Sur les évaluations pour une équation du type hyperbolique

par

M. KRZYŻAŃSKI (Wilno).

Les évaluations dont je m'occupe dans la Note présente concernent le problème qui consiste à déterminer la solution d'une équation linéaire hyperbolique à l'intérieur de la surface d'un cône par les valeurs qu'elle prend sur la surface elle-même.

En suivant la méthode de MM. FRIEDRICHS et LEWY[1]) on obtiendra les évaluations des dérivées de cette solution, supposée existante, analogues à celle, que ces auteurs ont établi pour le problème de Cauchy.

Dans le cas particulier, quand l'équation donnée est celle des ondes cylindriques et le cône donné est son cône caractéristique, ces évaluations furent établies par MM. S. ZAREMBA et A. RUBINOWICZ[2]).

On peut étendre ce résultat à un problème mixte, où l'on a les données de Cauchy sur la base moindre d'un cône tronqué et les valeurs de la fonction cherchée sur la surface latérale. Ce problème fut traité par M. HADAMARD pour l'équation des ondes dans le cas d'une surface latérale cylindrique[3]).

Pour fixer les idées je me borne aux équations à trois variables indépendantes.

---

[1]) K. Friedrichs und H. Lewy, Über die Eindeutigkeit und das Abhängigkeitsgebiet der Lösungen beim Anfangsproblem linearer hyperbolischer Differentialgleichungen, Math. Ann. 98 (1928) p. 196—204.

[2]) S. Zaremba, Sopra un teorema d'unicità relativa alla equazione delle onde sferiche, Atti Accad. dei Lincei XXIV (1915) p. 904—908; A. Rubinowicz, Zur Integration der Wellengleichung auf Riemannschen Flächen, Math. Ann. 96 (1926) p. 648—687.

[3]) J. Hadamard, Problème de Cauchy, Paris 1932, p. 475.

Supposons que le sommet du cône $\mathfrak{C}$ est à l'origine des coordonnées (x, y, t), que son axe coïncide avec celui des t et que l'angle au sommet est 2α. Posons pour abréger $\operatorname{ctg}\alpha = \lambda$. On attribue en outre à chaque point P de la surface du cône les coordonnées:

l — la distance de P à l'origine

Θ — l'angle renfermé par le plan passant par P et l'axe des t et le plan (x, t).

Les cosinus directeurs de la normale intérieure à $\mathfrak{C}$ au point P sont alors:

$$\cos nx = -\cos\alpha\cos\Theta$$
$$\cos ny = -\cos\alpha\sin\Theta$$
$$\cos nt = \sin\alpha.$$

L'équation

$$(1) \quad A(x,y,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x,y,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + C(x,y,t)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2E(x,y,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t} + 2G(x,y,t)\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial t} + H(x,y,t)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(x,y,t)$$

étant du type hyperbolique à cœfficients aux derivées premières continues, on peut supposer, sans restreindre essentiellement la généralité du problème, que:

$$(2) \qquad A>0; \quad H<0; \quad AC-B^2>0.$$

Désignons par Γ_p le cône engendré par les normales au cône caractéristique[4]) rélatif au point $P(x, y, t)$ de l'équation à cœfficients constants:

$$A(x,y,t)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2B(x,y,t)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + C(x,y,t)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + 2E(x,y,t)\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\tau} + 2G(x,y,t)\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\tau} + H(x,y,t)\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2} = f(x,y,t);$$

l'équation de Γ_p est:

$$A(X-x)^2 + 2B(X-x)(Y-y) + C(Y-y)^2 + 2E(X-x)(T-t) + 2G(Y-y)(T-t) + H(T-t)^2 = 0.$$

[4]) Pour la définition de ce cône voir: J. Hadamard, l. c. p. 24.

On suppose qu'en aucun point P du cône $\mathfrak{C}$ la normale à la surface de $\mathfrak{C}$ n'est intérieure au cône Γ_p[5]), *ce qui s'exprime par l'inégalité:*

$$(3) \quad F[\lambda,\Theta] = (A\cos^2\Theta + 2B\cos\Theta\sin\Theta + C\sin^2\Theta)\lambda^2 - (2E\cos\Theta + 2G\sin\Theta)\lambda + H \geqslant 0.$$

Nous allons démontrer qu'il existe alors deux nombres h_0 et M, qui ne dépendent que des coefficients de (1) *tels que pour $t_0 < h_0$:*

$$(4) \quad \iiint\limits_{V_0} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] dx\,dy\,dt \leqslant M\left\{\iint\limits_{S_0}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right)^2 + \frac{1}{l^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\Theta}\right)^2\right] d\sigma + \iiint\limits_{V_0} f^2\,dx\,dy\,dt\right\},$$

V_0 et S_0 étant respectivement le volume et la surface latérale du cône que le plan $t=t_0$ coupe de la surface cônique $\mathfrak{C}$.

A cet effet intégrons les deux membres de (1), multipliés par $\frac{\partial u}{\partial t}$, à l'intérieur du cône coupé de $\mathfrak{C}$ par le plan $t=\tau$. Désignons par V son volume, par B sa base et par S sa surface latérale. On aura, en appliquant la formule de Green et après une transformation légère de l'intégrale étendue à S:

$$\iint\limits_{B}\left[A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - 2B\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t} + C\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - H\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right] dx\,dy =$$

$$\iint\limits_{S}\Big[A\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial u}{\partial t}\cos\Theta\right)^2 + 2B\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial u}{\partial t}\cos\Theta\right)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda\frac{\partial u}{\partial t}\sin\Theta\right) + C\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \lambda\frac{\partial u}{\partial t}\sin\Theta\right)^2 - F[\lambda,\Theta]\Big]\sin\alpha\,d\sigma + \iiint\limits_{V}\Phi\left[\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial t}\right]dx\,dy\,dt + 2\iiint\limits_{V} f\frac{\partial u}{\partial t}\,dx\,dy\,dt,$$

$\Phi\left[\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial t}\right]$ étant une forme quadratique en $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial t}$.

Or:

$$\sin\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \lambda\frac{\partial u}{\partial t}\cos\Theta\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial l}\cos\Theta - \frac{1}{l}\frac{\partial\varphi}{\partial\Theta}\sin\Theta,$$

[5]) Dans le cas de l'équation des ondes cylindriques cette condition équivaut à la suivante: le cône $\mathfrak{C}$ est intérieur au cône caractéristique ou se confond avec lui.

$$\sin\alpha\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\lambda\frac{\partial u}{\partial t}\sin\Theta\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial l}\sin\Theta+\frac{1}{l}\frac{\partial\varphi}{\partial\Theta}\cos\Theta,$$

et en vertu de (2) et (3) on a:

$$\iint_B\left[A\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-2B\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+C\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-H\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]dxdy\leqslant$$

$$\iint_S\Big[A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial l}\cos\Theta-\frac{1}{l}\frac{\partial\varphi}{\partial\Theta}\sin\Theta\right)^2+$$

$$2B\left(\frac{\partial\varphi}{\partial l}\cos\Theta-\frac{1}{l}\frac{\partial\varphi}{\partial\Theta}\sin\Theta\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial l}\sin\Theta+\frac{1}{l}\frac{\partial\varphi}{\partial\Theta}\cos\Theta\right)+$$

$$C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial l}\sin\Theta+\frac{1}{l}\frac{\partial\varphi}{\partial\Theta}\cos\Theta\right)^2\Big]\sin\alpha d\sigma+$$

$$\iiint_V\Phi\left[\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial t}\right]dxdydt+2\iiint_V f\frac{\partial u}{\partial t}\,dxdydt,$$

l'expression sous le signe de l'intégrale au premier membre étant une forme positive définie.

Il existe donc trois nombres μ_1, μ_2, μ_3 tels que:

$$\iint_B\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]dxdy\leqslant\mu_1\iint_S\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial l}\right)^2+\frac{1}{l^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\Theta}\right)^2\right]d\sigma+$$

$$\mu_2\iiint_V\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]dxdydt+\mu_3\iiint_V f^2\,dxdydt.$$

Après avoir intégré les deux membres de la dernière inégalité par rapport à τ dans l'intervalle: $0\leqslant\tau\leqslant t_0$, on aboutit à (4) ce qui achève la démonstration.

Qu'il me soit permis d'exprimer ici mes remerciements à M. J. Schauder, qui m'a donné beaucoup d'indications concernant ces problèmes pendant mon séjour à Lwów.

(Reçu par la Rédaction le 11. 6. 1935).