Un théorème sur les polynomes à n variables

par

H. AUERBACH (Lwów).

MM. Mazur et Orlicz ont rencontré, au cours de leurs recherches sur les polynomes dans les espaces abstraits, un certain nombre de problèmes dont quelques-uns sont intéressants même dans le cas particulier de l'espace à n dimensions. Un de ces problèmes, proposé par M. Mazur, peut être formulé comme il suit:

Soient $\{S_i\}$ une suite de sphères de rayons égaux dont les centres tendent vers l'infini et $P(x_1, \dots, x_n)$ un polynome borné dans l'ensemble ΣS_i. Est-ce possible de transformer le polynome P par une substitution linéaire en un polynome contenant moins de n variables?

Nous prouverons dans cette Note que la réponse est affirmative; d'une façon plus précise, on a le théorème:

Soit $\{S_i\}$ une suite de sphères de rayons égaux. Supposons qu'il existe précisément k formes linéaires homogènes indépendantes: $L_1, \dots, L_k$, bornées dans l'ensemble $E = \Sigma S_i$. Alors, tout polynome $P(x_1, \dots, x_n)$, borné dans cet ensemble, peut être représenté comme polynome en $L_1, \dots, L_k$:

$$P(x_1, \dots, x_n) = Q(L_1, \dots, L_k).$$

En particulier, si $k=0$, le polynome P se réduit à une constante.

Le théorème est valable aussi dans le domaine complexe[1]). Dans le cas trivial $k=n$ l'ensemble E est évidemment borné et réciproquement. Donc, si les centres des sphères S_i s'éloignent vers l'infini, on a $k<n$.

[1]) Une sphère est définie par une inégalité $\Sigma\,|x_\nu - x_\nu^0|^2 < \rho^2$, avec $\rho > 0$.

Démonstration. Supposons d'abord que le polynome P soit de degré $\leqslant 1$. Il est alors la somme d'une constante et d'une forme linéaire homogène, bornée dans E. Cette forme est évidemment nulle si $k=0$ ou une combinaison linéaire de $L_1,\dots, L_k$ dans le cas contraire.

Supposons maintenant que le théorème soit vrai pour les polynomes de degré $\leqslant m$. Soit $P(x_1,\dots, x_n)$ un polynome de degré $\leqslant m+1$, borné dans E. Désignons par ϱ le rayon des sphères S_i, par S_i' la sphère du même centre que S_i de rayon $\frac{\varrho}{2}$ et posons $E'=\Sigma S_i'$.

On a

$$
\begin{aligned}
&P(x_1+h_1,\dots, x_n+h_n)-P(x_1,\dots, x_n)= \\
(1)\qquad &\sum_{\nu=1}^{m+1}\frac{1}{\nu!}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1+\dots+\frac{\partial}{\partial x_n}h_n\right)^{(\nu)}F.
\end{aligned}
$$

Choisissons autant de systèmes $(h_1^{(s)},\dots, h_n^{(s)})$ remplissant l'inégalite $\Sigma|h_i|^2<\left(\frac{\varrho}{2}\right)^2$ qu'il y a des dérivées au second membre de (1), de manière que le déterminant $|h_1^{(s)},\dots, h_n^{(s)},\dots, h_1^{(s)\,m+1},\dots, h_n^{(s)\,m+1}|$ soit $\neq 0$. En résolvant le système d'équations linéaires ainsi obtenu on voit que les dérivées du polynome P s'expriment linéairement par les différences aux premiers membres. Lorsque x est un point quelconque de l'ensemble E', les points $x+h^{(s)}$ sont situés dans E. Par conséquent, les dérivées du polynome P sont bornées dans E'.

Le nombre exact de formes linéaires homogènes indépendantes bornées dans E' est k. En effet, ce nombre est $\geqslant k$, puisque les formes $L_1,\dots, L_k$ sont bornées dans E'. D'autre part, toute forme $\Sigma a_\nu x_\nu$, bornée dans E', est aussi bornée dans E, car, si $x^{(i)}$ est le centre des sphères S_i, S_i' et x un point quelconque de S_i, on a $|\Sigma a_\nu x_\nu-\Sigma a_\nu x_\nu^{(i)}|\leqslant\varrho\Sigma|a_\nu|$; la borne supérieure de $|\Sigma a_\nu x_\nu|$ dans E est donc au plus égale à celle dans E' augmentée de $\varrho\,\Sigma|a_\nu|$.

Les dérivées $\frac{\partial P}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial P}{\partial x_n}$ étant bornées dans E' et de degré $\leqslant m$ on peut les représenter comme polynomes en $L_1,\dots, L_k$. Si $k=0$, elles sont des constantes; dans ce cas P est un polynome de degré $\leqslant 1$, donc $P=\text{const.}$ Nous supposons maintenant $k>0$.

Faisons le changement de variables $\xi_1=L_1,\dots,\xi_k=L_k$, $\xi_{k+1}=L_{k+1},\dots,\xi_n=L_n$ où $L_{k+1},\dots, L_n$ désignent des formes linéaires homogènes choisies de manière que le déterminant de la substitution soit $\neq 0$.

Les formules $\frac{\partial P}{\partial\xi_\mu}=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{\partial P}{\partial x_\nu}\,\frac{\partial x_\nu}{\partial\xi_\mu}$ montrent que les dérivées $\frac{\partial P}{\partial\xi_1},\dots,\frac{\partial P}{\partial\xi_n}$ ne contiennent pas les variables $\xi_{k+1},\dots,\xi_n$. On a donc

$$
\begin{aligned}
P(x_1,\dots, x_n) &= Q(\xi_1,\dots,\xi_k)+\sum_{\nu=k+1}^{n}c_\nu\,\xi_\nu \\
&= Q(L_1,\dots, L_k)+\sum_{\nu=k+1}^{n}c_\nu\,L_\nu .
\end{aligned}
$$

Les polynomes P, Q étant bornés dans E la forme $\sum_{k+1}^{n}c_\nu L_\nu$ doit s'exprimer linéairement par $L_1,\dots, L_k$; elle est donc nulle.

(Reçu par la Rédaction le 23. 8. 1935).