Über die Drehungsgruppe im Hilbertschen Raum

von

J. SCHREIER (Lwów).

Es werde mit E ein separabler Raum vom Typus (B) bezeichnet[1]). Die Menge aller linearen umkehrbaren Operationen $U(x)$, für die $U(E)=E$ gilt, bildet auf Grund allgemeiner Sätze über Umkehrung linearer Operationen[2]) eine Gruppe in Bezug auf die Zusammensetzung.

Wir führen in dieser Gruppe den folgenden Konvergenzbegriff ein: $\lim\limits_{n\to\infty} U_n = U$, wenn für jedes $x\in E$, $\lim\limits_{n\to\infty} U_n(x) = U(x)$ stark, gilt.

Aus einem BANACH'schen Satze[3]) folgt, daß diese Gruppe immer separabel ist.

Die Stetigkeit der Operation des Zusammensetzens folgt aus dem Satze:

Konvergiert die Operationsfolge $\{U_n\}$ schwach gegen U $(\lim\limits_{n\to\infty} U_n = U)$ und die Elementenfolge $\{x_n\}$ stark gegen x, so konvergiert die Elementenfolge $\{U_n(x_n)\}$ stark gegen $U(x)$.

Beweis: Die Folge $\{U_n\}$ ist überall konvergent. Nach einem bekannten Satze[4]) ist daher $\|U_n\| \leqslant M$.

Dann ist $|U_n(x_n) - U(x)| \leqslant |U_n(x_n) - U_n(x)| + |U_n(x) - U(x)| \leqslant |U_n(x_n - x)| + |U_n(x) - U(x)| \leqslant M|x_n - x| + |U_n(x) - U(x)|$. Aus dieser Abschätzung folgt der Satz sofort.

---

1) S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932, p. 53.

2) Vgl.: J. Schauder, Über die Umkehrung linearer, stetiger Funktionaloperationen, Stud. Math. 2 (1930) p. 1—6.

3) L. c.[1]), p. 124.

4) L. c. p. 79—80.

Eine isometrische Abbildung des Raumes E auf sich selbst, für die $U(0)=0$ ist, wird *Drehung* genannt[5]). Auf Grund eines Satzes der Herren S. Mazur und S. Ulam[6]) ist eine solche Abbildung notwendig linear. Die Drehungen bilden daher eine Untergruppe der Gruppe aller linearen Abbildungen des Raumes E auf sich selbst. Nach dem Vorhergehenden ist diese Gruppe topologisch und separabel.

Herr Ulam und ich haben nun bewiesen[7]), daß es in der Gruppe aller Permutationen der natürlichen Zahlenfolge und in der Gruppe aller topologischen Abbildungen des Intervalls (0,1) auf sich selbst *eine endliche Anzahl von Elementen gibt, so daß die von ihnen erzeugte abzählbare Gruppe überalldicht ist.* Aus diesen Sätzen und aus der Banach'schen Darstellung einer allgemeinen Drehung[8]) kann man leicht beweisen, daß die Drehungsgruppe im Raume der stetigen Funktionen, im Raume der konvergenten Zahlenfolgen und weiter in $L^{(p)}$ und $l^{(p)}$ für $p \neq 2$, eine endliche Anzahl von Elementen mit derselben Eigenschaft enthält. Hier wollen wir *die Existenz solcher Elemente,* die kurz Erzeugende genannt werden könnten, *für die Drehungsgruppe im Hilbert'schen Raume nachweisen.*

Eine Drehung U im Hilbert'schen Raum ist bekanntlich durch eine unendliche Matrix $\mathfrak{A}=|a_{ik}|$, die die Bedingungen

$$(1) \qquad \sum_i a_{ik}^2=1, \quad \sum_k a_{ik}^2=1, \qquad \sum_k a_{ik}\,a_{jk}=0, \quad \sum_i a_{ik}\,a_{ij}=0$$

erfüllt, gegeben. Dem Zusammensetzen der Drehungen entspricht die Multiplikation der Matrizen. Die schwache Konvergenz einer Folge $\{U_n\}$, $(\mathfrak{A}_n=|a_{ik}^{(n)}|)$, gegen ein U, $(\mathfrak{A}=|a_{ik}|)$, ist mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_{ik}^{(n)}=a_{ik}$ für jedes Paar i,k gleichbedeutend.

Es bezeichne $A_1, A_2, \ldots$ die Folge aller endlichen, orthogonalen Matrizen mit rationalen Elementen. $\mathfrak{A}_p$ bezeichne die unendliche Matrix, die man erhält, wenn man die Matrizen

[5]) L. c. p. 173.

[6]) L. c. p. 166.

[7]) J. Schreier und S. Ulam, Über topologische Abbildungen der euklidischen Sphären, Fund. Math. 23 (1933) p. 102–118. J. Schreier und S. Ulam, Über die Permutationsgruppe der natürlichen Zahlenfolge, Stud. Math. 4 (1933) p. 134–141; diese Arbeit ist mit I zitiert.

[8]) L. c.[1]), p. 173–179.

$$A_p,\ A_1,\ A_2, \ldots A_{p-1},\ A_{p+1},\ A_{p+2} \ldots$$

längs der Diagonale aneinanderreiht.

Wir behaupten: die Folge $\{U_p\}$, $(\mathfrak{A}_p=|a_{ik}^{(p)}|)$, ist in der Drehungsgruppe überalldicht. Man hat zu diesem Zwecke zu zeigen, daß, wenn eine Matrix $\mathfrak{B}=|b_{ik}|$, die (1) erfüllt, und eine natürliche Zahl N_0 gegeben sind, es ein $\mathfrak{A}_s$ gibt, so daß die $a_{ik}^{(s)}$ für $i,k\leqslant N_0$ mit den b_{ik} für $i,k\leqslant N_0$, bis auf ein gegebenes ε übereinstimmen. Man kann aber ein solches $N>N_0$ finden, daß die endliche Matrix $\mathfrak{B}^{(N)}=|b_{ik}|$, $i,k\leqslant N$ die Orthogonalitätsbedingungen bis auf ein $\eta(\varepsilon)$ erfüllt, wobei $\eta(\varepsilon)$ so gewählt ist, daß man ein A_s finden kann, dessen Elemente mit den Elementen von $\mathfrak{B}^{(N)}$ bis auf ε übereinstimmen. Die Matrix $\mathfrak{A}_s$ approximiert dann $\mathfrak{B}$ auf die gewünschte Weise.

Es bezeichne weiter $\nu(n)$ eine eineindeutige Abbildung der natürlichen Zahlenfolge auf sich selbst oder kurz eine Permutation dieser Zahlenfolge. $\mathfrak{H}_\nu$ bezeichne die Matrix:

$$h_{ik}^{(\nu)}=1 \text{ für } k=\nu(i), \quad h_{ik}^{(\nu)}=0 \text{ für } k\neq\nu(i).$$

Die Matrizen $\mathfrak{H}_\nu$ bilden eine Gruppe, die mit der Gruppe aller Permutationen 1-isomorph ist. Diese Isomorphie ist auch stetig, wenn man die Permutationsgruppe wie in I metrisiert.

Aus dem Satz 2 jener Note folgt also, daß es drei Matrizen $\mathfrak{H}_\varphi$, $\mathfrak{H}_\psi$, $\mathfrak{H}_\chi$ gibt, durch deren Zusammensetzen man alle anderen $\mathfrak{H}_\nu$ beliebig genau approximieren kann. (Man kann zeigen, daß im erwähnten Satze 2 schon zwei Permutationen genügen. Daher genügen auch hier zwei Matrizen). Die Matrix $\mathfrak{H}_\nu^{-1}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{H}_\nu$ entsteht aus der Matrix $\mathfrak{A}$, indem man die Reihen und Kolonnen in $\mathfrak{A}$ mittels ν permutiert. Da aber durch solches Permutieren aus $\mathfrak{A}_1$ alle $\mathfrak{A}_p$ und die dazu nötigen Matrizen alle aus $\mathfrak{H}_\varphi$, $\mathfrak{H}_\psi$, $\mathfrak{H}_\chi$ erhalten werden können (denn um aus $\mathfrak{A}_1$ ein $\mathfrak{A}_p$ zu erhalten, genügt es eine Permutation $\nu(n)$ nur für eine endliche Anzahl der Werte von n so zu bestimmen, daß $\mathfrak{A}_p=\mathfrak{H}_\nu^{-1}\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{H}_\nu$ gilt), so ist die von $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{H}_\varphi$, $\mathfrak{H}_\psi$, $\mathfrak{H}_\chi$ erzeugte, abzählbare Untergruppe überalldicht, w. z. b. w.

Die hier angewandte Methode zur Approximation aller Drehungen mittels Drehungen der Gestalt $\mathfrak{H}_\nu^{-1}\,\mathfrak{A}_1\,\mathfrak{H}_\nu$ kann auch zu einem einfachen Beweis der von G. Vitali bewiesenen Tatsache, daß die Drehungsgruppe im Hilbert'schen

Raum konnex ist[9]), benutzt werden. Es genügt nämlich nur zu zeigen, daß alle $\mathfrak{H}_\nu$ in einer Komponente dieser Gruppe liegen. Dies aber folgt daraus, daß jede Permutation beliebig genau durch gerade, endliche Permutationen approximiert werden kann.

---

[9]) G. Vitali, Sostituzioni sopra un'infinità numerabile di elementi, Boll. Mathesis (1915) p. 29—31.

(Reçu par la Rédaction le 23 11. 1934).