## Eine Bemerkung über die Gruppe der topologischen Abbildungen der Kreislinie auf sich selbst

von

J. SCHREIER und S. ULAM (Lwów).

1. Es bezeichne $G$ die Gruppe aller topologischen Abbildungen des Intervalls $(0, 1)$ auf sich selbst.

Wir wollen zunächst die verschiedenen Klassen äquivalenter Elemente, in die $G$ zerfällt, angeben. (Dabei heißen, wie üblich, zwei Elemente $f$ und $g$ äquivalent, wenn es ein $h \in G$ gibt, so daß $f = hgh^{-1}$ gilt).

Wir können uns bei dieser Untersuchung auf die Einheitskomponente $G^*$ von $G$, d. i. auf die Abbildungen, die durch monoton wachsende, stetige Funktionen $f(x)$ mit $f(0)=0$, $f(1)=1$ gegeben sind, beschränken.

Ein Fixpunkt $x$ resp. ein Intervall von Fixpunkten $X$ einer Abbildung $f$ heiße *attraktiv*, wenn für jeden, in einer genügend kleinen Umgebung von $x$ (resp. $X$) liegenden Punkt $y$, $\lim_{n \to \infty} f^n(y) = x$ resp. $\lim_{n \to \infty} f^n(y) \in X$ gilt.

Es bezeichne für eine Abbildung $f$, $Z(f)$ die Menge der attraktiven Fixpunkte und Fixintervalle, $X(f)$ die Menge der übrigen Fixpunkte.

*Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Äquivalenz zweier Abbildungen $f$ und $g$ aus $G^*$ ist die gleichzeitige Äquivalenz der Mengen $Z(f)$ und $Z(g)$ und der Mengen $X(f)$ und $X(g)$ d. h. die Existenz eines $h \in G$, so daß $h(Z(f)) = Z(g)$ und $h(X(f)) = X(g)$ ist.*

Der einfache Beweis dieser Behauptung beruht auf folgender Bemerkung[1]). Zwei Abbildungen $f, g \in G^*$ sind immer in $G^*$ äquivalent, wenn

$$f(x) > x \quad \text{und} \quad g(x) > x \quad \text{für} \quad 0 < x < 1$$

resp.

$$f(x) < x \quad \text{und} \quad g(x) < x \quad \text{für} \quad 0 < x < 1$$

gilt.

Man wähle nämlich ein $x_0$ $(0 < x_0 < 1)$, setze $h(x_0) > x_0$ beliebig, $x_n = g(x_{n-1})$, $x_{-n} = g^{-1}(x_{-(n-1)})$ und

$$\begin{aligned} h(x_n) &= fh(x_{n-1}), \\ h(x_{-n}) &= f^{-1}h(x_{-(n-1)}). \end{aligned} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

Dann verbinde man $h(x_0)$ mit $h(x_1)$ stetig und monoton wachsend, sonst aber beliebig und setze für jedes $x_0 < \xi_0 < x_1$: $\xi_n = g(\xi_{n-1})$, $\xi_{-n} = g^{-1}(\xi_{-(n-1)})$, $h(\xi_n) = fh(\xi_{n-1})$, $h(\xi_{-n}) = f^{-1}h(\xi_{-(n-1)})$.

Man bestätigt leicht, daß $h(x)$ eine topologische Abbildung des Intervalls $(0, 1)$ auf sich selbst ist und daß $hgh^{-1}(x) = f(x)$.

Es seien nun $f$ und $g \in G^*$ mit $X(f) = X(g)$ und $Z(f) = Z(g)$ gegeben. Daraus folgt leicht, daß in jedem Intervalle $(x_1, x_2)$ derart, daß $x_1 \in X + Z$, $x_2 \in X + Z$, $(x_1, x_2).(X + Z) = 0$ entweder $f(x) > x$ und $g(x) > x$, oder $f(x) < x$ und $g(x) < x$ gilt.

Laut der früheren Bemerkung läßt sich in jedem $(x_1, x_2)$ ein $h(x)$ erklären, welches die Gleichung $hgh^{-1}(x) = f(x)$ für $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$ erfüllt. Dabei ist $h(x_1) = x_1$ und $h(x_2) = x_2$. Damit ist aber in $(0, 1)$ ein $h(x) \in G^*$ erklärt, welches $g$ in $f$ transformiert, d. h. $hgh^{-1} = f$ erfüllt.

Wir betrachten jetzt einen Normalteiler $D$ der Gruppe $G^*$; $f$ bezeichne eine zu $D$ gehörende Abbildung, für die 0 und 1 isolierte Fixpunkte sind.

Die Null sei z. B. für $f$ nicht attraktiv, die Eins z. B. für $f^{-1}$ attraktiv. (Da 0 und 1 isolierte Fixpunkte sind, muß jeder von ihnen entweder für $f$ oder für $f^{-1}$ attraktiv sein).

Man findet dann zwei Abbildungen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $\varphi$ ist mit $f$, $\psi$ mit $f^{-1}$ äquivalent, daher gehören $\varphi$ und $\psi$ zu $D$.

b)
$$\begin{aligned} &\varphi(x) > x \quad \text{in} \quad 0 < x < 1 - \varepsilon \\ &\psi(x) > x \quad \text{in} \quad \varepsilon < x < 1 \\ &|\varphi(x) - x| < \varepsilon(x) \quad \text{in} \quad 1 - \varepsilon < x < 1 \\ &|\psi(x) - x| < \varepsilon(x) \quad \text{in} \quad 0 < x < \varepsilon \end{aligned}$$

[1]) H. Kneser, Kurvenscharen auf Ringflächen, Math. Ann. 91 (1924) p. 135—154.



wobei $\varepsilon$ und $\varepsilon(x)$ positiv und so klein sind, daß $\nu(x) = \varphi\psi(x)$ die Ungleichung

$$\nu(x) > x \quad \text{für} \quad 0 < x < 1$$

erfüllt.

Da $\nu = \varphi\psi$ ist, gehört laut a) $\nu$ zu $D$, also auch die Abbildung $\nu^{-1}(x)$, die die Ungleichung

$$\nu^{-1}(x) < x \quad \text{für} \quad 0 < x < 1$$

erfüllt. Daher gehören zu $D$ alle mit $\nu$ oder $\nu^{-1}$ äquivalenten Abbildungen, also alle Abbildungen $f$, für die entweder $f(x) > x$ oder $f(x) < x$ in ganz $(0, 1)$ gilt. Es sei nun $p(x) \in G^*$ beliebig gegeben.

Wir nehmen ein $f(x)$, das die Bedingungen

$$f(x) > x \tag{1}$$

$$\text{für } 0 < x < 1$$

$$f(x) > p(x) \tag{2}$$

erfüllt. Wir setzen

$$g(x) = f^{-1}p(x). \tag{3}$$

Da $f^{-1}(x)$ ebenfalls monoton wächst, ist nach (2) und (3)

$$g(x) < f^{-1}f(x) = x. \tag{4}$$

Wegen (3) ist

$$p(x) = fg(x). \tag{5}$$

Nach (1) und (4) gehören $f$ und $g$ zu $D$, also wegen (5) gehört auch $p$ zu $D$. $D$ ist also mit $G^*$ identisch.

Alle Abbildungen $f$, für die $f(x) = x$ in $(0, \varepsilon(f))$ $(0 < \varepsilon(f) < 1)$ gilt, bilden, wie man leicht bestätigt, einen Normalteiler in $G^*$. Ebenso die Abbildungen $h(x)$, für die in beliebiger Nähe des Punktes 0 Punkte $x$ und $y$ liegen, so daß $h(x) > x$ und $h(y) < y$ gilt. Schließlich erhält man einen Normalteiler, wenn man Abbildungen $g(x)$ betrachtet, für die es ein $\varepsilon(g)$ gibt, so daß $g(x) = x$ für $0 \leqslant x \leqslant \varepsilon(g)$ gilt, und in beliebiger Nähe des Punktes $x = \varepsilon(g)$ Punkte $y$ und $z$ liegen, so daß $g(y) > y$ und $g(z) < z$ ist. Man kann dann noch dieselben Singularitäten bei $x = 1$ konstruieren.

Aus dem Bewiesenen folgt, daß $G^*$ keinen abgeschlossenen nichttrivialen Normalteiler enthält.

**2.** Wir gehen nun zur Untersuchung der Gruppe $K$ aller topologischen Abbildungen der Kreislinie auf sich selbst über. Wir können uns hier auch von vornherein auf die Einheitskomponente $K^*$ von $K$, d. h. auf die die Indikatrix erhaltenden Abbildungen beschränken.

Wir beginnen mit folgender Bemerkung:

Die Untergruppe der Elemente von $K$, die ein gewisses $x$ festlassen, ist stetig isomorph mit der Gruppe $G$[2]).

Für Abbildungen $f$, die mindestens einen Fixpunkt besitzen, sind daher die Bedingungen für Äquivalenz dieselben wie in der Gruppe $G$.

Wir betrachten zunächst zwei Abbildungen $f$, $\varphi$, deren $n$-te Iterationen Fixpunkte besitzen, während $f, \varphi, f^2, \varphi^2, \dots f^{n-1}, \varphi^{n-1}$ fixpunktfrei sind.

Wir behaupten: Zur Äquivalenz dieser Abbildungen ist die Äquivalenz von $f^n$ und $\varphi^n$ notwendig und hinreichend.

Die Bedingung ist offenbar notwendig. Um zu zeigen, daß sie hinreichend ist, können wir annehmen, daß $\varphi^n$ und $f^n$ miteinander identisch sind. Die bei $f^n$ fixpunktfreien Intervalle zerfallen in Klassen von je $n$ Intervallen: $I_1, I_2, \dots I_n$, so daß $f(I_1) = I_2, \dots f(I_{n-1}) = I_n$, $f(I_n) = I_1$ ist. Man setze

$$h(x) = f^{k-1}\varphi^{1-k}(x) \quad \text{für} \quad x \in I_k.$$

Man bestätigt, daß $h(x) \in K^*$ und

$$h^{-1} f h(x) = \varphi(x)$$

gilt.

Wir nehmen jetzt an, daß kein $f^n$ Fixpunkte besitzt. Man kann dann mit Poincaré die sogenannte Rotationszahl $\alpha$[3]) einführen, welche eine Klasseninvariante ist, d. h. für je zwei äquivalente Abbildungen übereinstimmt. Ist noch die Punktmenge $\{f^n(x)\}$ $(-\infty < n < \infty)$ für irgendein $x$ überalldicht, so beweist man leicht, daß $f$ einer Drehung um $\alpha$ äquivalent ist. Sonst ist die Ableitung der Menge $\{f^n(x)\}$ eine nirgendsdichte, perfekte Menge (sog. Cantorsche Menge). Ihre Restintervalle zerfallen in Klassen, indem zwei solche Intervalle $I$ und $J$ zu einer Klasse gerechnet werden, wenn $f^n(I) = J$ für ein gewisses $n$ gilt. Da zwei Cantorsche Mengen immer äquivalent sind, so ist, wie man sich überzeugt, die Anzahl dieser Klassen nebst der Rotationszahl genügend, um die Klasse einer Abbildung zu charakterisieren.

Es bezeichne wieder $D$ einen Normalteiler von $K^*$.

Enthält $D$ ein $f$, für welches ein Punkt $x_0$ isolierter Fixpunkt ist, so enthält $D$ laut obiger Bemerkung und dem Resultate von **1.** alle $f$, für die $f(x_0) = x_0$ ist, daher auch jede Abbildung, die überhaupt einen Fixpunkt besitzt. (Durch Drehung wird nämlich ihre Äquivalenz mit einer Abbildung, die $x_0$ zum Fixpunkt hat, bewiesen).

[2]) J. Schreier und S. Ulam, Über topologische Abbildungen euklidischer Sphären. Fund. Math. 23 (1934) p. 102–118.

[3]) S. die unter 1) zit. Arbeit.



Da jede fixpunktfreie Abbildung natürlich als Zusammensetzung zweier Abbildungen mit Fixpunkten erhalten werden kann, so ist $D$ mit $K^*$ identisch.

Nun enthalte $D$ ein $f$, dessen Fixpunktmenge $F$ perfekt ist. $D$ enthält dann alle $\varphi$ mit $X(\varphi) = X(f)$, $Z(\varphi) = Z(f)$. Man kann nun unter diesen $\varphi$ ein solches wählen, welches in einem Restintervall $I$ der Menge $F$ so erklärt ist, daß die Zusammensetzung $\varphi^{-1} f$ in $I$ einen isolierten Fixpunkt hat. Daher ist auch in diesem Falle $D$ mit $K^*$ identisch.

Enthält $D$ eine fixpunktfreie Abbildung $f$, so kann unter den mit $f^{-1}$ äquivalenten Abbildungen leicht eine Abbildung $g \equiv\!\!\mid\!\!= f^{-1}$ gefunden werden, so daß $fg$ einen Fixpunkt besitzt. Nach dem Vorangehenden ist also $D$ auch jetzt mit $K^*$ identisch.

Unser Resultat können wir daher so aussprechen:

*Die Gruppe der indikatrixerhaltenden topologischen Abbildungen der Kreislinie auf sich selbst ist einfach.*

Die Frage, ob ein analoger Satz für die höheren Dimensionen gilt, bleibt offen.

*(Reçu par la Rédaction le 12. 6. 1935).*