

## Über die Abplattung der homogenen Gleichgewichtsfiguren rotierender, gravitierender Flüssigkeiten III<sup>1)</sup>

von

W. NIKLIBORC (Lwów).

Ich habe vor einigen Jahren Untersuchungen begonnen, die dem Problem der Abplattung der Gleichgewichtsfiguren gewidmet waren.

Es sei  $T$  eine Gleichgewichtsfigur einer homogenen Flüssigkeit, die mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die  $z$ -Achse rotiert. Der Schwerpunkt von  $T$  liegt auf der  $z$ -Achse. Wird er speziell zum Koordinatenursprung gewählt, so ist die Ebene  $z = 0$  eine Symmetrieebene von  $T$ <sup>2)</sup>. Es sei  $b$  das Maximum der Koordinate  $z$  in  $T$ . Es wird mindestens in einem Punkte  $P$  erreicht und es seien  $(\beta, \gamma, b)$  die Koordinaten dieses „Höchstpunktes“. Es sei weiter  $a$  diejenige kleinste positive Zahl, so daß  $T$  im Zylinder

$$(x - \beta)^2 + (y - \gamma)^2 \leq a^2$$

ganz enthalten ist. Die Größe  $\frac{b}{a}$  bezeichne ich als Abplattung der Gleichgewichtsfigur  $T$ .

Das Problem der Abschätzung der Größe  $\frac{b}{a}$  wurde zunächst von H. S. MAZURKIEWICZ<sup>3)</sup> angegriffen, worauf sich unmittelbar

---

<sup>1)</sup> Unter demselben Titel erschienen in der Mathematischen Zeitschrift zwei von dem Verfasser herrührende Arbeiten, Math. Zeitschr. 34 (1931) S. 74—90 und 36 (1933) S. 655—676.

<sup>2)</sup> L. Lichtenstein, Über einige Eigenschaften der Gleichgewichtsfiguren rotierender homogener Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen, Sitzungsber. der Preuß. Akad. der Wiss. (1918) Erster Halbbd. S. 1120—1135.

<sup>3)</sup> Zur Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender, homogener Flüssigkeiten, Math. Zeitschr. 25 (1926) S. 749—753.

eine kurze Bemerkung des H. E. HÖLDER<sup>4)</sup> angeschlossen hat. Bezüglich dieser Arbeiten sei auf die Fußnoten <sup>3)</sup> und <sup>4)</sup> meiner ersten unter <sup>1)</sup> zitierten Arbeit verwiesen.

In meiner ersten, unter demselben Titel, wie oben, erschienenen Arbeit habe ich wesentlich einschränkende Voraussetzungen über  $T$  gemacht, und zwar, nicht nur daß  $T$  eine Rotationsfigur ist, sondern auch daß die Meridiankurve von  $T$  im Halbraume  $z > 0$  monoton verläuft. Unter diesen Bedingungen erzielte ich damals die Abschätzung

$$\frac{b}{a} < 10.$$

In dem zweiten, demselben Gegenstande gewidmeten Aufsätze habe ich die Gleichgewichtsfiguren, deren Höchstpunkt auf der Rotationsachse liegt, zugrunde gelegt. Offenbar war es eine Verallgemeinerung der in der ersten Arbeit betrachteten Figuren. Ich bewies damals, daß

$$\frac{b}{a} < 5$$

gilt.

*In der vorliegenden Abhandlung mache ich keine einschränkende Voraussetzungen und betrachte den allgemeinsten Fall, d. h. eine beliebige Gleichgewichtsfigur.*

*Ich werde beweisen, daß*

$$\frac{b}{a} < \sqrt{20}$$

gilt.

Ich muß noch hervorheben, daß es bei der angewandten Methode möglich war, ein noch ein wenig besseres Resultat zu erzielen, worauf ich, um umfangreiche Rechnungen zu vermeiden, nicht näher eingegangen bin. Jedenfalls aber scheint es nicht möglich zu sein, eine bessere Abschätzung als  $\frac{b}{a} < 2\sqrt{3}$  auf diesem Wege ohne weiteres zu bekommen.

Ich bemerke noch folgendes: Die Idee des Beweises ist im allgemeinen dieselbe wie früher; methodisch aber gestaltet sich der vorliegende Beweis viel einfacher, als die früheren. Die Arbeit kann auch unabhängig von den beiden ersten Abhandlungen gelesen werden, abgesehen a) vom § 1 der ersten Arbeit, wo

<sup>4)</sup> Bemerkung zu der vorstehenden Arbeit von Herrn Mazurkiewicz, Math. Zeitschr. 25 (1926) S. 754.

eine Reihenentwicklung für Volumpotentiale abgeleitet wird, welche auch hier zur Anwendung gelangt, und b) vom § 2 der zweiten Arbeit, wo ein Hilfssatz bewiesen wird, welcher auch hier verwertet wird.

### § 1.

Es sei  $T$  eine beliebige Gleichgewichtsfigur einer homogenen Flüssigkeit, die mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die  $z$ -Achse rotiert und deren Teilchen nach dem Newtonschen Gesetz einander anziehen. Wir bezeichnen mit  $S$  den Rand von  $T$ . Natürlich kann  $S$  auch aus mehreren Komponenten bestehen.

Es seien  $A$  und  $M$  zwei beliebige Punkte im Raume,  $r_{AM}$  die Distanz derselben. Wir setzen

$$V(A) = \int_T \frac{d\tau_M}{r_{AM}},$$

wobei die (räumliche) Integration über das Gebiet  $T$  zu erstrecken ist und  $d\tau_M$  das Volumelement von  $T$  im Punkte  $M$  bedeutet.

Bezeichnet man nun mit  $\kappa$  die Gravitationskonstante, mit  $f$  die (konstante) Dichte von  $T$  und mit  $(x, y, z)$  die Koordinaten von  $A$ , so gilt bekanntlich am Rande  $S$  die Gleichung

$$(1) \quad \kappa f \cdot V(A) + \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) = C.$$

Die Konstante  $C$  kann auf verschiedenen Komponenten von  $S$  verschiedene Werte haben.

Es sei jetzt  $P$  der „Höchstpunkt“ der Gleichgewichtsfigur. Seine Koordinaten seien mit  $(\beta, \gamma, b)$  bezeichnet. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit

$$\beta \geq 0, \gamma = 0, b > 0,$$

voraussetzen.

Wir betrachten jetzt einen Zylinder

$$(2) \quad (x - \beta)^2 + y^2 \leq a^2,$$

in welchem  $T$  ganz enthalten ist, und wählen für  $a$  den möglichst kleinen, dieser Bedingung genügenden Wert.

Demnach liegt  $T$  in dem durch die Ungleichheiten

$$(3) \quad (x - \beta)^2 + y^2 \leq a^2, \quad |z| \leq b$$

erklärten abgeschlossenen Bereiche.

Es sei weiter  $\zeta$  irgendeine den Bedingungen

$$0 < \zeta < b$$

genügende Zahl. Wir betrachten den in der Ebene  $z = \zeta$  durch die Ungleichung  $x \geq \beta$  erklärten Teil derselben und bezeichnen mit  $C$  die dieser Halbebene und dem Rande  $S$  gemeinsamen Punkte. Die Menge  $C$  ist abgeschlossen und es gibt demnach in  $C$  einen derartigen Punkt  $Q$  ( $\xi, \eta, \zeta$ ), welcher vom Punkte  $P'$  ( $\beta, 0, \zeta$ ) die kleinste Entfernung besitzt. Wir setzen

$$(4) \quad + \sqrt{(\xi - \beta)^2 + \eta^2} = \rho.$$

Den von LICHTENSTEIN<sup>5)</sup> bewiesenen Eigenschaften der Gleichgewichtsfiguren zufolge liegt der durch die Ungleichheiten

$$(5) \quad \begin{cases} \beta \leq x \\ (x - \beta)^2 + y^2 \leq \rho^2 \\ |z| \leq \zeta \end{cases}$$

erklärte abgeschlossene Bereich  $T_1$  gewiß in  $T$ . Die Punkte  $P$  und  $Q$  gehören demnach einer und derselben Komponente von  $S$  an, so daß wegen (1)

$$xfV(P) + \frac{\omega^2}{2}\beta^2 = xfV(Q) + \frac{\omega^2}{2}(\xi^2 + \eta^2)$$

gilt.

Wegen  $\xi \geq \beta$  ist demnach

$$(6) \quad 0 \leq \frac{\omega^2}{2}(\xi^2 + \eta^2 - \beta^2) = xf\{V(P) - V(Q)\}.$$

## § 2.

Den Eigenschaften der Gleichgewichtsfiguren zufolge ist die Ebene  $z = 0$  eine Symmetrieebene von  $T$ . Wir bezeichnen mit  $T'$  den im Halbraume  $z \geq 0$  liegenden Teil von  $T$  und ebenso mit  $S'$  den in demselben Halbraume liegenden Teil von  $S$ .

Da nun jede zur  $z$ -Achse parallele Gerade den Rand  $S$  höchstens in zwei Punkten treffen kann<sup>6)</sup>, so läßt sich die Gleichung von  $S'$  gewiß auf die Form

$$z = f(x, y) \geq 0$$

bringen. Dabei ist  $f(x, y)$  in einer im Kreise (2) liegenden Punktmenge  $D$  erklärt.  $D$  kann natürlich aus mehreren einfach oder

<sup>5)</sup> Loc. cit.

<sup>6)</sup> Lichtenstein l. c.

mehrfach zusammenhängenden Gebieten bestehen. Wir erweitern nun nötigenfalls das Definitionsgebiet von  $f(x, y)$  auf den ganzen durch (2) erklärten Kreis  $K(a)$ , indem wir außerhalb  $D$  und in  $K(a)$   $f(x, y) = 0$  setzen. Auf diese Weise wird  $f(x, y)$  im ganzen Kreise  $K(a)$  erklärt und zwar als stetige Funktion. Nun ist die Punktmenge  $T + S$  durch die Ungleichheiten

$$\begin{cases} (x - \beta)^2 + y^2 \geq a^2 \\ -f(x, y) \leq z \leq f(x, y) \end{cases}$$

vollkommen bestimmt.

Es ist also:

$$V(A) = \int_V \frac{dV_M}{r_{AM}} = \iint_{K(a)} \int_{-f(x,y)}^{+f(x,y)} \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} dz \} dx dy$$

oder nach der inneren Integration

$$(7) \quad V(A) = \iint_{K(a)} \log \frac{f - \zeta + \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}{-f - \zeta + \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} dx dy,$$

wobei unter dem Integralzeichen  $f = f(x, y)$  gesetzt werden soll.

Nach (6) und (7) ist dann

$$0 \leq V(P) - V(Q) = \iint_{K(a)} \log \left\{ \frac{f - b + \sqrt{(x-\beta)^2 + y^2 + (f-b)^2}}{-f - b + \sqrt{(x-\beta)^2 + y^2 + (f+b)^2}} \cdot \frac{-f - \zeta + \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (f+\zeta)^2}}{f - \zeta + \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (f-\zeta)^2}} \right\} dx dy.$$

Bezeichnet man die unter dem Integralzeichen stehende Funktion kurz mit  $u(f)$ , so ist

$$(8) \quad 0 \leq V(P) - V(Q) = \iint_{K(a)} u[f(x, y)] dx dy.$$

Wir betrachten jetzt den Ausdruck  $u(f)$  als Funktion des Parameters  $f$ . Im § 2 der zweiten unter<sup>1)</sup> zitierten Abhandlung habe ich bewiesen, daß die Funktion  $u(f)$  im Innern von  $(0, b)$  kein Maximum besitzt. Demnach ist in  $(0, b)$

$$u(f) \leq \text{Max} \{u(0), u(b)\}.$$

Natürlich sind die Zahlen  $u(0)$  und  $u(b)$  noch von  $x$  und  $y$  abhängig und wir müssen für ein gegebenes  $(x, y)$  entscheiden, ob

$$u(0) \leq u(b)$$

gilt.

Dies führt uns zunächst auf die Untersuchung der Kurve

$$(9) \quad u(0) = u(b)$$

zurück. Diesem Gegenstande werden die §§ 4 und 5 gewidmet, während im § 3 ein Hilfssatz bewiesen wird, welcher im § 5 verwendet wird.

### § 3.

Hilfssatz. Sind  $\varrho, u, a, b, \zeta$ , irgendwelche den Ungleichheiten

$$(10) \quad 0 \leq \varrho \leq u \leq a \leq \frac{b}{2\sqrt{3}}$$

$$(11) \quad 0 \leq \zeta \leq \sqrt{b^2 - \frac{3}{2}(a^2 + \sqrt{a^4 + 4a^2b^2})}$$

genügende Zahlen, so gilt:

$$(12) \quad u\varrho + \frac{\varrho^2}{2} - \frac{u}{u + \sqrt{u^2 + 4b^2}}(b^2 - \zeta^2) \leq 0.$$

Beweis. Zunächst beweisen wir, daß aus (10) die Ungleichheit  $b^2 - \frac{3}{2}(a^2 + \sqrt{a^4 + 4a^2b^2}) \geq 0$  folgt. In der Tat:

$$b^2 - \frac{3}{2}(a^2 + \sqrt{a^4 + 4a^2b^2}) = \frac{(b^2 - \frac{3}{2}a^2)^2 - \frac{9}{4}(a^4 + 4a^2b^2)}{b^2 - \frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{2}\sqrt{a^4 + 4a^2b^2}}.$$

Hieraus folgt

$$\text{sign} \left\{ b^2 - \frac{3}{2}(a^2 + \sqrt{a^4 + 4a^2b^2}) \right\} = \text{sign} \left\{ (b^2 - \frac{3}{2}a^2)^2 - \frac{9}{4}(a^4 + 4a^2b^2) \right\} = \text{sign} (b^2 - 12a^2) = +1.$$

Demnach wurde bewiesen, daß die Ungleichheit (11) überhaupt einen Sinn haben kann.

Wir setzen jetzt

$$u\varrho + \frac{\varrho^2}{2} + \frac{u}{u + \sqrt{u^2 + 4b^2}}(\zeta^2 - b^2) = \psi(u, \varrho, \zeta)$$

und wollen beweisen, daß aus (10) und (11)

$$\psi(u, \varrho, \zeta) \leq 0$$

folgt, wodurch natürlich der Hilfssatz bewiesen werden wird. Nun ist  $\psi(u, \varrho, \zeta)$  eine wachsende Funktion von  $\zeta$  (für  $\zeta \geq 0$ ), so daß aus (11)

$$\psi(u, \varrho, \zeta) < \psi \left[ u, \varrho, \sqrt{b^2 - \frac{3}{2}(a^2 + \sqrt{a^4 + 4a^2b^2})} \right] = u\varrho + \frac{\varrho^2}{2} - \frac{3}{2} \frac{u}{u + \sqrt{4b^2 + u^2}} (a^2 + \sqrt{a^4 + 4a^2b^2})$$

folgt. Wegen (10) ist dann weiter

$$\psi(u, \varrho, \zeta) < \frac{3}{2} u^2 - \frac{u}{u + \sqrt{4b^2 + u^2}} \cdot (a^2 + \sqrt{a^4 + 4a^2b^2}) = \frac{3}{2} u \frac{u^2 - a^2 + u\sqrt{4b^2 + u^2} - a\sqrt{4b^2 + a^2}}{u + \sqrt{u^2 + 4b^2}}.$$

Der Zähler des letzten Bruches ist eine wachsende Funktion von  $u$ , und da er für  $u = a$  gleich Null wird, so folgt hieraus,

$$\psi(u, \varrho, \zeta) \leq 0,$$

w. z. b. w.

Zusatz. Sind  $\varrho, u, a, b, \zeta$  irgendwelche den Ungleichheiten

$$(13) \quad 0 \leq \varrho \leq u \leq a \leq \frac{b}{\sqrt{20}}$$

$$(14) \quad 0 \leq \zeta \leq \frac{b}{2}$$

genügende Zahlen, so gilt auch (12).

Wegen  $\frac{b}{\sqrt{20}} \leq \frac{b}{2\sqrt{3}}$  genügt es natürlich zu beweisen, daß

$$(15) \quad \frac{b}{2} \leq \sqrt{b^2 - \frac{3}{2}(a^2 + \sqrt{a^4 + 4a^2b^2})}$$

ist. Aus (13), (14), (15) und  $\frac{b}{\sqrt{20}} \leq \frac{b}{2\sqrt{3}}$  folgt dann (10) und (11) also auch (12). Nun aber kann man sich von der Richtigkeit der Formel (15) für  $\sqrt{20} \leq \frac{b}{a}$  sofort überzeugen.

### § 4.

Wir wollen jetzt die Kurve (9) untersuchen. Wegen

$$u(0) = \log 1 = 0$$

$$u(b) = \log \left\{ \frac{\sqrt{(x-\rho)^2 + y^2}}{-2b + \sqrt{(x-\rho)^2 + y^2 + 4b^2}} \cdot \frac{-b - \zeta + \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (b+\zeta)^2}}{b - \zeta + \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (b-\zeta)^2}} \right\}$$

folgt dann aus (9):

$$(16) \quad \frac{\frac{\sqrt{(x-\beta)^2+y^2}}{-2b+\sqrt{(x-\beta)^2+y^2+4b^2}} \cdot \frac{-b-\zeta+\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(b+\zeta)^2}}{b-\zeta+\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(b-\zeta)^2}}}{1} = 1.$$

Um die Kurve (9) näher zu untersuchen, führen wir den Parameter  $t$  ein, indem wir

$$(17) \quad \frac{\frac{\sqrt{(x-\beta)^2+y^2}}{-2b+\sqrt{(x-\beta)^2+y^2+4b^2}}}{\frac{b-\zeta+\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(b-\zeta)^2}}{-b-\zeta+\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(b+\zeta)^2}}} = \frac{1}{t}$$

setzen.

Aus (17) folgt nun

$$t = \frac{-2b + \sqrt{(x-\beta)^2 + y^2 + 4b^2}}{\sqrt{(x-\beta)^2 + y^2}} = \frac{\sqrt{(x-\beta)^2 + y^2}}{2b + \sqrt{(x-\beta)^2 + y^2 + 4b^2}},$$

so daß die für  $t$  zulässigen Werte gewiß im Intervalle  $[0, 1]$  liegen.

Schreibt man die Gleichung (16) in der Gestalt

$$\frac{\frac{2b + \sqrt{(x-\beta)^2 + y^2 + 4b^2}}{\sqrt{(x-\beta)^2 + y^2}} \cdot \frac{-b-\zeta+\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(b+\zeta)^2}}{b-\zeta+\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(b-\zeta)^2}}}{1} = 1,$$

so sieht man sofort, daß man

1° für  $x = \beta$ ,  $y = 0$  einen Widerspruch bekommt, d. h. daß der Punkt  $(\beta, 0)$  auf der Kurve (9) nicht liegen kann,

2° daß für  $x = \xi$ ,  $y = \eta$  dasselbe gilt.

Bei der Auflösung der Gleichungen (17) kann man demnach ruhig

$$(18) \quad R_1 = \sqrt{(x-\beta)^2 + y^2} \neq 0$$

$$(19) \quad R_2 = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \neq 0$$

voraussetzen.

Nun bekommt man unter Benutzung von (18) und (19) aus (17):

$$\frac{-2b + \sqrt{R_1^2 + 4b^2}}{-b - \zeta + \sqrt{R_2^2 + (b + \zeta)^2}} = t R_1 \quad \left[ b - \zeta + \sqrt{R_2^2 + (b - \zeta)^2} \right].$$

Löst man diese Gleichungen in bezug auf  $R_1$  und  $R_2$  auf, so gilt wegen (18) und (19):

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} R_1^2 = \frac{16b^2 t^2}{(1-t^2)^2} \\ R_2^2 = \frac{4t}{(1-t^2)^2} [(1+t)b^2 - (1-t)^2 \zeta^2]. \end{array} \right.$$

Beachtet man jetzt, daß

$$\left. \begin{array}{l} (x-\beta)^2 + y^2 = R_1^2 \\ (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 = R_2^2 \end{array} \right\}$$

gilt, so folgt hieraus

$$(21) \quad \left\{ \begin{array}{l} x - \beta + \frac{L(\xi - \beta) \mp \eta \sqrt{R_1^2 \varrho^2 - L^2}}{\varrho^2} \\ y = \frac{L\eta \pm (\xi - \beta) \sqrt{R_1^2 \varrho^2 - L^2}}{\varrho^2} \end{array} \right.$$

wobei  $\varrho$  durch (4) erklärt ist, und

$$(22) \quad L = \frac{1}{2} (R_1^2 - R_2^2 + \varrho^2)$$

zur Abkürzung gesetzt wurde.

Setzt man noch in (21) für  $R_1$  und  $R_2$  die aus (20) sich ergebenden Ausdrücke, so bekommt man die Parameterdarstellung der Kurve (9).

Zunächst berechnet man  $L$ :

$$(23) \quad 2L = R_1^2 - R_2^2 + \varrho^2 = \varrho^2 - \frac{4t}{(1+t)^2} (b^2 - \zeta^2)$$

und auf diese Weise bekommt man den Satz:

Die Parameterdarstellung der Kurve (9) ist durch die Formeln (21) gegeben. Für  $\varrho$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $L$  sind die durch (4), (20) und (23) festgesetzten Ausdrücke hineinzutragen. Zulässige Werte für  $t$  liegen im Intervalle  $[0, 1]$ .

## § 5.

Wir wollen jetzt die Schnittpunkte der Kurve (9) mit dem Kreise  $K(u)$ :

$$(x-\beta)^2 + y^2 = u^2$$

bestimmen. Wegen (18) und (20) bekommen wir dafür die Bedingung

$$\frac{4bt}{1-t^2} = u = R_1,$$

woraus wegen  $t > 0$

$$(24) \quad t = \tau = \frac{-2b + \sqrt{4b^2 + R_1^2}}{R_1}$$

folgt. Setzt man in den Parametergleichungen unserer Kurve für  $t$  den Wert  $\tau$  ein, so bekommt man die Schnittpunkte derselben mit dem Kreise  $K(u)$ . Wird eine der Zahlen  $x(\tau)$ ,  $y(\tau)$  nicht reell, so wird der entsprechende Punkt imaginär und die Kurve (9) wird keine (reellen) Schnittpunkte mit dem Kreise  $K(u)$  aufweisen. Man hat dafür die Bedingung

$$R_1^2 \varrho^2 - L^2 < 0$$

oder wegen  $R_1 = u$

$$(25) \quad (u\varrho - L)(u\varrho + L) < 0$$

(natürlich ist in  $L$  auch  $t = \tau$  zu setzen).

Es ist nun

$$\tau = \frac{-2b + \sqrt{4b^2 + u^2}}{u}$$

und

$$L(\tau) = \frac{\varrho^2}{2} - \frac{2\tau}{(1+\tau)^2} (b^2 - \zeta^2).$$

Es ist weiter

$$\frac{\tau}{(1+\tau)^2} = \frac{\frac{-2b + \sqrt{4b^2 + u^2}}{u}}{\left(1 + \frac{-2b + \sqrt{4b^2 + u^2}}{u}\right)^2} = \frac{u}{2} \cdot \frac{1}{u + \sqrt{u^2 + 4b^2}},$$

woraus

$$(26) \quad L(\tau) = \frac{\varrho^2}{2} - \frac{u}{u + \sqrt{4b^2 + u^2}} (b^2 - \zeta^2)$$

folgt.

Es ist also

$$u\varrho - L = u\varrho - \frac{\varrho^2}{2} + \frac{u}{u + \sqrt{4b^2 + u^2}} (b^2 - \zeta^2)$$

$$u\varrho + L = u\varrho + \frac{\varrho^2}{2} - \frac{u}{u + \sqrt{4b^2 + u^2}} (b^2 - \zeta^2)$$

und die Bedingung für die Existenz der reellen Schnittpunkte der Kurve (9) mit dem Kreise  $K(u)$  lautet:

$$(27) \quad \left(u\varrho - \frac{\varrho^2}{2} + \frac{u}{u + \sqrt{4b^2 + u^2}}\right) \left(u\varrho + \frac{\varrho^2}{2} - \frac{u}{u + \sqrt{4b^2 + u^2}}\right) > 0.$$

Es sei jetzt insbesondere

$$(28) \quad \varrho \leq u \leq a.$$

Wegen  $u\varrho - \frac{\varrho^2}{2} \geq \varrho^2 - \frac{\varrho^2}{2} = \frac{\varrho^2}{2}$  ist die erste Klammer in (27) positiv und die Bedingung (27) nimmt die einfachere Gestalt

$$(29) \quad u\varrho + \frac{\varrho^2}{2} + \frac{u}{u + \sqrt{4b^2 + u^2}} (b^2 - \zeta^2) > 0$$

an.

Wir haben somit das folgende Ergebnis:

Für  $u$ , welche der Ungleichheit (28) genügen, ist die Formel (29) eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz der reellen Schnittpunkte der Kurve (9) mit dem Kreise  $K(u)$ .

Verbindet man diesen Satz mit dem im § 3 bewiesenen Hilfssatze zusammen, so folgt sofort der

Satz. Sind  $\varrho$ ,  $u$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\zeta$  irgendwelche den Ungleichheiten (10) und (11) genügende Zahlen, so weist die Kurve (9) keine reellen Schnittpunkte mit dem Kreise  $K(u)$  auf.

Zusatz. Die vorstehende Behauptung ist auch dann richtig, wenn  $\varrho$ ,  $u$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\zeta$  den Ungleichungen (13) und (14) genügen.

## § 6.

Aus dem zuletzt bewiesenen Satze folgt gleich nachstehendes: Bezeichnet man mit  $K(a) - K(\varrho)$  die Gesamtheit derjenigen Punkte, welche außerhalb  $K(\varrho)$  aber in  $K(a)$  liegen, so ist festgestellt worden, daß die Kurve (9) ganz außerhalb des Kreisringes  $K(a) - K(\varrho)$  verläuft. Demnach ist aber in  $K(a) - K(\varrho)$  entweder stets

$$u(0) > u(b),$$

oder stets

$$u(0) < u(b).$$

Um nun festzustellen, welche Ungleichung tatsächlich zutrifft, genügt es nur  $u(b)$  in einem Punkte zu berechnen und dann mit der Zahl  $u(0) = 0$  zu vergleichen. Nun sieht man aber sofort, daß wenn  $x$  gegen  $\xi$  und  $y$  gegen  $\eta$  konvergiert, so konvergiert  $u(b)$  gegen  $-\infty$ . Demnach ist in  $K(a) - K(\varrho)$

$$u(b) < u(0) = 0$$

und wir bekommen den

Satz. Liegt  $(x, y)$  im Kreisringe  $K(a) - K(\varrho)$  und ist

$$0 \leq f(x, y) \leq b$$

so ist (falls  $\zeta$  der Ungleichung (11) genügt)

$$u(f) \leq 0.$$

Aus (8) und

$$0 \leq V(P) - V(Q) = \iint_{K(\varrho)} u[f(x, y)] dx dy + \iint_{K(a) - K(\varrho)} u[f(x, y)] dx dy$$

folgt dann ohne weiteres:

$$0 \leq V(P) - V(Q) \leq \iint_{K(\varrho)} u[f(x, y)] dx dy.$$

Wegen

$$\iint_{K(\varrho)} \left\{ \int_{-f(x, y)}^{+f(x, y)} \left( \frac{1}{r_{PM}} - \frac{1}{r_{QM}} \right) dz \right\} dx dy = \iint_{K(\varrho)} u[f(x, y)] dx dy$$

ist also

$$(31) \quad 0 \leq V(P) - V(Q) \leq \iint_{K(\varrho)} \left\{ \int_{-f(x, y)}^{+f(x, y)} \left( \frac{1}{r_{PM}} - \frac{1}{r_{QM}} \right) dz \right\} dx dy.$$

### § 7.

Wir bezeichnen mit  $K_1(\varrho)$  und  $K_2(\varrho)$  die durch die Ungleichheit  $x \leq \beta$  bzw.  $x \geq \beta$  bestimmten Halbkreise von  $K(\varrho)$ . Wegen (31) ist dann gewiß

$$0 \leq V(P) - V(Q) \leq \iint_{K_1(\varrho)} \left\{ \int_{-f(x, y)}^{+f(x, y)} \frac{dz}{r_{PM}} \right\} dx dy + \iint_{K_2(\varrho)} \left\{ \int_{-f(x, y)}^{+f(x, y)} \left( \frac{1}{r_{PM}} - \frac{1}{r_{QM}} \right) dz \right\} dx dy,$$

also umso mehr

$$0 \leq V(P) - V(Q) \leq \iint_{K_1(\varrho)} \left\{ \int_{-b}^{+b} \frac{dz}{r_{PM}} \right\} dx dy + \iint_{K_2(\varrho)} \left\{ \int_{-f(x, y)}^{+f(x, y)} \left( \frac{1}{r_{PM}} - \frac{1}{r_{QM}} \right) dz \right\} dx dy.$$

Da nun in  $K_2(\varrho)$  gewiß  $f(x, y) \geq \zeta$  gilt (vgl. § 1, wo bewiesen wurde, daß der Bereich (5),  $T_1$  genannt, gewiß in  $T$  ent-

halten ist), so wollen wir diese Ungleichheit auf die folgende Gestalt bringen:

$$(32) \quad 0 \leq V(P) - V(Q) \leq \iint_{K_1(\varrho)} \left\{ \int_{-b}^{+b} \frac{dz}{r_{PM}} \right\} dx dy + \iint_{K_2(\varrho)} \left\{ \int_{-\zeta}^{+\zeta} \left( \frac{1}{r_{PM}} - \frac{1}{r_{QM}} \right) dz \right\} dx dy + \iint_{K_2(\varrho)} \left\{ \int_{+\zeta}^{+f(x, y)} \left( \frac{1}{r_{PM}} - \frac{1}{r_{QM}} \right) dz \right\} dx dy + \iint_{K_2(\varrho)} \left\{ \int_{-f(x, y)}^{-\zeta} \left( \frac{1}{r_{PM}} - \frac{1}{r_{QM}} \right) dz \right\} dx dy.$$

Wegen

$$\iint_{K_2(\varrho)} \left\{ \int_{\zeta}^{f(x, y)} \left( \frac{1}{r_{PM}} - \frac{1}{r_{QM}} \right) dz \right\} dx dy \leq \iint_{K_2(\varrho)} \left\{ \int_{\zeta}^{f(x, y)} \frac{dz}{r_{PM}} \right\} dx dy \leq \iint_{K_2(\varrho)} \left\{ \int_{\zeta}^b \frac{dz}{r_{PM}} \right\} dx dy$$

und

$$\iint_{K_2(\varrho)} \left\{ \int_{-f(x, y)}^{-\zeta} \left( \frac{1}{r_{PM}} - \frac{1}{r_{QM}} \right) dz \right\} dx dy \leq \iint_{K_2(\varrho)} \left\{ \int_{-f(x, y)}^{-\zeta} \frac{1}{r_{PM}} dz \right\} dx dy \leq \iint_{K_2(\varrho)} \left\{ \int_{-b}^{-\zeta} \frac{dz}{r_{PM}} \right\} dx dy,$$

bekommt man aus (32)

$$(33) \quad 0 \leq V(P) - V(Q) \leq \iint_{K_1(\varrho)} \left\{ \int_{-b}^{+b} \frac{dz}{r_{PM}} \right\} dx dy + \iint_{K_2(\varrho)} \left\{ \int_{-\zeta}^{+\zeta} \left( \frac{1}{r_{PM}} - \frac{1}{r_{QM}} \right) dz \right\} dx dy + \iint_{K_2(\varrho)} \left\{ \int_{\zeta}^b \frac{dz}{r_{PM}} \right\} dx dy + \iint_{K_2(\varrho)} \left\{ \int_{-b}^{-\zeta} \frac{dz}{r_{PM}} \right\} dx dy = \iint_{T_1'} \frac{dr_M}{r_{PM}} - \iint_{K_2(\varrho)} \left\{ \int_{-\zeta}^{+\zeta} \frac{dz}{r_{QM}} \right\} dx dy,$$

wo  $T_0'$  den Bereich:  $(x - \beta)^2 + y^2 \leq \varrho^2$ ,  $|z| \leq b$ , bedeutet.

Nun ist aber

$$\iint_{K_2(\varrho)} \left\{ \int_{-\zeta}^{+\zeta} \frac{dz}{r_{QM}} \right\} dx dy > \iint_{K_1(\varrho)} \left\{ \int_{-\zeta}^{+\zeta} \frac{dz}{r_{QM}} \right\} dx dy,$$

woraus wegen

$$\iint_{K_2(\varrho)} + \iint_{K_1(\varrho)} = \iint_{K(\varrho)}$$

die Ungleichheit

$$(34) \quad \iint_{K_2(\varrho)} \left\{ \int_{-\zeta}^{+\zeta} \frac{dz}{r_{QM}} \right\} dx dy > \frac{1}{2} \iint_{K(\varrho)} \left\{ \int_{-\zeta}^{+\zeta} \frac{dz}{r_{QM}} \right\} dx dy$$

folgt.

Aus (33) und (34) folgt schließlich:

$$(35) \quad 0 \leq V(P) - V(Q) \leq \int_{T_0'} \frac{d\tau_M}{r_{PM}} - \frac{1}{2} \int_{T_0''} \frac{d\tau_M}{r_{QM}}.$$

$T_0''$  bedeutet hierbei den Bereich

$$(x - \beta)^2 + y^2 \leq \varrho^2, |z| \leq \zeta.$$

### § 8.

Das Integral  $\int_{T_0'} \frac{d\tau_M}{r_{PM}}$  läßt sich in geschlossener Form berechnen und es ist

$$(36) \quad \int_{T_0'} \frac{d\tau_M}{r_{PM}} = \pi \left\{ b \sqrt{\varrho^2 + 4b^2} - 2b^2 + \frac{\varrho^2}{2} \log \frac{\varrho}{-2b + \sqrt{\varrho^2 + 4b^2}} \right\}.$$

Das Integral über  $T_0''$  stellt den Wert des vom Rotationszylinder  $T_0''$  herrührenden Potentials im Punkte  $Q$  dar. Um es abzuschätzen, werde ich die bereits in der Einleitung zitierte Reihenentwicklung benutzen, wonach

$$(37) \quad \int_{T_0''} \frac{d\tau_M}{r_{QM}} = 2\pi \int_{-\zeta}^{+\zeta} dz \int_0^{\varrho} \frac{t dt}{\sqrt{t^2 + \varrho^2 + (\zeta - z)^2}} + 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_{-\zeta}^{+\zeta} dz \int_0^{\varrho} \frac{\varrho^{2k} t^{2k+1} dt}{(t^2 + \varrho^2 + (\zeta - z)^2)^{2k+\frac{1}{2}}}.$$

Dabei sind  $c_k$  gewisse positive Konstanten und so ist

$$\int_{T_0''} \frac{d\tau_M}{r_{QM}} > 2\pi \int_{-\zeta}^{+\zeta} dz \int_0^{\varrho} \frac{t dt}{\sqrt{t^2 + \varrho^2 + (z - \zeta)^2}} = (38) \quad \pi \left\{ \zeta \sqrt{2\varrho^2 + 4\zeta^2} - 2\zeta^2 + \varrho^2 \log \frac{2\zeta + \sqrt{2\varrho^2 + 4\zeta^2}}{\varrho \sqrt{2}} \right\}$$

Aus (35), (36) und (38) folgt also

$$0 \leq \frac{V(P) - V(Q)}{\pi} \leq b \sqrt{\varrho^2 + 4b^2} - 2b^2 + \zeta \sqrt{2\varrho^2 + 4\zeta^2} - 2\zeta^2 + \frac{\varrho^2}{2} \log \frac{\varrho}{-2b + \sqrt{\varrho^2 + 4b^2}} - \varrho^2 \log \frac{2\zeta + \sqrt{2\varrho^2 + 4\zeta^2}}{\varrho \sqrt{2}} = b \sqrt{\varrho^2 + 4b^2} - 2b^2 + \zeta \sqrt{2\varrho^2 + 4\zeta^2} - 2\zeta^2 + \frac{\varrho^2}{2} \log \frac{\varrho \cdot 2\varrho^2}{(-2b + \sqrt{\varrho^2 + 4\zeta^2})(2\zeta + \sqrt{2\varrho^2 + 4b^2})^2}.$$

Hieraus folgt weiter:

$$0 \leq \frac{V(P) - V(Q)}{\pi \varrho^2} \leq \frac{b}{\sqrt{\varrho^2 + 4b^2} + 2b} - \frac{2\zeta}{\sqrt{2\varrho^2 + 4\zeta^2} + 2\zeta} + (39) \quad \frac{1}{2} \log \frac{(2b + \sqrt{4b^2 + \varrho^2}) \cdot 2\varrho}{(2\zeta + \sqrt{2\varrho^2 + 2\zeta^2})^2}.$$

Ich wähle jetzt insbesondere  $\zeta = \frac{b}{2}$  und setze voraus, daß  $\frac{b}{a} > \sqrt{20}$  gilt. Die Ungleichheit (39) bleibt natürlich gültig und man bekommt

$$0 \leq \frac{V(P) - V(Q)}{\pi \varrho^2} \leq \frac{b}{\sqrt{\varrho^2 + 4b^2} + 2b} - \frac{b}{\sqrt{2\varrho^2 + b^2} + b} + (40) \quad \frac{1}{2} \log \frac{(2b + \sqrt{4b^2 + \varrho^2}) \cdot 2\varrho}{(2\zeta + \sqrt{2\varrho^2 + 2\zeta^2})^2}.$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$(41) \quad \frac{\varrho}{b} = \lambda,$$

so kann man schreiben:

$$(42) \quad \frac{V(P) - V(Q)}{\pi \varrho^2} \leq \frac{1}{2 + \sqrt{4 + \lambda^2}} - \frac{1}{1 + \sqrt{1 + 2\lambda^2}} +$$



$$\frac{1}{2} \log \frac{2\lambda(2 + \sqrt{4 + \lambda^2})}{2 + \lambda^2 + 2\sqrt{1 + \lambda^2}} \leq \frac{2 + \sqrt{4 + \lambda^2}}{1} + \frac{1}{2} \log 2\lambda,$$

da offenbar

$$\frac{2 + \sqrt{4 + \lambda^2}}{2 + \lambda^2 + 2\sqrt{1 + \lambda^2}} < 1$$

ist.

Hieraus folgt noch

$$0 \leq \frac{V(P) - V(Q)}{\pi q^2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \log 2\lambda$$

oder

$$(43) \quad 0 \leq 4 \frac{V(P) - V(Q)}{\pi q^2} \leq 1 + 2 \log 2\lambda.$$

Nun ist aber  $1 + 2 \log 2\lambda < 0$  für  $\lambda < \frac{1}{2} e^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{e}}$   
 $\frac{\sqrt{e}}{2e} < 0.3 \dots$ . Da aber  $\lambda = \frac{q}{b} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{\sqrt{20}}{20} < 0.22 \dots$  ist, so folgt  
 hieraus:

Wird  $\zeta = \frac{b}{2}$  gewählt und ist  $\frac{b}{a} \geq \sqrt{20}$ , so gilt

$$0 \leq V(P) - V(Q) < 0,$$

was offenbar ein Widerspruch ist. Demnach muß  $\frac{b}{a} < \sqrt{20}$  sein,  
 w. z. b. w.

(Reçu par la Rédaction le 18. 2. 1935).