Über Folgen linearer Operationen, die von einem Parameter abhängen

von

W. ORLICZ (Lwów)*).

Betrachten wir eine Doppelfolge $\{f_{nm}(\xi)\}$ von linearen Operationen, die in einem Raume Ξ von Typus (B) erklärt sind, und deren Wertevorräte einem ebensolchen Raume angehören. Existiert für $n=1,2,3\ldots$ ein Punkt $\xi_n \in \Xi$, für welchen die Folge $\{f_{nm}(\xi_n)\}$ divergent ist, so gibt es nach einem Satze der Herren S. Banach und H. Steinhaus ein $\xi_0 \in \Xi$, das alle Folgen $\{f_{nm}(\xi_0)\}$ gleichzeitig divergent macht [1]). Es entsteht die Frage, inwieweit ein analoger Satz für Folgen linearer Operationen $\{f_m(\xi,\tau)\}$ bestehen kann, wenn ein Parameter τ, der in einer nichtabzählbaren Menge variiert, die Rolle des Index n übernommen hat. Nun ist es im allgemeinen nicht möglich, aus der Existenz eines x_τ, das für jedes einzelne τ die Folge $\{f_m(\xi,\tau)\}$ divergent macht, auf die Existenz eines universellen ξ, für das $\{f_m(\xi,\tau)\}$ bei jedem τ divergiert, zu schließen. Ein derartiger Satz ist auch dann nicht richtig, wenn $f_m(\xi,\tau)$ von τ in stetiger Weise abhängt (dabei möge der Wertevorrat der zulässigen τ etwa einen metrischen Raum bilden), und das einzige, was wir hier zu erwarten haben, ist die Kondensation der Menge der τ, für welche $\lim\limits_{m\to\infty} f_m(\xi,\tau)$ nicht existiert, von diskreten Punkten zu einer nichtabzählbaren Punktmenge. Dies ist aber wirklich möglich (unter gewissen Voraussetzungen); ein entsprechender Satz wird in § 1 dieser Arbeit bewiesen und zwar gleich in einer Fassung, die der Anwendungen wegen zweckmäßig erscheint. Es folgen in § 2 einige Anwendungen.

*) Der Hauptinhalt dieser Arbeit wurde in der Sitzung vom 16. IV. 1934 der Poln. Math. Gesellschaft (Abteilung Lwów) vorgetragen.

[1]) S. Banach et H. Steinhaus, Sur le principe de la condensation de singularités, Fund. Math. 9 (1927) p. 50—61; vgl. auch S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa (1932), insb. chap. 5.

§ 1.

In diesem § denken wir uns einen separablen (B)-Raum Ξ und einen vollständigen, separablen metrischen Raum T zugrunde gelegt.

Hilfssatz 1. *Sei $T_0 \subset T$ eine Menge von erster Kategorie, $\{f_n(\tau)\}$ eine Folge von Operationen, die in $T_1 = T - T_0$ definiert und stetig sind und deren Wertevorrat einem (separablen oder nicht separablen) Raume Ξ' angehört. Besteht die Relation*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|f_n(\tau)\| = +\infty \tag{1}$$

für eine in T_1 überalldichte Punktmenge, so ist sie auch für eine Punktmenge zweiter Kategorie erfüllt.

Beweis. Bezeichnen wir mit A_∞ die Menge der Punkte aus T_1, für welche die Relation (1) besteht, mit A_{nk} die Menge der $\tau \in T_1$, für welche $\|f_p(\tau)\| \leqslant k$ für $p \geqslant n$. Wäre eine von den Mengen A_{nk}, etwa $A_{n_0k_0}$, von zweiter Kategorie, so müßte sie in einer Kugel K_0 überalldicht liegen; sodann müßten alle Punkte aus $K_0 . T_1$ der Menge $A_{n_0k_0}$ angehören. Dies bedeutet aber einen Widerspruch, da kraft unserer Voraussetzung A_∞ in T_1 überalldicht ist. Es sind also alle A_{nk} von erster Kategorie und demzufolge ist A_∞ von zweiter Kategorie.

Hilfssatz 2. *Sei $T_0 \subset T$ eine Menge von erster Kategorie, $\{f_n(\tau)\}$ eine Folge von Operationen, die in $T - T_0$ definiert und stetig sind und deren Wertevorrat einem (separablen oder nicht separablen) Raume Ξ' angehört. Existiert für $\tau \in T - T_0$ der Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\tau) = f(\tau),$$

so gibt es eine Menge $T_1 \subset T - T_0$ von erster Kategorie, so daß $f(\tau)$ in jedem Punkte von $T - T_0 - T_1$ stetig ist.

Beweis. Man beweist diesen Hilfssatz, indem man den Beweis des bekannten Baire'schen Satzes (d. h. jenes Satzes, in welchen der Hilfssatz 2 übergeht, wenn T_0 zu einer leeren Menge wird) mit leicht ersichtlichen Abänderungen wiederholt [2]).

[2]) Vgl. C. Kuratowski, Sur les fonctions représentables analytiquement..., Fund. Math. 5 (1924) p. 75—86, insb. p. 80.

Satz 1. *Sei* $\{f_{nm}(\xi, \tau)\}$ *eine Doppelfolge von Operationen, die sämtlich für* $\xi \in \Xi$, $\tau \in T$ *definiert sind und deren Wertevorräte einem (separablen oder nicht separablen) Raum* Ξ' *vom Typus* (*B*) *angehören. Wir setzen voraus, daß diese Doppelfolge die folgenden Eigenschaften besitzt:*

1) *Die Operation* $f_{nm}(\xi, \tau)$ $(n, m = 1, 2, 3 \ldots)$ *ist für jedes* $\tau \in T$ *im Raume* Ξ *linear;*

2) *Die Operation* $f_{nm}(\xi, \tau)$ $(n, m = 1, 2, 3 \ldots)$ *ist für jedes* $\xi \in \Xi$ *im Raume* T *stetig;*

3) *Für jedes* $\tau \in T$ *gibt es einen Punkt* $\xi_\tau \in \Xi$, *so daß der iterierte Grenzwert*

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{m \to \infty} f_{nm}(\xi, \tau) \tag{2}$$

für $\xi = \xi_\tau$ *nicht existiert.*

Unter diesen Voraussetzungen gibt es eine Menge $R \in \Xi$, *so daß folgendes besteht:* a) $\Xi - R$ *ist von erster Kategorie;* b) *für jedes* $\xi \in R$ *gibt es eine* τ-*Menge von zweiter Kategorie, für welche der iterierte Grenzwert* (2) *nicht existiert.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $M_n(\tau)$ die sog. Norm der Operationenfolge $\{f_{nm}(\xi, \tau)\}$; es ist $M_n(\tau) = \text{ob. Gr.}_m\,[\text{ob. Gr.}_\xi\,\frac{\|f_{nm}(\xi)\|}{\|\xi\|}]$, wobei $M_n(\tau) = +\infty$ nicht ausgeschlossen ist. Das Funktional $M_n(\tau)$ ist nach unten halbstetig; wenn nämlich $\tau_p \to \tau_0$ und ξ_0 ein Punkt aus Ξ ist, für welchen bei gewissem m_0 $\frac{\|f_{nm_0}(\xi_0, \tau_0)\|}{\|\xi_0\|} \geqslant M_n(\tau_0) - \varepsilon$, so haben wir, wegen $\frac{\|f_{nm_0}(\xi_0, \tau_p)\|}{\|\xi_0\|} \leqslant M_n(\tau_p)$ die Ungleichung $\varliminf_{p \to \infty} M_n(\tau_p) \geqslant M_n(\tau_0) - \varepsilon$. Bei natürlichen n, k, r sei A^n_{kr} die Menge der Punkte τ_0, für welche $M_n(\tau) \leqslant k$, wenn nur $\|\tau - \tau_0\| < \frac{1}{r}$ — und $\bar{A}^n_k$ die Menge der Punkte τ, für die $M_n(\tau) \leqslant k$. Aus der Halbstetigkeit des Funktionals $M_n(\tau)$ folgt sogleich die Abgeschlossenheit den Mengen $\bar{A}^n_k$. Sei $\bar{A}^n_\infty$ die Menge der Punkte τ, für die $M_n(\tau) = +\infty$ und setzen wir noch $A^n = \sum_{k,r=1}^{\infty} A^n_{kr}$, $B^n = T - A^n$.

Nehmen wir zuerst an, daß ein B^n von zweiter Kategorie ist; dann ist B^n in einer Kugel K_0 überalldicht. Die Mengen $\bar{A}^n_k \cdot K_0$ sind nirgendsdicht; anderenfalls wäre eine von diesen Mengen $\bar{A}^n_{k_0} \cdot K_0$ in einer Kugel $K_1 \subset K_0$ überalldicht, und da $\bar{A}^n_{k_0}$ abgeschlossen ist, wäre $\bar{A}^n_{k_0} \cdot K_1 = K_1$. Daraus würde aber, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung, $A^n \cdot K_1 = K_1$, $B^n \cdot K_1 = 0$ folgen. Wir sehen also, daß die Menge $\bar{A}^n_\infty - \sum_{k=1}^{\infty} \bar{A}^n_k$ in K_0 überalldicht ist. Nach einem bekannten Satze[3]) gibt es zu jedem $\tau \in \bar{A}^n_\infty$ einen Punkt ξ_τ, für den $\varlimsup_{m \to \infty} f_{nm}(\xi_\tau, \tau) = +\infty$; wählen wir eine in K_0 überalldichte Punktmenge $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p, \ldots$, die der Menge $\bar{A}^n_\infty$ angehört, so gibt es nach dem eingangs erwähnten Satze der Herren S. Banach und H. Steinhaus eine Punktmenge $R \in \Xi$, so daß $\varlimsup_{m \to \infty} f_{nm}(\xi, \tau) = +\infty$ für $\xi \in R$, $\tau = \tau_p$, $(p = 1, 2, 3 \ldots)$, und $\Xi - R$ von erster Kategorie ist. Da, nach Hilfssatz 1, für jedes $\xi \in R$ diese Beziehung in einer τ-Menge von zweiter Kategorie besteht, so ist in diesem Falle unser Satz bewiesen.

Nun setzen wir voraus, daß für jedes n die Menge B^n von erster Kategorie ist. Sei R_n $(n = 1, 2, \ldots)$ die Menge der Punkte ξ, für die der Grenzwert

$$\lim_{m \to \infty} f_{nm}(\xi, \tau), \tag{3}$$

für jedes τ, abgesehen höchstens von einer Menge erster Kategorie, existiert. Nehmen wir an, daß ein gewisses R_n in einer Kugel $L_0 \subset \Xi$ überalldicht ist, und es sei $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p, \ldots$ eine abzählbare, in L_0 überalldichte Punktmenge aus diesem R_n. Für $\xi = \xi_p$ ist die Punktmenge C_p, in welcher der Grenzwert (3) nicht existiert, höchstens von erster Kategorie. Wenn $\tau_0 \in A^n - \sum_{p=1}^{\infty} C_p$, ξ beliebig in Ξ gewählt wird, so ist $\|f_{nm}(\xi, \tau_0)\| \leqslant M_n(\tau_0) \|\xi\|$ $(m = 1, 2, 3 \ldots)$, $M_n(\tau_0) < +\infty$, und es existiert $\lim_{m \to \infty} f_{nm}(\xi_p, \tau_0)$ für $p = 1, 2, 3 \ldots$; daraus folgt auf die übliche Schlußweise die Existenz des $\lim_{m \to \infty} f_{nm}(\xi, \tau_0)$. Da aber $A^n - \sum_{p=1}^{\infty} C_p$ sich höchstens

---

[3]) Siehe z. B. das unter [1]) zitierte Buch von S. Banach, p. 80.

durch eine Menge erster Kategorie von Ξ unterscheidet, so zeigt uns diese Überlegung, daß R_n entweder nirgendsdicht oder mit dem ganzen Raum Ξ identisch ist. Wäre ein R_n nirgendsdicht, so wäre unser Satz bewiesen; wir haben also nur den Fall $R_n \equiv \Xi$ $(n=1, 2, 3\ldots)$ zu betrachten. Sei $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p, \ldots$ eine in Ξ überalldichte Punktmenge; beachten wir den Hilfssatz 2, die Definition der Menge R_n und ferner, daß B^n von erster Kategorie ist, so sehen wir, daß es eine Menge $T_1 \subset T$ mit den folgenden Eigenschaften gibt: a) $T - T_1$ ist von erster Kategorie; b) wenn $\tau_0 \in T_1$, so gilt bei gewissen, von n, τ_0 abhängigen k, r die Ungleichung $M_n(\tau) \leqslant k$ für $\tau \in T_1$, $\|\tau - \tau_0\| < \frac{1}{r}$; c) für $\xi = \xi_p$ existiert der Grenzwert (3) auf T_1 für jedes n und die Grenzoperation $f_n(\xi, \tau)$ ist auf T_1 stetig. Aus b) und c) folgern wir zuerst ohne Mühe daß für ein beliebiges $\xi \in \Xi$ der Grenzwert (3) für jedes n auf T_1 existiert, und daß die Grenzoperation $f_n(\xi, \tau)$ auf T_1 stetig ist. Nun setzen wir, für $\tau \in T_1$, $N(\tau) = \underset{n}{\text{ob. Gr.}}\,[\underset{\xi}{\text{ob. Gr.}}\frac{\|f_n(\xi, \tau)\|}{\|\xi\|}]$ und bezeichnen mit D_k die Menge der Punkte τ, für die $N(\tau) \leqslant k$. Betrachten wir zuerst den Fall, daß eine von den Mengen D_k, etwa die Menge D_{k_0}, von zweiter Kategorie ist. Dann gibt es eine Kugel K_0, so daß $D_{k_0}.K_0$ in $K_0.T_1$ überalldicht liegt. Da wegen der Stetigkeit von $f_n(\xi, \tau)$ auf T_1, $N(\tau)$ relativ zu T_1 nach unten halbstetig ist, so ist D_{k_0} relativ zu T_1 abgeschlossen und es ist also $D_{k_0}.K_0 = T_1.K_0$, was offenbar $\|f_n(\xi, \tau)\| \leqslant k_0\|\xi\|$ $(n=1, 2, 3\ldots)$ für $\tau \in T_1.K_0$ bedeutet. Sei S die Menge der Punkte ξ, für die der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\xi, \tau) \tag{4}$$

für jedes $\tau \in T_1.K_0$, abgesehen von einer Menge erster Kategorie, existiert. Wäre die Menge S in einer Kugel überalldicht, so lehrt eine Überlegung, die der bei der Betrachtung von R_n vorgenommenen ganz analog ist, daß für ein gewisses $\tau = \tau_0 \in T_1.K_0$ der Grenzwert (4) für jedes ξ existierte. Dies würde aber zu einem Widerspruch mit unserer Voraussetzung, daß der iterierte Grenzwert (2) für ein gewisses ξ nicht existiert, führen. Daraus ist ersichtlich, daß in diesem Falle die Menge $R = CS$ alle in unserem Satze behaupteten Eigenschaften besitzt. Betrachten wir jetzt den Fall, daß alle D_k von erster Kategorie sind. Dann kann man aus $T_1 - \sum_{k=1}^{\infty} D_k$ eine in T_1 überalldichte Punktmenge $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p, \ldots$ wählen; da für jedes τ_p $\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \underset{\xi}{\text{ob. Gr.}}\frac{\|f_n(\xi, \tau_p)\|}{\|\xi\|} = +\infty$, so folgt nach dem schon einmal benutzten Satz von Banach-Steinhaus die Existenz einer Menge $R \subset \Xi$, so daß $\Xi - R$ von erster Kategorie ist, und $\overline{\lim_{n\to\infty}} f_n(\xi, \tau_p) = +\infty$, $(p = 1, 2, 3\ldots;\ \xi \in R)$. Da $f_n(\xi, \tau)$ auf T_1 stetig ist, so folgt nach Hilfssatz 1 die Eigenschaft b) unseres Satzes.

§ 2.

In diesem § werden wir einige Sätze aus der Theorie der Orthogonalentwicklungen beweisen, wobei der Satz 1 zur Anwendung kommt.

Hilfssatz 3. *Wenn die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n b_n$ *bei beliebiger Vorzeichenverteilung* $\varepsilon_n = \pm 1$ *mit einer* Toeplitz'schen *Summationsmethode* T[4]) *summierbar ist, so ist die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ *konvergent.*

Beweis. Es ist $\sum_{n=1}^{m} a_{in} s_n = \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n [b_n (\sum_{k=n}^{m}{}' a_{ik})]$, wobei $s_m = \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n b_n$. Da die Limitierungsmethode, die der Matrix $b_{mn} = b_n(\sum_{k=n}^{m} a_{ik})$ $1 \leqslant n \leqslant m$, $b_{mn} = 0$ für $n > m$ entspricht, jede Zahlenfolge $\varepsilon_n = \pm 1$ limitiert, so gibt es, nach einem Satz von I. Schur[5]), zu jedem $\varepsilon > 0$ ein N, so daß

---

[4]) Unter einer Toeplitz'schen Summationsmethode verstehen wir hier eine lineare, permanente Summationsmethode, die durch eine Matrix (a_{in}) charakterisiert ist; die Summe $T_i = \sum_{n=0}^{\infty} a_{in} s_n$ nennen wir die i-te Transformierte der Zahlenfolge s_n.

[5]) Siehe: I. Schur, Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen, Journ. f. r. u. ang. Math. 151 (1921) p. 79—111, insb. p. 82 und p. 88—90. Wir wenden hier den Satz von I. Schur in folgenden etwas schärferen Fassung an: Sei (a_{in}) eine Zahlenmatrix; wenn für eine be-

$$(5) \qquad \sum_{n=N}^{\infty} |b_{mn}| = \sum_{n=N}^{m} |b_n| \left| \sum_{k=n}^{m} a_{ik} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

für $m = N, N+1, N+2 \ldots$. Da die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}$ konvergiert, so folgt aus (5)

$$(6) \sum_{n=N}^{\infty} |b_n| \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_{ik} \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{n=N}^{m} |b_n| \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} a_{ik} \right| \leqslant \varepsilon, \quad (m = N, N+1, \ldots).$$

Es ist

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \left[b_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_{ik} \right) \right] - \sum_{n=1}^{m} a_{in} s_n \right| = \left| \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n \left[b_n \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} a_{ik} \right) \right] + \sum_{n=m+1}^{\infty} \varepsilon_n \left[b_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_{ik} \right) \right] \right|;$$

wegen (6) wird aber die rechte Seite dieser Identität, für hinlänglich große m, beliebig klein, so daß

$$(7) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_{in} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \left[b_n \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_{ik} \right) \right] \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots).$$

Da nun nach unserer Voraussetzung die Folge (7), bei jeder Vorzeichenverteilung $\varepsilon_n = \pm 1$ konvergiert, so gibt es eine Konstante K, so daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \left| \sum_{k=n}^{\infty} a_{ik} \right| \leqslant K$$

für $i = 1, 2, 3 \ldots$[6]. Da aber für jedes n $\lim_{i \to \infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_{ik} = 1$, so folgt daraus $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < +\infty$.

Satz 2. *Sei $\{\varphi_n(x)\}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ ein in (L^2) vollständiges Orthogonalsystem, T eine beliebige* TOEPLITZ'sche *Summationsmethode. Es gibt dann eine Orthogonalreihe*

liebige Vorzeichenverteilung $\varepsilon_n = \pm 1$ die Folge $T_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_{in} \varepsilon_n$ konvergiert, so gibt es eine Konstante K, so daß $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{in}| \leqslant K$, $(i = 1, 2, 3 \ldots)$ und es gibt zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index N, so daß $\sum_{n=N}^{\infty} |a_{in}| \leqslant \varepsilon$, $(i = 1, 2, 3 \ldots)$.

[6]) Vgl. [5]).

$$(8) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty$, welche in einer Menge X, die in jedem Intervall von der Mächtigkeit des Kontinuums ist, mit der Methode T nicht summierbar ist.

Beweis. Sei δ ein Intervall aus $(0, 1)$ mit rationalen Endpunkten; wir wählen in δ eine perfekte Punktmenge D, auf welcher alle $\varphi_n(x)$ stetig sind und $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(x) = +\infty$. Dies ist möglich, da die Menge der Punkte, für welche $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n^2(x) = 1$, vom Maße 1 ist[7]). Sei $x_0 \in D$; wir wählen eine Zahlenfolge $\{b_n\}$, welche den beiden Bedingungen $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < +\infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| |\varphi_n(x_0)| = +\infty$ genügt. Nach Hilfssatz 3 gibt es eine Vorzeichenverteilung $\varepsilon_n = \pm 1$, so daß, $a_n = \varepsilon_n b_n$ gesetzt, die Reihe (8) für $x = x_0$ mit der Methode T nicht summierbar ist. Nun können wir den Satz 1 anwenden, indem wir für Ξ den HILBERT'schen Raum (l^2), für T die Menge D, für $f_{nm}(\xi, \tau)$ die m-te Teilsumme der n-ten Transformierten der Reihe (8) nehmen. Aus Satz 1 folgt die Existenz einer Menge $R_\delta \subset (l^2)$ mit den beiden Eigenschaften: a) die Menge $(l^2) - R_\delta$ ist von erster Kategorie; b) für jedes Element aus R_δ ist die Reihe (8) in einer Teilmenge von δ von der Mächtigkeit des Kontinuums mit der Methode T nicht summierbar. Es ist jetzt evident, daß jede Reihe aus $\prod_{\delta} R_\delta$, wo δ alle Intervalle aus $(0, 1)$ mit rationalen Endpunkten durchläuft, die Eigenschaft besitzt, von der im Satze 2 die Rede ist.

Satz 3. *Es sei $\{\varphi_n(x)\}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ ein Orthogonalsystem mit $|\varphi_n(x)| \leqslant M$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$; es bezeichne $\{\lambda_n\}$, $\lambda_n > 0$, eine gegen $+\infty$ wachsende Zahlenfolge, für welche die Reihe*

$$(9) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}$$

[7]) Siehe: W. Orlicz, Zur Theorie der Orthogonalreihen, Bull. Ac. Pol. (1927) p. 81–115, insb. p. 101.

divergiert. Ist T eine beliebige Toeplitz'sche *Summationsmethode, so gibt es eine Orthogonalreihe* (8) *mit den folgenden Eigenschaften:* a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}{}' \lambda_n a_n^2 < +\infty$; b) *alle Transformierten T_n der Reihe* (8) *sind sinnvoll;* c) *in einer Menge X von der Mächtigkeit des Kontinuums ist die Reihe* (8) *mit der Methode T nicht summierbar.*

Beweis. Es entspreche der Summationsmethode T die Matrix (a_{in}); dann gibt es ersichtlich eine gegen $+\infty$ monoton wachsende Folge $\{\alpha_n\}$ von positiven Zahlen, so daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{in}|\,\alpha_n < +\infty \qquad (i=1,2,3\ldots). \tag{10}$$

Es bezeichne $\{\overline{\lambda}_n\}$ eine Zahlenfolge mit der Eigenschaft, daß: a) $\overline{\lambda}_n \geqslant \lambda_n$; b) $\sum\limits_{n=1}^{p} \frac{1}{\overline{\lambda}_n} \leqslant \alpha_p$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\overline{\lambda}_n} = +\infty$. Mit A bezeichnen wir weiter die Menge derjenigen x, für welche die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n^2(x)}{\overline{\lambda}_n} \tag{11}$$

divergiert. Die Menge A ist von positivem Maße; denn setzen wir voraus, daß die Reihe (11) fast überall konvergiert. Nach dem Egoroff'schen Satze konvergiert sie dann gleichmäßig auf einer Menge A_1, deren Maß wir größer als $1-\frac{1}{2M^2}$ annehmen dürfen. Da wegen $|\varphi_n(x)| \leqslant M$, die Ungleichung $\int\limits_{A_1} \varphi_n^2(x)\,dx > \frac{1}{2}$ besteht, und da die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\overline{\lambda}_n} \int\limits_{A_1} \varphi_n^2(x)\,dx$ konvergiert, so muß auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\overline{\lambda}_n}$ konvergieren — dies widerspricht aber der Bedingung c). Wir wählen eine perfekte Menge $D \subset A$, auf welcher alle $\varphi_n(x)$ stetig sind, ein $x_0 \in D$ und eine Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2 < +\infty$, so daß $\sum\limits_{n=1}^{\infty}{}' |b_n| \frac{|\varphi_n(x_0)|}{\sqrt{\overline{\lambda}_n}} = +\infty$. Setzen wir nun $\overline{b}_n = \varepsilon_n b_n$, $\varepsilon_n = \pm 1$, so ist nach Hilfssatz 3, bei entsprechender Wahl der Vorzeichenverteilung ε_n, die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \overline{b}_n \frac{\varphi_n(x)}{\sqrt{\overline{\lambda}_n}} \tag{12}$$

für $x = x_0$ mit der Methode T nicht summierbar. Die Anwendung des Satzes 1 ergibt die Existenz einer Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{b}_n^2 < +\infty$, so daß (12) in einer Menge $X \in D$, von der Mächtigkeit des Kontinuums mit der Methode T nicht summierbar ist. Setzen wir nun $a_n = \frac{\overline{b}_n}{\sqrt{\overline{\lambda}_n}}$, so weist die Reihe (8) alle im Satze 3 behaupteten Eigenschaften auf (die Existenz von Transformierten folgt insbesondere aus (10), b) und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \overline{b}_n^2 < +\infty$).

Wir führen noch, ohne Beweis, einen anderen Satz an, der von demselben Typus wie Satz 3 ist:

Satz 4. *Sei $\{\varphi_n(x)\}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ ein Orthogonalsystem mit $|\varphi_n(x)| \leqslant M$ $(n=1,2,3\ldots)$, T eine beliebige* Toeplitz'sche *Summationsmethode, $M[u]$ $(0 \leqslant u < +\infty)$, eine stetige Funktion mit $M[u] > 0$ $u > 0$, $M[0] = 0$, $\lim\limits_{u\to 0} \frac{M[u]}{u^2} = +\infty$. Es gibt eine Orthogonalreihe* (8) *mit den folgenden Eigenschaften:* a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M[|a_n|] < +\infty$; b) *alle Transformierten T_n der Reihe* (8) *sind sinnvoll;* c) *in einer Menge X von der Mächtigkeit des Kontinuums ist* (8) *mit der Methode T nicht summierbar.*

Bemerkungen. 1. Es ist zu bemerken, daß wir im Beweise von Satz 3 keinen Gebrauch von der Orthogonalitätseigenschaft des Funktionensystems gemacht haben (Analoges gilt auch vom Satz 4). Da wir nur die Divergenz der Reihe (11) in einer Menge von positivem Maße sicherstellen müssen, so ist es zulässig, ein Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ zu nehmen, das die einzige Bedingung (statt der in Satz 3, bezw. 4 angeführten) erfüllt:

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int\limits_{A} |\varphi_n(x)|^2\,dx > a > 0. \tag{13}$$

2. Ist (13) für jede Menge A von positivem Maße erfüllt, so ist es möglich die Sätze 3, 4 und dgl. dahin zu verschärfen, daß man die Eigenschaft der Menge X „von der Mächtigkeit des Kontinuums“ durch den Zusatz „in jedem Intervall“ verstärken kann. Dies findet also z. B. für das trigonometrische Orthogonalsystem statt, oder allgemeiner, für ein Funktionensystem $\varphi_n(x) = g(nx)$, $n = 1, 2, 3 \ldots$, wo $g(x)$ etwa stetig von der Periode 1 ist. In dieser Hinsicht verschärft, bildet Satz 3 die Verallgemeinerung eines zuerst von Herrn H. Steinhaus[8]) für das trigonometrische Orthogonalsystem bewiesenen Satzes.

3. Erfüllt eine Zahlenfolge $\{a_n\}$ die Bedingung $n a_n \to 0$ oder auch nur $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 (\log n)^2 < +\infty$, bezw. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{2-\varepsilon} < +\infty$, so ist bekanntlich die Orthogonalreihe (8) fast überall konvergent. Die Sätze 3, 4 und dgl. lehren uns, daß derartige Kriterien immer (zumindestens für gleichmäßig beschränkte Orthogonalsysteme) wesentlich mit „fast überall“ — Aussagen verbunden werden müssen, auch dann, wenn wir statt der gewöhnlichen Konvergenz beliebige Summationsmethoden zulassen. Darin ist der eigentliche Sinn jener Sätze zu erblicken.

4. Es ist endlich zu bemerken, daß die in Satz 3 gemachte Voraussetzung der Divergenz der Reihe (9) in der Natur der Sache liegt. Ist sie nämlich nicht erfüllt, so folgt aus $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n^2 < +\infty$ ohne weiteres $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ und also, wegen $|\varphi_n(x)| \leqslant M$, auch die absolute Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ für jedes x.

---

[8]) H. Steinhaus, Rozwiązanie pewnego zagadnienia Fatou, Rozpr. Wydz. mat.-przyr. Ak. Um. 58, ser. A (1918) p. 147—154 und H. Steinhaus, Résolution d'une question de M. Fatou, Bull. de l'Ac. des Sc. de Cracovie, série A (1918) p. 69—71 (extrait).

(Reçu par la Rédaction le 6. 7. 1935).