine Operation in jedem Punkte der Menge $R \subset X$ beschränkt, so heißt sie beschränkt in R. Wir bezeichnen die Operation $U(x)$ als *gleichmäßig beschränkt* in der Menge $R \subset X$, wenn stets für $x_n \in R$ und $h_n \in X$ $(n=1,2,..)$ mit $h_n \to 0$ die Folge $\{U(x_n+h_n)\}$ beschränkt ist.

11. *Ist die Operation m-ten Grades $U(x)$ in einem Punkte $x_0 \in X$ beschränkt, so ist sie stetig.* — Wir können ohne weiteres

---

[9]) Die Hauptergebnisse dieser Mitteilung wurden der Polnischen Mathematischen Gesellschaft (Abteilung Lwów) in den Sitzungen vom 21. 12. 1933 und 24. 11. 1934 mitgeteilt. Die hier auftretenden Nummern der Paragraphen, Abschnitte, Sätze, Formeln sowie Fußnoten schließen sich denen der ersten Mitteilung an: S. Mazur und W. Orlicz, Grundlegende Eigenschaften der polynomischen Operationen. Erste Mitteilung, Studia Math. 5 (1934) p. 50—68.

[10]) Bezüglich des Begriffes einer beschränkten Folge (Menge) von Elementen eines Raumes vom Typus (F) vgl. die unter [8]) zitierte Arbeit; auch sind einige der in diesem § angegebenen, die Operationen bzw. Polynome m-ten Grades betreffenden Ergebnisse für $m=1$ von dort zu entnehmen. Sind X_i $(i=1,..n)$ Räume vom Typus (F), so nennen wir die für $x_i \in X_i$ erklärte Operation $U(x_1,..x_n)$ beschränkt im Punkte $x_0=(x_{10},..x_{n0})$, wenn die durch $U(x)=U(x_1,..x_n)$ für $x=(x_1,..x_n) \in X = X_1 \times .. \times X_n$ definierte Operation diese Eigenschaft hat; analog möge der Leser die im folgenden auftretenden Definitionen auf den Fall mehrerer Veränderlichen übertragen.

$x_0 = 0$ annehmen; denn sonst ersetze man die Operation $U(x)$ durch $U(x+x_0)$. Sei $U(x) = U_0(x) + .. + U_m(x)$ die kanonische Darstellung von $U(x)$; es ist zu beweisen, daß die Operation $U_k(x)$ für $k > 0$ stetig ist. Da $U(tx) = t^0 U_0(x) + .. + t^m U_m(x)$ für rationale t, so ist nach 1., auf $t_i = i$ angewandt, $U_k(x) = a_{k0} U(0x) + .. + a_{km} U(mx)$; man ersieht hieraus, daß die Operation $U_k(x)$ im Nullpunkte beschränkt ist; mithin besitzt aber die erzeugende Operation $U_k^*(x_1, .. x_k)$ von $U_k(x)$, wie sich unter Benutzung der Formel (22) unmittelbar ergibt, dieselbe Eigenschaft. Sei jetzt $h_n \in X$ $(n = 1, 2, ..)$, $h_0 \in X$ und $h_n \to h_0$; wir wählen natürliche p_n, q_n mit $p_n \to +\infty$, $p_n |h_n - h_0| \to 0$, $q_n \to +\infty$, $q_n^{k-1} p_n^{-1} \to 0$. Alsdann ist ersichtlich $p_n(h_n - h_0) \to 0$, $q_n^{-1} h_n \to 0$, $q_n^{k-i} p_n^{-i} \to 0$ $(i = 1, .. k)$; aus dem oben gesagten folgt daher

$$
\begin{aligned}
&U_k^*(\underbrace{h_0, .. h_0}_{k-i}, \underbrace{h_n - h_0, .. h_n - h_0}_{i}) = \\
(26)\qquad & q_n^{k-i} p_n^{-i} U_k^*(\underbrace{q_n^{-1} h_0, .. q_n^{-1} h_0}_{k-i}, \underbrace{p_n(h_n - h_0), .. p_n(h_n - h_0)}_{i}) \to 0 .
\end{aligned}
$$

Nun ist stets

$$
(27)\quad U_k(x') - U_k(x'') = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} U_k^*(\underbrace{x'', .. x''}_{k-i}, \underbrace{x' - x'', .. x' - x''}_{i});
$$

ersetzt man hierin x', x'' durch h_n, h_0, so kommt wegen (26) sofort $U_k(h_n) \to U_k(h_0)$, und damit ist alles bewiesen.

Insbesondere ist also eine in einem Punkte stetige Operation m-ten Grades schon stetig. Von Wichtigkeit ist die folgende Verschärfung von 11.:

Satz VI. *Führt die Operation m-ten Grades $U(x)$ jede gegen einen Punkt $x_0 \in X$ konvergente Punktfolge aus einer Menge $R \subset X$, deren Komplement in x_0 von erster Kategorie ist, in eine beschränkte über, so ist sie stetig.*

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf wiederum $x_0 = 0$ angenommen werden. Ist $U(x) = U_0(x) + .. + U_m(x)$ die kanonische Darstellung von $U(x)$, so genügt es nach 11. zu zeigen, daß die Operation $U_k(x)$ für $k > 0$ im Nullpunkte beschränkt ist. Sei also $h_n \in X$ $(n = 1, 2, ..)$ und $h_n \to 0$. Wegen der Voraussetzung gibt es eine Kugel K mit 0 als Mittelpunkt, so daß die Menge $S = K - R$ von erster Kategorie ist; wir bezeichnen mit S_{npq} $(p, q = 0, .. m)$ die Menge aller Elemente der Form $n(p+1)^{-1} x - nqh_n$ mit $x \in S$. Da die S_{npq} mit S homothetische Mengen sind, so erschöpft ihre Summe T den Raum X nicht. Ist $h_0 \in X - T$, so ist stets $(p+1)(qh_n + n^{-1}h_0) \in X - S$ und mithin auch $(p+1)(qh_n + n^{-1}h_0) \in R$ für alle hinreichend großen Indizes n, weil $(p+1)(qh_n + n^{-1}h_0) \to 0$ gleichmäßig inbezug auf p, q. Aus der Beschränktheit der Folgen $\{U((p+1)(qh_n + n^{-1}h_0))\}$ ergibt sich sofort die Behauptung, da man die Folge $\{U_k(h_n)\}$ als lineare Kombination von ihnen darstellen kann. In der Tat ist einerseits $U(tx) = t^0 U_0(x) + .. + t^m U_m(x)$ und andererseits

$$
(28)\qquad U_k(x + th) = \sum_{i=0}^{k} t^i \binom{k}{i} U_k^*(\underbrace{x, .. x}_{k-i}, \underbrace{h, .. h}_{i})
$$

für rationale t, wo $U_k^*(x_1, .. x_k)$ die erzeugende Operation von $U_k(x)$ bezeichnet; es bleibt also nur noch übrig, 1. mit $t_i = i+1$ bzw. $m = k$, $t_i = i$ anzuwenden und dabei x durch $qh_n + n^{-1}h_0$ bzw. x, h durch $n^{-1}h_0$, h_n in der obigen Formel für $U(tx)$ bzw. $U_k(x+th)$ zu ersetzen.

In diesem Satze kann die Voraussetzung, das Komplement von R sei in x_0 von erster Kategorie, durch die schwächere, R sei in x_0 von zweiter Kategorie, nicht ersetzt werden. In der Tat, sei die aus den Gliedern der transfiniten Folge $a_0, a_1, .. a_\xi, ..$ ($\xi < \alpha$ und je zwei Glieder verschieden) bestehende Menge eine Basis in X; sei ferner $y_0 \in Y$, $y_0 \neq 0$. Bezeichnen wir mit R_n $(n = 0, 1, ..)$ die Menge aller Elemente der Form (*) $x = \sum_{\xi < \alpha} t_\xi a_\xi$, wo t_ξ rationale (bzw. reelle) mit Ausnahme endlich vieler verschwindende Zahlen sind und jedenfalls $t_\xi = 0$ für $n \leqslant \xi < \omega$; aus $R_0 + R_1 + .. = X$ folgt sodann, daß eine der Mengen R_n, etwa R_{n_0}, von zweiter Kategorie ist. Wir setzen nun $R = R_{n_0}$ und für jedes $x \in X$ der Darstellung (*) gemäß $U(x) = t_{n_0} y_0$; die Menge R ist in jedem Punkte $x_0 \in X$ von zweiter Kategorie und die additive Operation $U(x)$ führt trivialerweise jede gegen x_0 konvergente Punktfolge aus R in eine beschränkte über, da ja $U(x) = 0$ für $x \in R$; wäre die Operation $U(x)$ stetig so verschwände sie identisch, was nicht der Fall ist.

Wir erinnern hier an die übliche Erklärung: Ist $x_0 \in X$ und $t_0 \neq 0$ reell, so bezeichnet man die Abbildung $H(x) = t_0 x + x_0$ des Raumes X auf sich selbst als *Homothetie*; Mengen, die man mittels Homothetie aus einer Menge $W \subset X$ erhält, heißen mit *W homothetisch*. Für einen späteren Zweck ist es wichtig, daß der vorstehende Satz seine Gültigkeit bewahrt, wenn man den Begriff „von erster Kategorie" folgendermaßen verallgemeinert: Die Menge $W \subset X$ heißt von erster Kategorie, wenn der Raum X sich nicht als Summe abzählbar vieler mit W homothetischer Mengen darstellen läßt; die Menge $W \subset X$ heißt von erster Kategorie im Punkte $x_0 \in X$, wenn es eine Kugel K mit x_0 als Mittelpunkt gibt, so daß die Menge WK von erster Kategorie ist. Der Beweis verläuft ohne jede Änderung.

Als unmittelbare Anwendung des Satzes VI führen wir an [11]):

12. *Hat die Operation m-ten Grades $U(x)$ die Baire'sche Eigenschaft, so ist sie stetig.* — Es gibt eine Menge $R \subset X$, deren Komplement von erster Kategorie ist, derart, daß die Teiloperation $U(x|R)$, d. h. die durch $U(x|R) = U(x)$ für $x \in R$ erklärte Operation, stetig ist; die Voraussetzungen des Satzes VI sind also mit jedem $x_0 \in R$ erfüllt.

Bekanntlich hat jede Baire'sche Operation die Baire'sche Eigenschaft; nach 12. ist also eine Baire'sche Operation m-ten Grades schon stetig. Da nun die Grenze einer konvergenten Folge von Operationen höchstens m-ten Grades, wie aus dem Satz I und der Formel (2) mit $n = m+1$ einleuchtet, eine Operation höchstens m-ten Grades bildet, so kommt

13. *Die Grenze einer konvergenten Folge von Polynomen höchstens m-ten Grades ist ein Polynom höchstens m-ten Grades.*

10. Man nennt die Folge von Operationen $\{U_n(x)\}$ beschränkt im Punkte $x_0 \in X$, wenn stets für $h_n \in X$ $(n = 1, 2, ..)$ mit $h_n \to 0$ die Folge $\{U_n(x_0 + h_n)\}$ beschränkt ist; ist eine Folge von Operationen in jedem Punkte der Menge $R \subset X$ beschränkt, so heißt sie beschränkt in R. Wir erklären die Folge von Operationen $\{U_n(x)\}$ als gleichmäßig beschränkt in der Menge $R \subset X$, wenn stets für $x_n \in R$ und $h_n \in X$ $(n = 1, 2, ..)$ mit $h_n \to 0$ die Folge $\{U_n(x_n + h_n)\}$ beschränkt ist.

14. *Ist die Folge von Polynomen höchstens m-ten Grades $\{U_n(x)\}$ in einem Punkte $x_0 \in X$ beschränkt, so ist sie in jeder beschränkten Menge $R \subset X$ gleichmäßig beschränkt.* — Wir dürfen wie vorher $x_0 = 0$ annehmen. Sei $x_n \in R$ und $h_n \in X$ $(n = 1, 2, ..)$ mit $h_n \to 0$; es ist zu zeigen, daß die Folge $\{U_n(x_n + h_n)\}$ beschränkt ist. Bezeichnet $U_n(x) = U_{n0}(x) + .. + U_{nm}(x)$ die kanonische Darstellung von $U_n(x)$, so ist $U_n(tx) = t^0 U_{n0}(x) + .. + t^m U_{nm}(x)$ für rationale t und mithin nach 1., auf $t_i = i$ angewandt, $U_{nk}(x) = a_{k0} U_n(0x) + .. + a_{km} U_n(mx)$; da nach Annahme die Folge $\{U_n(x)\}$ im Nullpunkte beschränkt ist, so kommt hiernach den Folgen $\{U_{nk}(x)\}$ dieselbe Eigenschaft zu. Seien nun t_n reell mit $t_n \to 0$; wir wählen natürliche p_n, so daß $p_n \to +\infty$, $t_n p_n^m \to 0$. Alsdann ist $t_n U_{nk}(x_n + h_n) \to 0$ für $k > 0$, weil $t_n U_{nk}(x_n + h_n) = t_n p_n^k U_{nk}(p_n^{-1}(x_n + h_n))$, $t_n p_n^k \to 0$, $p_n^{-1}(x_n + h_n) \to 0$, und auch $t_n U_{n0}(x_n + h_n) \to 0$, weil $U_{n0}(x_n + h_n) = U_{n0}(0)$; hieraus folgt aber die gewünschte Relation $t_n U_0(x_n + h_n) \to 0$, und der Beweis ist fertig.

Ist also eine Folge von Polynomen höchstens m-ten Grades in einem Punkte beschränkt, so ist sie beschränkt; aus 14. folgt auch ohne weiteres, daß ein Polynom in jeder beschränkten Menge gleichmäßig beschränkt ist. Wir wollen hier noch folgender einfacher Tatsache Erwähnung tun. Sei die Folge von Polynomen höchstens m-ten Grades $\{U_n(x)\}$ beschränkt, $U_n(x) = U_{n0}(x) + .. + U_{nm}(x)$ die kanonische Darstellung von $U_n(x)$ und $U^*_{nk}(x_1, .. x_k)$ die erzeugende Operation von $U_{nk}(x)$; dann ist sowohl die Folge der Polynome $\{U_{nk}(x)\}$ wie auch $\{U^*_{nk}(x_1, .. x_k)\}$ beschränkt. Die erste Hälfte dieser Bemerkung ergibt sich sofort aus der uns schon bekannten Formel $U_{nk}(x) = a_{k0} U_n(0x) + .. + a_{km} U_n(mx)$, die zweite sodann aus (22), indem wir dort U_k durch U_{nk} ersetzen.

Wir sagen, daß die Folge von Operationen $\{U_n(x)\}$ im Punkte $x_0 \in X$ *stetig* ist, wenn stets $U_n(x_0 + h_n) - U_n(x_0) \to 0$ für $h_n \in X$ $(n = 1, 2, ..)$ mit $h_n \to 0$; eine in jedem Punkte der Menge $R \subset X$ stetige Folge von Operationen nennen wir stetig in R. Die Folge von Operationen $\{U_n(x)\}$ heißt *gleichmäßig stetig* in der Menge $R \subset X$, wenn stets $U_n(x_n + h_n) - U_n(x_n) \to 0$ für $x_n \in R$ und $h_n \in X$ $(n = 1, 2, ..)$ mit $h_n \to 0$; im Einklang damit soll die Operation $U(x)$ gleichmäßig stetig in der Menge $R \subset X$ heißen, wenn stets $U(x_n + h_n) - U(x_n) \to 0$ für $x_n \in R$ und $h_n \in X$ $(n = 1, 2, ..)$ mit $h_n \to 0$.

15. *Ist die Folge von Polynomen höchstens m-ten Grades $\{U_n(x)\}$ in der Menge $R \subset X$ gleichmäßig beschränkt, so ist sie auch gleichmäßig stetig in R.* — Sei $x_n \in R$ und $h_n \in X$ $(n = 1, 2, ..)$ mit $h_n \to 0$. Setzen wir $V_n(x) = U_n(x_n + x)$ für $x \in X$, so bilden

[11]) Für den Fall einer additiven Operation vgl. l. c. [2]), p. 23–24.

die $V_n(x)$ eine im Nullpunkte beschränkte Folge von Polynomen höchstens m-ten Grades; ist also $V_n(x) = V_{n0}(x) + \ldots + V_{nm}(x)$ die kanonische Darstellung von $V_n(x)$, so erkennt man wie beim Beweise von 14., daß jede der Folgen $\{V_{nk}(x)\}$ im Nullpunkte beschränkt ist. Wir wählen natürliche p_n, so daß $p_n \to +\infty$, $p_n h_n \to 0$; alsdann ist $V_{nk}(h_n) = p_n^{-k} V_{nk}(p_n h_n) \to 0$ für $k > 0$, da $p_n^{-k} \to 0$, $p_n h_n \to 0$, und mithin auch $V_n(h_n) - V_n(0) = V_{n1}(h_n) + \ldots + V_{nm}(h_n) \to 0$, d. h. $U_n(x_n + h_n) - U_n(x_n) \to 0$, wie behauptet [12]).

Darin ist enthalten, daß eine beschränkte Folge von Polynomen höchstens m-ten Grades stetig ist. Eine Art Umkehrung hiervon folgt sofort aus 14.: Ist die Folge von Polynomen höchstens m-ten Grades $\{U_n(x)\}$ stetig und $x_0 \in X$, so ist die Folge der Polynome $\{U_n(x) - U_n(x_0)\}$ beschränkt; gibt es also ein $x_0 \in X$, so daß die Folge $\{U_n(x_0)\}$ beschränkt ausfällt, so ist die Folge $\{U_n(x)\}$ beschränkt. Man verifiziert jetzt auch leicht, daß der Satz 14. sowie die nachstehenden Bemerkungen ihre Richtigkeit beibehalten, wenn wir dort statt „beschränkt" überall „stetig" setzen.

11. Ist die Folge von Polynomen höchstens m-ten Grades $\{U_n(x)\}$ beschränkt, so ist für jedes $\tilde{x} \in X$ die Folge $\{U_n(\tilde{x})\}$ beschränkt; das Umgekehrte ist auch richtig und besonders mit Rücksicht auf Anwendungen von Interesse. Dem Beweise schicken wir den folgenden allgemeinen Satz voraus:

16. *Ist $\{U_n(x)\}$ eine Folge von stetigen Operationen, und ist die Menge B aller $\tilde{x} \in X$, für welche die Folge $\{U_n(\tilde{x})\}$ beschränkt ausfällt, von zweiter Kategorie, so ist die Folge $\{U_n(x)\}$ in wenigstens einem Punkte beschränkt.* — Wir erklären mittels Induktion die Kugeln K_q $(q = 1, 2, \ldots)$ folgenderweise: 1° Sei K_1 eine Kugel mit der Eigenschaft, daß die Menge B in jedem Punkte $x \in K_1$ von zweiter Kategorie ist; 2° Angenommen die Kugel K_q mit dem Mittelpunkt x_q und Radius r_q sei bereits erklärt, jedenfalls so, daß die Menge BK_q von zweiter Kategorie ist. Sei R_{pq} $(p = 1, 2, \ldots)$ die Menge aller $x \in K_q$, in denen stets $|tU_n(x)| \leqslant q^{-1}$ für reelle t mit $|t| \leqslant p^{-1}$. Da die Mengen R_{pq} abgeschlossen sind und $R_{1q} + R_{2q} + \ldots \supset BK_q$, so enthält eine von ihnen, etwa $R_{p_q q}$, eine Kugel K_{q+1}; ist x_{q+1} ihr Mittelpunkt und r_{q+1} ihr Radius, so gilt $|x_{q+1} - x_q| \leqslant r_q$, und man kann ohne weiteres $r_{q+1} \leqslant {}^1/_3\,(r_q - |x_{q+1} - x_q|)$ annehmen. Wegen $|x_{q+1} - x_q| < r_q$, $r_{q+1} < {}^1/_3\, r_q$ ist dann die Reihe $|x_1| + |x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \ldots$ und umsomehr die Reihe $x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots$, d. h. die Folge $\{x_q\}$, konvergent; wir bezeichnen nun mit x_0 ihren Grenzwert und behaupten, daß die Folge $\{U_n(x)\}$ im Punkte x_0 beschränkt ist. In der Tat, seien t_n reell und $h_n \in X$ $(n = 1, 2, \ldots)$ mit $t_n \to 0$, $h_n \to 0$. Aus $x_0 + h_n - x_q = h_n + (x_{q+1} - x_q) + (x_{q+2} - x_{q+1}) + \ldots$ und $|x_{q+k+1} - x_{q+k}| < r_{q+k}$, $r_{q+k} < 3^{-k}\, r_{q+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ folgt sofort $|x_0 + h_n - x_q| \leqslant |h_n| + |x_{q+1} - x_q| + {}^3/_2\, r_{q+1}$; da $r_{q+1} \leqslant {}^1/_3\,(r_q - |x_{q+1} - x_q|)$, so ist mithin $|x_0 + h_n - x_q| \leqslant |h_n| + {}^1/_2\,|x_{q+1} - x_q| + {}^1/_2\, r_q$. Man ersieht hieraus, daß $|x_0 + h_n - x_q| \leqslant r_q$ und erst recht $x_0 + h_n \in K_{p_q q}$ für alle hinreichend großen Indizes n, etwa $n \geqslant n_q$, weil $|x_{q+1} - x_q| < r_q$; der Definition von K_{pq} gemäß ist demnach $|tU_n(x_0 + h_n)| \leqslant q^{-1}$ für reelle t mit $|t| \leqslant p_q^{-1}$ und $n \geqslant n_q$. Somit gilt aber $t_n U_n(x_0 + h_n) \to 0$ und die Beschränktheit der Folge $\{U_n(x)\}$ im Punkte x_0 ist festgestellt.

Ist der Raum Y vom Typus (B), so bildet B eine F_σ-Menge; denn bezeichnet man mit B_p $(p = 1, 2, \ldots)$ die Menge aller $x \in X$, in denen stets $|U_n(x)| \leqslant p$, so sind die B_p abgeschlossen und $B_1 + B_2 + \ldots = B$. In diesem Falle kann man den Beweis von 16. äußerst kürzen: Ist die Menge B von zweiter Kategorie, so enthält eine der Mengen B_p eine Kugel; bezeichnet x_0 ihren Mittelpunkt, so ist ersichtlich die Folge $\{U_n(x)\}$ im Punkte x_0 beschränkt. Im allgemeinen liegt die Sache nicht so einfach. B bildet zwar jedenfalls eine $F_{\sigma\delta}$-Menge — denn bezeichnet R_{pq} $(p, q = 1, 2, \ldots)$ die Menge aller $x \in X$, in denen stets $|tU_n(x)| \leqslant q^{-1}$ für reelle t mit $|t| \leqslant p^{-1}$, so sind die R_{pq} abgeschlossen und $(R_{11} + R_{21} + \ldots)(R_{12} + R_{22} + \ldots) \ldots = B$ — es kann aber schon nicht mehr geschlossen werden, daß sie eine F_σ-Menge ist, sogar dann nicht, wenn die Operationen $U_n(x)$ linear sind. Beispiel: Wir erklären im Raume (l^2) die lineare Operation $y = U_n(x)$ mit den dem Raume (s) angehörenden Werten, durch $y = \{\eta_p\}$ mit $\eta_p = n^p \xi_n$ für $x = \{\xi_p\}$; die Menge B besteht dann aus allen Punkten $x = \{\xi_p\}$, für die $p^n \xi_p \to 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, und bildet kein F_σ; wir wollen auf die Durchführung des Beweises verzichten [13]).

Aus 14., 15. und 16. folgt unmittelbar

Satz VII. *Ist $\{U_n(x)\}$ eine Folge von Polynomen höchstens m-ten Grades, und ist für jedes $\tilde{x} \in X$ die Folge $\{U_n(\tilde{x})\}$ beschränkt,*

[12]) Die Sätze 14. und 15. bleiben samt ihren Beweisen gültig, wenn man von Operationen höchstens m-ten Grades statt von Polynomen höchstens m-ten Grades spricht; in diesen Verallgemeinerungen ist offenbar 11. enthalten.

[13]) Über die Definition von (l^2) und (s) vgl. l. c. [2]), p. 10 und 12.

so ist die Folge $\{U_n(x)\}$ *in jeder beschränkten Menge gleichmäßig beschränkt und gleichmäßig stetig.*

In Ergänzung davon formulieren wir noch den folgenden Satz, der sich aus 14. und 15. sofort ergibt:

17. *Ist* $\{U_n(x)\}$ *eine Folge von Polynomen höchstens m-ten Grades, so ist die Menge B aller* $\tilde{x}\in X$, *für welche die Folge* $\{U_n(\tilde{x})\}$ *beschränkt ausfällt, entweder von erster Kategorie oder mit dem Raume identisch.*

Man bestätigt leicht, daß die Menge der Konvergenzpunkte einer stetigen Folge von stetigen Operationen abgeschlossen ist; wegen 15. gilt demnach

18. *Die Menge der Konvergenzpunkte einer beschränkten Folge von Polynomen höchstens m-ten Grades ist abgeschlossen.*

Die Grenze einer stetigen Folge von stetigen Operationen ist stetig; dies erlaubt nach Satz VII auf 13. zu schließen. Man kann übrigens 13. auch daraus entnehmen, daß es für jede Baire'sche Operation erster Klasse mindestens einen Stetigkeitspunkt gibt; denn eine solche ist höchstens punktweise unstetig.

Jetzt können wir den zu 17. analogen Satz beweisen:

19. *Die Menge K der Konvergenzpunkte einer Folge von Polynomen höchstens m-ten Grades ist entweder von erster Kategorie oder mit dem Raume identisch.* — Angenommen die Menge K sei von zweiter Kategorie. Auf Grund von 14. und 16. ist dann die Folge $\{U_n(x)\}$ beschränkt; hieraus folgt weiter nach 18., daß die Menge K abgeschlossen ist und somit wegen der Annahme eine Kugel enthält; wir bezeichnen mit x_0 ihren Mittelpunkt und mit r ihren Radius. Sei nun $\tilde{x}\in X$; wir wählen reelle, paarweise verschiedene $t_0,..t_m$ mit $|t_i(\tilde{x}-x_0)|\leqslant r$. Nach 5. gibt es Elemente $y_{n0},..y_{nm}$ aus Y, so daß $U_n(x_0+t(\tilde{x}-x_0))=t^0 y_{n0}+..+t^m y_{nm}$ für reelle t; wendet man 1. an, so folgt $y_{nk}=a_{k0}\,U_n(x_0+t_0\,(\tilde{x}-x_0))+..+a_{km}\,U_n(x_0+t_m\,(\tilde{x}-x_0))$. Da hierin $x_0+h_i(\tilde{x}-x_0)\in K$, so ist jede der Folgen $\{y_{nk}\}$ konvergent; daraus ist unmittelbar ersichtlich, daß die Folge $\{U_n(x_0+t(\tilde{x}-x_0))\}$ für alle reellen t konvergiert. Setzt man speziell $t=1$, so kommt $\tilde{x}\in K$; auf diese Weise erkennt man, daß $K=X$, w. z. b. w.

Bekanntlich ist eine der Baire'schen Bedingung genügende — insbesondere eine Borel'sche — lineare Menge, mithin auch eine lineare Mannigfaltigkeit, entweder von erster Kategorie oder mit dem Raume identisch[14]); darin sind die Sätze 17. und 19. für $m=1$ enthalten. Die Menge der Konvergenzpunkte einer Folge von stetigen Operationen bildet ja ein $F_{\sigma\delta}$.

[14]) l. c. [2]), p. 21—23.

Es bedarf kaum eines Hinweises, daß die bekannten Prinzipe der Kondensation der Singularitäten für Folgen linearer Operationen sich mit Hilfe von 17. und 19. ohne weiteres auf Folgen von Polynomen höchstens m-ten Grades verallgemeinern lassen. Schließlich sei erwähnt: Ist $\{U_n(x)\}$ eine konvergente Folge von Polynomen höchstens m-ten Grades, $U_n(x)=U_{n0}(x)+..+U_{nm}(x)$ die kanonische Darstellung von $U_n(x)$ und $U^*_{nk}(x_1,..x_k)$ die erzeugende Operation von $U_{nk}(x)$, so sind die Folgen $\{U_{nk}(x)\}$ und $\{U^*_{nk}(x_1,..x_k)\}$ konvergent.

Die obigen Sätze lassen für den speziellen Fall, daß z. B. die Räume X und Y vom Typus (B) sind, verschiedene Präzisierungen und Ergänzungen zu. Wir stellen einige von ihnen zusammen; die Beweise mögen dem Leser überlassen werden[15]). 1° Ist $U(x)$ eine Operation m-ten Grades und $|U(x)|$ in einer Kugel unterhalb stetig, so ist $U(x)$ stetig; hier wird 11. benutzt. 2° Ist $U(x)$ eine Operation m-ten Grades, $V(x)$ eine der Baire'schen Bedingung genügende Operation und $|U(x)|\leqslant|V(x)|$ in den Punkten einer Kugel, so ist $U(x)$ stetig; dies folgt aus Satz VI. 3° Ein Polynom $U(x)$ ist in jeder Kugel gleichmäßig beschränkt und insbesondere ist die obere Grenze der aus den Zahlen $|U(x)|$ mit $|x|\leqslant 1$ bestehenden Menge endlich; man nennt sie die *Norm* des Polynoms $U(x)$, in Zeichen $\|U\|$. Ist $U_k(x)$ ein homogenes Polynom k-ten Grades, so ist $\|U_k\|$ gleich der kleinsten Zahl m mit $|U_k(x)|\leqslant m|x|^k$ für $x\in X$; sind $X_1,..X_k$ Räume vom Typus (B), und ist $U(x_1,..x_k)$ eine für $x_i\in X_i$ erklärte k-lineare Operation, so ist $\|U\|$ gleich der kleinsten Zahl m mit $|U(x_1,..x_k)|\leqslant m\,|x_1|..|x_k|$ für $x_i\in X_i$. 4° Ein Polynom ist in jeder Kugel gleichmäßig stetig und genügt sogar daselbst der Lipschitz'schen Bedingung; man gehe von der Formel (27) aus.

12. Wir wollen jetzt noch einiges über Folgen von Polynomen mit reellen Werten aussagen; hier bedeutet also Y dauernd den Raum der reellen Zahlen. Zunächst sei folgender Satz vorausgeschickt, der später vielfache Verwendung findet:

20. *Sind* $P_{ni}(x)$ $(n=1,2,..;\ i=1,..k)$ *Polynome höchstens m-ten Grades mit* $P_{n1}(x)..P_{nk}(x)\not\equiv 0$, *und ist die Folge* $\{P_{n1}(x)..\,P_{nk}(x)\}$ *beschränkt, so gibt es reelle* a_{ni}, *für die*

[15]) Für den Fall einer additiven bzw. linearen Operation vgl. l. c. [2]), p. 54 und 78—79.

$a_{n1} \dots a_{nk} = 1$ *und jede der Folgen* $\{a_{ni} P_{ni}(x)\}$ *beschränkt ist.* — Es genügt den Satz für $k=2$ zu beweisen; für ein beliebiges k folgt er dann sofort mittels Induktion. Sind $x_{in} \in X$ mit $x_{in} \to 0$, so bildet das für reelle t_i erklärte Funktional $P_{ni}(t_1 x_{1n} + t_2 x_{2n})$ ein Polynom höchstens m-ten Grades:

$$P_{ni}(t_1 x_{1n} + t_2 x_{2n}) = \sum_{\nu_1+\nu_2 \leq m} a^{(ni)}_{\nu_1 \nu_2} t_1^{\nu_1} t_2^{\nu_2}, \tag{29}$$

wo die $a^{(ni)}_{\nu_1 \nu_2}$ reell sind; wir setzen nun

$$A_{ni} = \sum_{\nu_1+\nu_2 \leq m} |a^{(ni)}_{\nu_1 \nu_2}|$$

und behaupten, daß die Folge $\{A_{n1} A_{n2}\}$ beschränkt ist. Anderenfalls gibt es eine Indizesfolge $\{n_p\}$ mit $A_{n_p 1} A_{n_p 2} \neq 0$, $A_{n_p 1} A_{n_p 2} \to +\infty$; da stets $|A^{-1}_{n_p i} a^{(n_p i)}_{\nu_1 \nu_2}| \leq 1$, so können wir annehmen, indem wir eventuell zu einer Teilfolge von $\{n_p\}$ übergehen, daß jede der Folgen $\{A^{-1}_{n_p i} a^{(n_p i)}_{\nu_1 \nu_2}\}$ konvergiert. Ist $A^{-1}_{n_p i} a^{(n_p i)}_{\nu_1 \nu_2} \to a^{(i)}_{\nu_1 \nu_2}$ und

$$W_i(t_1, t_2) = \sum_{\nu_1+\nu_2 \leq m} a^{(i)}_{\nu_1 \nu_2} t_1^{\nu_1} t_2^{\nu_2} \tag{30}$$

für reelle t_i, so ist nach (29) stets $A^{-1}_{n_p i} P_{n_p i}(t_1 x_{1n_p} + t_2 x_{2n_p}) \to W_i(t_1, t_2)$; andererseits ist wegen der Voraussetzung die Folge $\{P_{n_p 1}(t_1 x_{1n_p} + t_2 x_{2n_p}) P_{n_p 2}(t_1 x_{1n_p} + t_2 x_{2n_p})\}$ beschränkt und mithin $A^{-1}_{n_p 1} P_{n_p 1}(t_1 x_{1n_p} + t_2 x_{2n_p}) \cdot A^{-1}_{n_p 2} P_{n_p 2}(t_1 x_{1n_p} + t_2 x_{2n_p}) = (A_{n_p 1} A_{n_p 2})^{-1} \cdot P_{n_p 1}(t_1 x_{1n_p} + t_2 x_{2n_p}) P_{n_p 2}(t_1 x_{1n_p} + t_2 x_{2n_p}) \to 0$, weil $(A_{n_p 1} A_{n_p 2})^{-1} \to 0$. Auf diese Weise erhält man $W_1(t_1, t_2) W_2(t_1, t_2) \equiv 0$, d. h. einen Widerspruch, da der Definition von $a^{(i)}_{\nu_1 \nu_2}$ gemäß

$$\sum_{\nu_1+\nu_2 \leq m} |a^{(i)}_{\nu_1 \nu_2}| = 1$$

und folglich wegen (30) sicherlich $W_i(t_1, t_2) \not\equiv 0$ ist. In Anbetracht dessen, daß $|P_{n1}(x_{1n}) P_{n2}(x_{2n})| \leq A_{n1} A_{n2}$, ist aber mit der Folge $\{A_{n1} A_{n2}\}$ auch $\{P_{n1}(x_{1n}) P_{n2}(x_{2n})\}$ beschränkt und man entnimmt daher leicht der bisherigen Überlegung: es gibt ein $r > 0$, so daß $|P_{n1}(x_1) P_{n2}(x_2)| \leq N$ für $x_i \in X$, $|x_i| \leq r$ bei konstantem N. Bezeichnet also p_{ni} die obere Grenze der Menge der Zahlen $|P_{ni}(x)|$ mit $|x| \leq r$, so gilt $p_{n1} p_{n2} \leq N$; wegen $P_{n1}(x) P_{n2}(x) \not\equiv 0$ ist dabei gewiß $p_{n1} p_{n2} \neq 0$. Die durch $a_{n1} = p^{-1}_{n1}$, $a_{n2} = p_{n1}$ erklärten Zahlen leisten das Verlangte; $a_{n1} a_{n2} = 1$ und, da ersichtlich $|a_{n1} P_{n1}(x)| \leq 1$, $|a_{n2} P_{n2}(x)| \leq N$ für $|x| \leq r$, so ist jede der

Folgen $\{a_{ni} P_{ni}(x)\}$ im Nullpunkte beschränkt, mithin überhaupt beschränkt.

Eine unmittelbare Folgerung dieses Ergebnisses lautet[16]): Sind $P_{ni}(x)$ $(n = 1, 2, \dots; i = 1, \dots k)$ Polynome höchstens m-ten Grades, und ist die Folge $\{P_{n1}(x) \dots P_{nk}(x)\}$ beschränkt, so ist es auch die Folge $\{P_{n1}(x_1) \dots P_{nk}(x_k)\}$, falls man die $P_{n1}(x_1) \dots P_{nk}(x_k)$ als Funktionale der Veränderlichen $x_i \in X$ betrachtet.

In 20. kann natürlich der Zusatz $P_{n1}(x) \dots P_{nk}(x) \not\equiv 0$ entbehrt werden, wenn der Raum X vom Typus (B) ist, im allgemeinen hingegen nicht; Beispiel: $k = 2$, $P_{n1}(x) = 0$ und $P_{n2}(x) = \xi_n$ für $x = \{\xi_n\}$ in Raume (s).

Naheliegend und trotzdem oft nützlich ist der folgende Satz[17])

21. *Ist der Raum X separabel, so gibt es in jeder beschränkten Folge von Polynomen höchstens m-ten Grades $\{P_n(x)\}$ eine konvergente Teilfolge.* — Sei die abzählbare Menge der Elemente x_p $(p = 1, 2, \dots)$ dicht in X. Vermöge des bekannten Auswahlverfahrens läßt sich aus der Folge $\{P_n(x)\}$ eine in jedem Punkte x_p konvergente Teilfolge herausgreifen; nach 18. ist sie dann von selbst konvergent.

Nicht so unmittelbar einzusehen ist

22. *Sind die Folgen von Polynomen höchstens m-ten Grades $\{P_{ni}(x)\}$ $(i = 1, \dots k)$ beschränkt, und konvergiert die Folge $\{P_{n1}(x) \dots P_{nk}(x)\}$ gegen ein Polynom $P(x) \not\equiv 0$, so gibt es eine Indizesfolge $\{n_p\}$, so daß jede der Folgen $\{P_{n_p i}(x)\}$ konvergent ist.*

Dieser Satz ist nach 21. selbstverständlich für den Fall, daß der Raum X separabel ist. Findet dies nicht statt, so ist der Beweis weniger einfach; wir wollen ihn auf § 4 hinausschieben, wo die nötigen Hilfsmittel aus der elementaren Teilbarkeitstheorie entwickelt werden.

Der letzte Satz versagt, wenn die Voraussetzung $P(x) \not\equiv 0$ nicht zutrifft; Beispiel: $k = 2$, $P_{n1}(x) = n^{-1}$ und $P_{n2}(x) = \xi_n$ für $x = \{\xi_n\}$ im Raume (m)[18]).

[16]) Vgl. G. Aumann, Satz über das Verhalten von Polynomen auf Kontinuen, S.-B. preuß. Akad. Wiss. (1934) p. 924—931.

[17]) Für den Fall von linearen Operationen vgl. l. c. [2]), p. 123. Vgl. auch: R. Gateaux, Sur diverses questions de calcul fonctionnel, Bull. Soc. Math. France 50 (1922) p. 1—37.

[18]) Über die Definition von (m) vgl. l. c. [2]), p. 11.

(Reçu par la Rédaction le 1. 9. 1935).