Ein Satz über die Erweiterung von linearen Operationen

von

W. ORLICZ (Lwów).*)

Es bezeichne $M[u]$ eine, in $\langle 0, +\infty)$ definierte, stetige, konvexe Funktion, die nur für $u=0$ verschwindet. Eine in (a, b) definierte, meßbare Funktion $f(x)$, heißt *mit* $M[u]$ *integrierbar*, falls

$$\int_a^b M[|f(x)|]\, dx < +\infty .$$

Setzen wir zuerst voraus, daß die Funktion $M[u]$ die folgenden Bedingungen erfüllt:

a) $\lim\limits_{u \to 0} \dfrac{M[u]}{u} = 0$; b) $\lim\limits_{u \to +\infty} \dfrac{M[u]}{u} = +\infty$; c) es gibt eine Konstante k und ein u_0 so, daß die Ungleichung

$$M[2u] \leqslant k M[u] \tag{1}$$

für $u \geqslant u_0$ besteht. Man beweist unter diesen Voraussetzungen über $M[u]$, daß die Menge aller mit $M[u]$ integrierbaren Funktionen einen Raum vom Typus (B) bildet [1]); im folgenden werden wir ihn immer mit (L^M) bezeichnen. Da aber für $M[u] = u^\alpha$ der Raum (L^M) mit dem Raum (L^α) aller mit der α-ten Potenz integrierbaren Funktionen identisch ist, so werden wir in diesem Sonderfalle auch die übliche Bezeichnung (L^α) benutzen. Es wird endlich unter (L^∞) der Raum aller wesentlich beschränkten Funktionen verstanden.

Damit $M_1[u]$ *nicht schwächer* als $M[u]$ sei, d. h. damit jede mit $M[u]$ integrierbare Funktion auch mit $M_1[u]$ integrierbar sei, ist die folgende Bedingung notwendig und hinreichend: es gibt eine Konstante $\bar{k}$, mit der die Ungleichung

---

*) Der Hauptinhalt dieser Arbeit wurde in der Sitzung vom 29. III. 1935 der Poln. Math. Gesellschaft (Abteilung Lwów) vorgetragen.

[1]) Siehe: W. Orlicz, Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B, Bull. Ac. Pol. (1932) p. 207—220, Von den Resultaten dieser Arbeit werden wir hier keinen Gebrauch machen.

(2) $$M_1[u] \leqslant \bar{k} M[u]$$
für $u \geqslant \bar{u}_0$ stattfindet[2]). Das gleichzeitige Bestehen der Ungleichung (2) für $u \geqslant \bar{u}_0$ und der umgekehrten Ungleichung $M[u] \leqslant k\, M_1[u]$ für $u \geqslant \bar{\bar{u}}_0$, bildet eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die Räume (L^M) und (L^{M_1}) *äquivalent* seien, und zwar in diesem Sinne, daß $(L^M) = (L^{M_1})$. Sind zwei Räume (L^M), (L^{M_1}) äquivalent, so folgt aus der Bedingung: 1) $\int_a^b M[|f_n(x)|]\,dx \leqslant A$ bezw. aus: 2) $\int_a^b M[|f_n(x) - f(x)|]\,dx \to 0$ die Bedingung:

1′) $\int_a^b M_1[|f_n(x)|]\,dx \leqslant B$ (mit einer von $f_n(x)$ unabhängigen Konstante B) bezw.: 2′) $\int_a^b M_1[|f_n(x) - f(x)|]\,dx \to 0$ — und umgekehrt, es folgt aus 1′), bezw. 2′) die Bedingung 1) (mit einer von $f(x)$ unabhängigen Konstante A) bezw. 2).

Im weiteren werden wir ein für allemal von einer Funktion $M[u]$ voraussetzen, daß sie die Ungleichung (1) für alle $u \geqslant 0$ (nicht nur für $u \geqslant u_0 > 0$) erfüllt. Dies ist aber vom operationstheoretischen Standpunkte aus nur eine unwesentliche Beschränkung, da, wie wir jetzt zeigen wollen, die folgende Tatsache besteht:

Sind für die Funktion $M[u]$ die Voraussetzungen a), b) *und die Ungleichung* (1) *für $u \geqslant u_0 > 0$ erfüllt, so gibt es eine mit $M[u]$ äquivalente Funktion $M_1[u]$, die ebenso den Voraussetzungen* a), b) *genügt, und für welche die Ungleichung* (1) *für alle $u \geqslant 0$ besteht.*

Dies zu beweisen bemerken wir, daß $M[u] = \int_0^u p(t)\,dt$, wo $p(t)$ eine nicht abnehmende Funktion bedeutet, und $\lim_{t \to 0} p(t) = 0$ ist. Da offenbar $M[u_0] < p(u_0)\,u_0$, so gibt es ein $\beta > 0$, so daß $\frac{1}{\beta+1} = \frac{M[u_0]}{p(u_0)\,u_0}$. Wird nun α so gewählt, daß $\alpha u_0^\beta = p(u_0)$, so

[2]) Vgl. dazu: Z. W. Birnbaum-W. Orlicz, Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen, Studia Math. 3 (1931) p. 1—67; insb. p. 36.

nimmt die Funktion $\frac{\alpha u^{\beta+1}}{\beta+1}$ für $u = u_0$ den Wert $M[u_0]$ und ihre Derivierte αu^β für $u = u_0$ den Wert $p(u_0)$ an. Wir setzen $q(u) = \alpha u^\beta$ für $0 \leqslant u \leqslant u_0$, $q(u) = p(u)$ für $u \geqslant u_0$ und $M_1[u] = \int_0^u q(t)\,dt$. Die Funktion $M_1[u]$ ist stetig, konvex, erfüllt a) und b); da außerdem für $u \geqslant u_0$ $M_1[u] = M[u]$, so sind die Funktionen $M[u]$, $M_1[u]$ äquivalent. Setzen wir noch $\bar{k} = \max\left(2^{\beta+1}, k, M_1[2u_0]\,.\,M_1[\tfrac{1}{2}u_0]^{-1}\right)$ so ist, wie leicht einzusehen, mit dieser Konstante die Ungleichung (1) für $u \geqslant 0$ erfüllt.

Die folgende Bemerkung erweist sich bei verschiedenen Beweisen als nützlich:

Wenn eine Funktion $M[u]$ der Ungleichung (1) *für $u \geqslant 0$ genügt, so genügt sie auch der sog. verallgemeinerten Dreiecksbedingung:*

(3) $$M[u_1 + u_2] \leqslant \frac{k}{2}(M[u_1] + M[u_2])$$

für $u_1 \geqslant 0$, $u_2 \geqslant 0$.

In der Tat, es ist: $M[u_1 + u_2] = M\left[\frac{1}{2}(2u_1 + 2u_2)\right] \leqslant \frac{1}{2}M[2u_1] + \frac{1}{2}M[2u_2] \leqslant \frac{k}{2}(M[u_1] + M[u_2])$.

§ 1.

Hilfssatz 1. *Eine meßbare Funktion $K(x,t)$ $(a < x < b$; $a < t < b)$ genüge den beiden Ungleichungen*

(4) $$\int_a^b |K(x,t)|\,dt \leqslant A\,;$$ (4′) $$\int_a^b |K(x,t)|\,dx \leqslant A$$

für fast jedes x bezw. für fast jedes t. Es existiert dann für eine mit $M[u]$ integrierbare Funktion $f(x)$ das Integral

$$I(f,x) = \int_a^b f(t)\,K(x,t)\,dt,$$

für fast jedes x und, wenn wir $k(A) = A\,k^{[lg_2 A]+1}$ für $A > 1$, $k(A) = A$ für $0 < A \leqslant 1$ setzen, so besteht die Ungleichung

$$(5)\qquad \int_a^b M[|I(f,x)|]\,dx \leqslant k(A)\int_a^b M[|f(x)|]\,dx.$$

Beweis. Da $M[u]$ eine konvexe Funktion ist, so gilt die bekannte JENSEN'sche Ungleichung:

$$(6)\qquad M\left[\frac{\left|\int_a^b f(x)p(x)\,dx\right|}{\int_a^b p(x)\,dx}\right] \leqslant \frac{\int_a^b M[|f(x)|]\,p(x)\,dx}{\int_a^b p(x)\,dx},$$

wobei wir $p(x)\geqslant 0$ $(a<x<b)$ und die Existenz der rechts auftretenden Integrale voraussetzen. Da $M(0)=0$, so folgt aus (6) für $0<\int_a^b p(x)\,dx\leqslant 1$,

$$(6')\qquad M\left[\left|\int_a^b f(x)p(x)dx\right|\right] \leqslant \int_a^b M[|f(x)|]\,p(x)\,dx.$$

Da $f(x)$ mit $M[u]$ integrierbar ist, so ist $|f(x)|$ integrierbar, und mit Hilfe von (4') sieht man sofort ein, daß das Integral $I(f,x)$ für fast jedes x existiert. Es bezeichne S die Menge derjenigen x, für welche $\int_a^b |K(x,t)|\,dt\geqslant 1$. Die Anwendung von (4), (6) ergibt für fast alle $x\in S$

$$M\left[|I(f,x)|\frac{1}{A}\right] \leqslant M\left[|I(f,x)|\left(\int_a^b |K(x,t)|\,dt\right)^{-1}\right] \leqslant$$

$$\int_a^b M[|f(t)|]\,|K(x,t)|\,dt,$$

und nach (4), (6') erhalten wir für fast jedes $x\in CS$

$$(7)\qquad M\left[|I(f,x)|\frac{1}{A}\right] \leqslant \int_a^b M[|f(t)|]\,|K(x,t)|\,dt.$$

Es gilt also die Ungleichung (7) für fast jedes x und durch die beiderseitige Integration nach x erhalten wir

$$\int_a^b M\left[|I(f,x)|\frac{1}{A}\right]dx \leqslant \int_a^b dx\int_a^b M[|f(t)|]\,|K(x,t)|\,dt =$$

$$\int_a^b M[|f(t)|]\,dt\int_a^b |K(x,t)|\,dx \leqslant A\int_a^b M[|f(t)|]\,dt.$$

Daraus ergibt sich für $A\geqslant 1$ die Behauptung

$$\int_a^b M[|I(f,x)|\,dx \leqslant A\int_a^b M[A|f(t)|]\,dt \leqslant A k^{[\lg_2 A]+1}\int_a^b M[|f(t)|]\,dt$$ [3]).

Hilfssatz 2. *Es sei $\{K_n(x,t)\}$ eine Folge von meßbaren Funktionen; wir setzen voraus, daß für jede Funktion $K_n(x,t)$ die Ungleichungen* (4), (4') *mit n-freiem A für fast jedes x, bezw. für fast jedes t bestehen. Wenn wir dann*

$$I_n(f,x)=\int_a^b f(t)K_n(x,t)\,dt,\qquad n=1,2,3\ldots,$$

für $f(x)\in(L^M)$ setzen, so soll für jede Funktion $f(x)$, die einer in (L^M) überalldichten Menge H angehört [4]), *der Grenzwert*

$$(8)\qquad \lim_{n,m\to\infty}\int_a^b M[|I_n(f,x)-I_m(f,x)|]\,dx=0$$

existieren. Unter diesen Voraussetzungen bleibt die Relation (8) *für jedes $f(x)\in(L^M)$ bestehen.*

Beweis. Es ist nach Hilfssatz 1, (5)

$$\int_a^b M[|I_n(f,x)|]\,dx \leqslant k(A)\int_a^b M[|f(x)|]\,dx,\qquad n=1,2,3\ldots,$$

für $f(x)\in(L^M)$. Es sei $h(x)\in H$; die Anwendung der verallgemeinerten Dreiecksbedingung (3) ergibt die Ungleichung

---

[3]) Die obige Beweisführung ist eine Verallgemeinerung einer schon früher von Herrn Birnbaum und mir angewandten Schlußweise; vgl. die unter [2]) zit. Arbeit Kapitel III, § 2.

[4]) Das soll heißen: Wenn $f(x)\in(L^M)$, so gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ eine Funktion $h(x)\in H$, für welche

$$\int_a^b M[|f(x)-h(x)|]\,dx\leqslant\varepsilon.$$

$$\int_a^b M[|I_n(f,x)-I_m(f,x)|]\,dx \leqslant \frac{k}{2}\int_a^b M[|I_n(f-h,x)-I_m(f-h,x)|]\,dx +$$
$$\frac{k}{2}\int_a^b M[|I_n(h,x)-I_m(h,x)|]\,dx \leqslant \frac{k^2}{2}k(A)\int_a^b M[|f(x)-h(x)|]\,dx +$$
$$\frac{k}{2}\int_a^b M[|I_n(h,x)-I_m(h,x)|]\,dx.$$

Wird nun zuerst das erste rechtsstehende Integral durch eine entsprechende Wahl von $h(x)$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{k^2\,k(A)}$ gemacht, so kann man dann für $n, m > N(\varepsilon)$ das zweite rechtsstehende Integral unter $\frac{\varepsilon}{k}$ herabsetzen, so daß für $n, m > N(\varepsilon)$ das linksstehende Integral $< \varepsilon$ kommt.

Bemerkung. Man kann die Hilfssätze 1, 2, mit leicht verständlichen Veränderungen, auch für den Fall von mehreren unabhängigen Variablen aussprechen.

Als Anwendungsbeispiele mögen Folgen verschiedener, sog. singulärer Integrale genannt werden. Man kann z. B. für $K_n(x,t)$, a, b setzen:

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}}\,e^{-n\,(x-t)^2},\quad a=-c,\ b=+c;$$
$$\sqrt{\frac{n}{\pi}}\,\{1-(x-t)^2\}^n,\quad a=0,\ b=1;$$
$$\frac{1}{\pi}2^{2n-1}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\left(\cos\frac{x-t}{2}\right)^{2n},\quad a=-\pi,\ b=+\pi;$$

(de la Vallée Poussinsche Summationsmethode)

u. dgl. Für die überalldichte Menge H kann man in den angegebenen und analogen Beispielen die Menge der in $\langle a, b\rangle$ stetigen Funktionen nehmen[5]).

Man könnte natürlich auch analoge singuläre Integrale in mehreren Variablen betrachten.

Im Hilfssatze 2 kann statt für n auch ein stetiger Parameter r zugelassen werden, der gegen ein (endliches oder unendliches) r_0 strebt. Als Beispiel eines singulären Integrals, für welches in diesem Falle der Hilfssatz 2 anwendbar ist, wollen wir etwa

$$K_r(x,t) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos(x-t)+r^2},\quad 0 \leqslant r < 1,\quad r\to 1,$$
$$a=-\pi,\quad b=+\pi$$

nennen.

[5]) Vgl. dazu H. Hahn, Über die Darstellung gegebener Funktionen durch singuläre Integrale, I. Mitteilung, II. Mitteilung, Denkschriften d. Kais. Akad. der Wiss. Wien Bd. 93 (1916) p. 585—655 und p. 657—692.

Wir befassen uns hier mit dem Falle eines endlichen Definitionsintervalls; den entgegengesetzten Fall werden wir an anderer Stelle behandeln.

Es sei (L) ein Raum vom Typus (B) und es bezeichne $U(f)$ eine in (L) erklärte Operation, deren Wertevorrat auch diesem Raume angehören möge. Die Operation $U(f)$ heißt — bekanntlich — *linear*, falls sie: 1° additiv ist, d. h. $U(f_1+f_2) = U(f_1) + U(f_2)$ für $f_1 \in (L)$, $f_2 \in (L)$; 2° stetig ist. Ist (L) ein (L^M) so kommt die Stetigkeit der Operation $U(f)$ darauf hinaus, daß

$$\int_a^b M[|f_n(x)-f(x)|]\,dx \to 0 \quad \text{immer} \quad \int_a^b M[|U(f_n)-U(f)|]\,dx \to 0$$

nach sich zieht; diese Eigenschaft ist übrigens mit der Bedingung

$$\int_a^b M[|U(f)|]\,dx \leqslant A\int_a^b M[|f(x)|]\,dx$$

äquivalent.

Es seien jetzt zwei Funktionen $M_1[u]$, $M[u]-M_1[u]$ nicht schwächer als $M[u]$ — und eine lineare Operation $U(f)$, $f(x) \in (L^M)$, $U(f) \in (L^M)$ gegeben. Man nennt eine lineare Operation $V(f)$, $f(x) \in (L^{M_1})$, $V(f) \in (L^{M_1})$ eine *Erweiterung* der Operation $U(f)$, wenn für $f(x) \in (L^M)$ $U(f) = V(f)$ gilt. Ist $U(f)$ eine lineare Operation in (L^∞), deren Werte ebenso diesem Raume angehören, so nennt man auch jetzt $V(f)$ eine Erweiterung der Operation $U(f)$, falls $U(f) = V(f)$ für $f(x) \in (L^\infty)$.

Satz 1. *Sei $W(f)$ eine lineare, in (L^∞) erklärte Operation mit Werten aus (L^∞) und $U(f)$ eine lineare, in (L^1) erklärte Operation, mit Werten aus (L^1), die eine Erweiterung von $W(f)$ ist. Für jeden Raum (L^M) ist durch $W(f)$ sowie $U(f)$ eine lineare, in (L^M) erklärte Operation $V(f)$ mit Werten aus (L^M) so bestimmt, daß $V(f)$ eine Erweiterung der Operation $W(f)$ — und $U(f)$ eine Erweiterung der Operation $V(f)$ ist*[6]).

[6]) Man vgl. im Zusammenhang mit Satz 1 die Arbeit: M. Riesz, Sur les maxima des formes bilinéaires et sur les fonctionnelles linéaires, Acta Mathematica 49 (1926) p. 465—497, insb. p. 481.

Beweis. Sei $f(x)\in(L^1)$, $\{\varphi_i(x)\}$ das HAAR'sche Orthogonalsystem [7]); schreiben wir die Entwicklung der Funktion $U(f)$ nach dem HAAR'schen System

$$U(f)\sim\sum_{i=1}^{\infty}\int_a^b U(f)\varphi_i(t)\,dt\;\varphi_i(x). \tag{9}$$

Da wir, unserer Voraussetzung zufolge, die Integrale

$$\int_a^b U(f)\varphi_i(t)\,dt$$

als lineare Funktionale in (L^1) betrachten können, so existieren nach dem bekannten Satz von STEINHAUS über die Darstellung solcher Funktionale [8]), beschränkte Funktionen $\psi_i(x)$, so daß

$$\int_a^b U(f)\varphi_i(t)\,dt=\int_a^b f(t)\psi_i(t)\,dt, \qquad i=1,2,3\dots.$$

Die n-te Teilsumme der Entwicklung (9) kann man also in der Form

$$I_n(f,x)=\int_a^b f(t)K_n(x,t)\,dt, \qquad n=1,2,3\dots \tag{10}$$

hinschreiben, wo

$$K_n(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)\psi_i(t).$$

Wegen Stetigkeit der Operationen $W(f)$, $U(f)$ haben wir

$$\|W(f)\|_\infty\leqslant B\|f(x)\|_\infty;\quad \|U(f)\|_1\leqslant C\|f(x)\|_1\ ^{9)}; \tag{11}$$

wenden wir die bekannten Eigenschaften des HAAR'schen Orthogonalsystems [10]) an, so sehen wir, daß die Integrale (10) die folgenden Eigenschaften besitzen:

[7]) A. Haar, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, Math. Ann. 69 (1910) p. 331—371.

[8]) H. Steinhaus, Additive und stetige Funktionaloperationen, Math. Zeitschr. 5 (1918) p. 186—221; vgl. auch S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa (1932); s. insb. p. 64—65.

[9]) Mit $\|f(x)\|_\infty$, $\|f(x)\|_1$ bezeichnen wir die üblichen Normen in (L^∞) bezw. (L^1), d. h. es ist $\|f(x)\|_\infty=\underset{a<x<b}{\text{wes. Ob. Gr.}}|f(x)|$, $\|f(x)\|_1=\int_a^b|f(x)|\,dx$.

[10]) Siehe die unter [7]) zit. Arbeit und etwa die Arbeit: W. Orlicz, Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen, Studia Math. 1 (1929) p. 1—39; insb. p. 11, Satz 1.

1) $\|\int_a^b f(t)K_n(x,t)\,dt\|_\infty\leqslant\|W(f)\|_\infty\leqslant B\|f(x)\|_\infty$;

2) $\|\int_a^b f(t)K_n(x,t)\,dt\|_1\leqslant\|U(f)\|_1\leqslant C\|f(x)\|_1$;

3) für jede beschränkte Funktion $f(x)$ konvergiert (10) asymptotisch gegen $W(f)=U(f)$, also wegen 1) besteht (8) für $f(x)\in(L^\infty)$.

Wenden wir nun die übliche Schlußweise an: Ist D eine perfekte x-Menge, so daß alle $\varphi_i(x)$ auf D stetig sind, und setzen wir $f_x(t)=\operatorname{sign}K_n(x,t)$, so haben wir

$$\int_a^b f_x(t)\,K_n(x,t)\,dt=\int_a^b|K_n(x,t)|\,dt.$$

Für jeden Punkt der Menge D, in dem sie die Dichte 1 hat, also für fast jedes x von D, gilt nach 1) die Ungleichung (4) (wo $K(x,t)=K_n(x,t)$, $A=B$ zu setzen ist); da man aber für D eine Menge mit beliebig wenig von $b-a$ abweichendem Maß wählen kann, so gilt (4) fast überall. Ist weiter $h(x)\in(L^\infty)$, $f(x)\in(L^1)$, so haben wir nach 2)

$$\left|\int_a^b h(x)\,dx\int_a^b f(t)\,K_n(x,t)\,dt\right|=\left|\int_a^b f(t)I_n(t,h)\,dt\right|\leqslant C\|h(x)\|_\infty\|f(x)\|_1,$$

wo $I_n(t,h)=\int_a^b h(x)K_n(x,t)\,dx$ ist. Ist E die Menge derjenigen t, für welche $|I_n(t,h)|\geqslant\|I_n(t,h)\|_\infty-\varepsilon$, und setzen wir $f(t)=\frac{1}{|E|}\operatorname{sign}I_n(t,h)$ für $t\in E$, $f(t)=0$ für $t\in CE$, so besteht die Ungleichung $\|I_n(t,h)\|_\infty-\varepsilon\leqslant C\|f(x)\|_1\|h(x)\|_\infty\leqslant C\|h(x)\|_\infty$ und also $\|I_n(t,h)\|_\infty\leqslant C\|h(x)\|_\infty$. Daraus erhalten wir, durch eine der früheren analoge Schlußweise, die Ungleichung (4′) für fast jedes t.

Nach dem Vorangehenden und 3) sind die Voraussetzungen des Hilfssatzes 2 erfüllt (wo für A etwa die Konstante $\max(B,C)$ zu setzen ist); es gilt also (8) für $f(x)\in(L^M)$, woraus nach einem wohlbekannten Satze [11]) die Existenz eines einzigen

[11]) Siehe z. B.: St. Kaczmarz-L. Nikliborc, Sur les suites des fonctions convergentes en moyenne, Fund Math. 11 (1928), p. 151—168.

$V(f) \in (L^M)$ folgt, für welches die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b M[|I_n(f,x) - V(f)|]\,dx = 0$$

für $f(x) \in (L^M)$ gilt. Offensichtlich stellt $V(f)$ eine in (L^M) erklärte Operation mit dem Wertevorrat aus ebendemselben Raume dar. Ihre Stetigkeit folgt am einfachsten direkt aus der Ungleichung

$$\int_a^b M[|V(f_1 - f_2)|]\,dx \leqslant k(A) \int_a^b M[|f_1(x) - f_2(x)|]\,dx,$$

welche sich durch den Grenzübergang aus

$$\int_a^b M[|I_n(f_1 - f_2, x)|]\,dx \leqslant k(A) \int_a^b M[|f_1(x) - f_2(x)|]\,dx$$

ergibt; die zuletztgenannte Ungleichung ist dabei eine unmittelbare Folge von (5) für $I(f_1 - f_2, x) = I_n(f_1 - f_2, x)$. Da augenscheinlich $V(f)$ eine Erweiterung von $W(f)$ — und $U(f)$ eine Erweiterung von $V(f)$ ist, so ist unser Satz bewiesen.

Bemerkung. Man kann der Voraussetzung der Stetigkeit der Operation $W(f)$ entbehren. Die Stetigkeit der Operation $U(f)$ garantiert nämlich die Gültigkeit von (10); ist nun $W(f)$ als additiv vorausgesetzt, so folgt die Stetigkeit dieser Operation aus den folgenden Tatsachen: es ist für jede beschränkte Funktion $\| I_n(f,x) \|_\infty \leqslant B(f)$; für jede beschränkte Funktion $f(x)$ konvergiert $I_n(f,x)$ asymptotisch gegen $W(f)$.

Man kann den Satz 1, auch ohne daß man von Erweiterungen der Operationen spricht, unter Beachtung der obigen Bemerkung so formulieren:

Ist $U(f)$ eine lineare, in (L^1) erklärte Operation, mit Werten aus (L^1) und ordnet sie einer jeden beschränkten Funktion $f(x)$ wieder eine beschränkte Funktion $U(f)$ zu, so wird einer mit $M[u]$ integrierbaren Funktion $f(x)$ eine ebensolche Funktion $U(f)$ zugeordnet. Dabei ist $U(f)$, als eine Operation in (L^M) betrachtet, linear.

§ 2.

Als Beispiel einer Anwendung des vorigen Satzes werden wir hier einige Probleme aus der Theorie der Orthogonalentwicklungen behandeln. Mit $OS\{\varphi_i(x)\}$ bezeichnen wir stets im

folgenden ein in (a, b) definiertes Orthogonalsystem. Mit f_n bezeichnen wir die Koeffizienten der Entwicklung der Funktion $f(x)$ nach dem gegebenen Orthogonalsystem.

Seien (L_1), (L_2) zwei Funktionenräume; man sagt von einer Zahlenfolge $\{\lambda_i\}$, sie *führe den Raum* (L_1) *in den Raum* (L_2) *über*, wenn sie die folgende Eigenschaft besitzt:

Ist
$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i \varphi_i(x)$$
die Entwicklung einer Funktion $f(x) \in (L_1)$, so ist
$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f_i \varphi_i(x)$$
die Entwicklung einer Funktion $g(x) \in (L_2)$. Die Menge aller Zahlenfolgen $\{\lambda_i\}$, welche (L_1) in (L_2) überführen, bezeichnen wir mit (L_1, L_2). Jede Folge, die dieser Menge angehört, nennt man auch einen *Multiplikator* der Klasse (L_1, L_2).

Satz 2. *Das* $OS\{\varphi_i(x)\}$ *sei in* (L^1) *vollständig*, $\varphi_i(x)$ *seien beschränkt. Ist die Folge* $\{\lambda_i\}$ *ein Multiplikator der Klasse* (L^∞, L^∞), *so ist sie auch ein Multiplikator der Klasse* (L^M, L^M) [12]).

Beweis. Sei $\{\lambda_i\} \in (L^\infty, L^\infty)$; wird mit $W(f)$ diejenige Funktion $f(x) \in (L^\infty)$ bezeichnet, für welche

$$\int_a^b W(f)\varphi_i(x)\,dx = \lambda_i \int_a^b f(x)\varphi_i(x)\,dx$$

ist, so ist $W(f)$ wegen der Vollständigkeit des $OS\{\varphi_i(x)\}$ eindeutig bestimmt und stellt eine lineare Operation in (L^∞) dar [13]). Es ist $(L^\infty, L^\infty) = (L^1, L^1)$; erklären wir in (L^1) eine Operation $U(f)$ mit Werten aus (L^1) mit Hilfe der Bedingungen

[12]) In der unter [10]) zit. Arbeit des Verfassers wurden einige, die Multiplikatoren verschiedener Klassen betreffende Probleme behandelt. Vgl. insb. Satz 11, p. 23 dieser Arbeit; die dort gemachten, mehr einschränkenden Voraussetzungen über das $OS\{\varphi_i(x)\}$ haben sich nachher als unnötig erwiesen (siehe dazu: S. Kaczmarz, Sur les multiplicateurs des séries orthogonales, Studia Math. 4 (1933) p. 21—26; insb. Fußnote 2, Théorème 4). Satz 2 der vorliegenden Arbeit bildet offenbar eine Verallgemeinerung des erwähnten Satzes 11.

[13]) Dafür und folgendes vgl. die unter [10]) zit. Arbeit p. 22—24.

$$\int_a^b U(f)\,\varphi_i(x)\,dx = \lambda_i \int_a^b f(x)\,\varphi_i(x)\,dx$$

so erweist sich auch sie als linear, und da sie offenbar eine Erweiterung von $W(f)$ ist, so können wir den Satz 1 anwenden. Betrachten wir nun die Operation $V(f)$, von welcher im Satze 1 die Rede war; da für eine mit $M[u]$ integrierbare Funktion $f(x)$ offenbar $U(f) = V(f)$, so haben wir

$$\int_a^b V(f)\,\varphi_i(x)\,dx = \int_a^b U(f)\,\varphi_i(x)\,dx = \lambda_i \int_a^b f(x)\,\varphi_i(x)\,dx,$$

und mithin $\{\lambda_i\} \in (L^M, L^M)$.

Bemerkung. Da $W(f)$, $U(f)$ stetig sind, so gibt es zwei Konstanten B, C, mit welchen (11) stattfindet. Man beweist leicht, daß man in dem betrachteten Falle $B = C = A$ setzen kann, so daß

$$\|W(f)\|_\infty \leqslant A\|f(x)\|_\infty\,;\; \|U(f)\|_1 \leqslant A\|f(x)\|_1 .$$

Es ist also, wie aus dem Beweise des Satzes 1 hervorgeht,

$$\int_a^b M[|V(f)|]\,dx \leqslant k(A)\int_a^b M[|f(x)|]\,dx,$$

mit einer von $W(f)$, $U(f)$ unabhängigen Konstante $k(A)$.

Im Laufe ihrer Untersuchungen über die Summierbarkeit der Fourierschen Reihen haben die Herren E. Hille und J. D. Tamarkin gewisse Verallgemeinerungen der zeilenfiniten Summationsmethoden betrachtet. Diejenigen von ihnen eingeführten Transformationen, die speziell zur Summation der Fourierschen Reihen oder allgemeinen Orthogonalentwicklungen im Raume (L^α) (d. h. im Sinne des in (L^α) geltenden Konvergenzbegriffs) dienen sollten, haben sie als „(L^α) — effective" bezeichnet. Wir geben hier die Definitionen von Hille-Tamarkin[14]) wieder, mit dem einzigen Unterschiede, daß wir statt (L^α) gleich die Räume (L^M) betrachten.

[14]) Siehe: E. Hille-J. D. Tamarkin, On the Summability of Fourier Series II, Ann. of Math. (2) 34, (1933) p. 329—348; und derselben Verfasser: Addition to the paper: „On the summability of Fourier Series II", ebenda p. 602—605.

Es entspreche die Matrix (a_{mi}) einer Transformation $\mathfrak{A}$; die Transformation $\mathfrak{A}$ ist „(L^M) — *effective*", wenn sie die folgenden Eigenschaften besitzt:

a) für jedes m gibt es eine Funktion $\tau_m(f, x) \in (L^M)$, so daß

$$\tau_m(f, x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} a_{mi} f_i \varphi_i(x), \tag{12}$$

wobei f_i die Koeffizienten einer Funktion $f(x) \in (L^M)$ bezeichnen;

b) $$\lim_{m\to\infty} \int_a^b M[|\tau_m(f,x) - f(x)|]\,dx = 0, \tag{13}$$

für $f(x) \in (L^M)$.

Betrachten wir den Grenzfall (L^∞); die Transformation $\mathfrak{A}$ ist „(L^∞) — *effective*", wenn folgendes stattfindet:

a') für jedes m gibt es eine Funktion $\tau_m(f, x) \in (L^\infty)$, für welche (12) gilt, wobei f_i die Koeffizienten einer Funktion $f(x) \in (L^\infty)$ bezeichnen;

b') die Folge $\{\tau_m(f, x)\}$ konvergiert asymptotisch gegen $f(x)$:

$$\tau_m(f, x) \overset{\text{as}}{\to} f(x)$$

für jedes $f(x) \in (L^\infty)$;

c') es ist für $f(x) \in (L^\infty)$

$$\|\tau_m(f, x)\|_\infty \leqslant A(f).$$

Satz 3. *Das $OS\{\varphi_i(x)\}$ sei in (L^1) vollständig; $\varphi_i(x)$ seien beschränkt. Eine Transformation $\mathfrak{A}$ die „(L^∞) — effective" ist, ist auch „(L^M) — effective".*

Beweis. Da die Folge $\{a_{mi}\}$ $m = 1, 2, 3\ldots$ ein Multiplikator der Klasse (L^∞, L^∞) (L^1, L^1) ist, so bestehen nach der Bemerkung zu Satz 2 die Ungleichungen

$$\|\tau_m(f,x)\|_1 \leqslant A_m\|f(x)\|_1;\; \|\tau_m(f,x)\|_\infty \leqslant A_m\|f(x)\|_\infty,$$

wo $\tau_m(f,x)$ diejenige Funktion aus (L^1) bezw. (L^∞) bezeichne, die durch (12) für $f(x) \in (L^1)$ bezw. $f(x) \in (L^\infty)$ erklärt wurde. Wenn $f(x)$ mit $M[u]$ integrierbar ist (also erst recht integrierbar ist), alsdann haben wir nach Satz 2 $\tau_m(f,x) \in (L^M)$ und

$$\int_a^b M[|\tau_m(f,x)|]\,dx \leqslant k(A_m)\int_a^b M[|f(x)|]\,dx.$$

Da aber aus der Eigenschaft c′) der Transformation $\mathfrak{A}$ die Existenz einer Konstante A folgt, für welche $A_m \leqslant A$, da weiter nach b′), c′) der Grenzwert (13) für jede beschränkte Funktion existiert, so muß (13) für jede Funktion $f(x) \in (L^M)$ gelten. Dies sieht man sofort ein, wenn man eine analoge Schlußweise, wie bei dem Beweise des Satzes 1, anwendet.

(Reçu par la Rédaction le 20. 4. 1935).