Une remarque sur les séries trigonométriques

par

M. KAC (Lwów).

Dans cette Note nous démontrons le théorème suivant[1]):

Théorème. *Si*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty , \tag{1}$$

les polynômes de Fejér de la série trigonométrique

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n^2 x \tag{2}$$

ne sont pas uniformément bornés dans aucun intervalle.

Démonstration. Remarquons que[2])

$$\sum_{1 \leq i < k < \infty} \frac{1}{(k^2 - i^2)^4} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Soit maintenant $\varphi(x)$ une fonction telle que:

$$\begin{aligned} &1^\circ.\ \varphi(x) = 0 \text{ pour } 0 \leqslant x \leqslant a \text{ et } b \leqslant x \leqslant 2\pi \ (a < b); \\ &2^\circ.\ 0 < \varphi(x) \leqslant 1 \text{ pour } a < x < b; \\ &3^\circ.\ \left| \int_0^{2\pi} \varphi(x) \cos n x \, dx \right| < \frac{A}{n^2} \text{ pour } n = 1, 2, 3, \ldots . \end{aligned} \tag{3}$$

Il existe évidemment un nombre N tel que:

$$\sum_{N \leq i < k < \infty} \frac{A^2}{(k^2 - i^2)^4} < \frac{Q^2}{144}, \tag{4}$$

[1]) Ce théorème peut être géneralisé. Voir la remarque 2.

[2]) Car le nombre des solutions de l'équation $k^2 - i^2 = n$ est $< n^2$.

donc aussi

$$(4^{a})\qquad \begin{aligned} &\sum_{N\leq i<k<\infty}\frac{A^{2}}{(k^{2}+i^{2})^{4}}<\frac{Q^{2}}{144}\\ &\sum_{N\leq i<\infty}\frac{A^{2}}{2^{4}\,i^{8}}<\frac{Q^{2}}{36}\end{aligned}$$

où $Q=\int\limits_{0}^{2\pi}\varphi(x)\,dx$. Supposons, que les polynômes de Fejér

$$\sigma_{n^2}(x)=\sum_{i=1}^{n-1}\left(1-\frac{i^{2}}{n^{2}}\right)a_{i}\cos i^{2}x$$

sont uniformément bornés dans (a, b); les polynômes

$$\bar{\sigma}_{n^2}(x)=\sum_{i=N}^{n-1}\left(1-\frac{i^{2}}{n^{2}}\right)a_{i}\cos i^{2}x \qquad (n-1>N)$$

sont, comme on voit sans peine, aussi uniformément bornés dans (a, b). Il existe donc un nombre M, tel que:

$$\left[\sum_{i=N}^{n-1}\left(1-\frac{i^{2}}{n^{2}}\right)a_{i}\cos i^{2}x\right]^{2}\leqslant M \text{ pour } a\leqslant x\leqslant b,\ n=N+2, N+3,\ldots$$

et nous avons

$$\int\limits_{0}^{2\pi}\varphi(x)\left[\sum_{i=N}^{n-1}\left(1-\frac{i^{2}}{n^{2}}\right)a_{i}\cos i^{2}x\right]^{2}dx\leqslant M(b-a).$$

En posant

$$R_{n}=\sum_{i=N}^{n-1}a_{i}^{2}\left(1-\frac{i^{2}}{n^{2}}\right)^{2}\int\limits_{0}^{2\pi}\varphi(x)\cos 2i^{2}x\,dx,$$

$$S_{n}=\sum_{N\leq i<k\leq n-1}a_{i}a_{k}\left(1-\frac{i^{2}}{n^{2}}\right)\left(1-\frac{k^{2}}{n^{2}}\right)\int\limits_{0}^{2\pi}\varphi(x)\cos(i^{2}+k^{2})x\,dx,$$

$$T_{n}=\sum_{N\leq i<k\leq n-1}a_{i}a_{k}\left(1-\frac{i^{2}}{n^{2}}\right)\left(1-\frac{k^{2}}{n^{2}}\right)\int\limits_{0}^{2\pi}\varphi(x)\cos(k^{2}-i^{2})x\,dx,$$

nous obtenons après une transformation facile:

$$(5)\quad M(b-a)\geqslant\frac{Q}{2}\sum_{i=N}^{n-1}a_{i}^{2}\left(1-\frac{i^{2}}{n^{2}}\right)^{2}-\frac{1}{2}|R_{n}|-|S_{n}|-|T_{n}|.$$

Mais en employant l'inégalité de Schwarz et les rélations (3), (4) et (4^{a}) nous avons:

$$|R_{n}|\leqslant\left[\sum_{i=N}^{n-1}a_{i}^{2}\left(1-\frac{i^{2}}{n^{2}}\right)^{2}\right]\left[\sum_{i=N}^{n-1}\frac{A^{2}}{2^{4}i^{8}}\right]^{1/2}\leqslant\frac{Q}{6}\left[\sum_{i=N}^{n-1}a_{i}^{2}\left(1-\frac{i^{2}}{n^{2}}\right)^{2}\right]$$

$$|S_{n}|\leqslant\left[\sum_{i=N}^{n-1}a_{i}^{2}\left(1-\frac{i^{2}}{n^{2}}\right)^{2}\right]\left[\sum_{N\leq i<k\leq n-1}\frac{A^{2}}{(i^{2}+k^{2})^{4}}\right]^{1/2}\leqslant\frac{Q}{12}\left[\sum_{i=N}^{n-1}a_{i}^{2}\left(1-\frac{i^{2}}{n^{2}}\right)^{2}\right]$$

$$|T_{n}|\leqslant\left[\sum_{i=N}^{n-1}a_{i}^{2}\left(1-\frac{i^{2}}{n^{2}}\right)^{2}\right]\left[\sum_{N\leq i<k\leq n-1}\frac{A^{2}}{(k^{2}-i^{2})^{4}}\right]^{1/2}\leqslant\frac{Q}{12}\left[\sum_{i=N}^{n-1}a_{i}^{2}\left(1-\frac{i^{2}}{n^{2}}\right)^{2}\right],$$

donc, en vertu de (5),

$$(6)\qquad \sum_{i=N}^{n-1}a_{i}^{2}\left(1-\frac{i^{2}}{n^{2}}\right)^{2}\leqslant\frac{4M(b-a)}{Q}\quad\text{pour } n>N-1.$$

Il existe (d'après (1)) un nombre r tel que

$$\sum_{i=N}^{r}a_{i}^{2}>\frac{16M(b-a)}{Q};$$

en supposant maintenant $n^{2}>2r^{2}$ nous obtenons

$$\sum_{i=N}^{n-1}a_{i}^{2}\left(1-\frac{i^{2}}{n^{2}}\right)^{2}\geqslant\sum_{i=N}^{r}a_{i}^{2}\left(1-\frac{i^{2}}{n^{2}}\right)^{2}\geqslant\frac{1}{4}\sum_{i=N}^{r}a_{i}^{2}>\frac{4M(b-a)}{Q}$$

contrairement à (6).

Remarque 1. Les polynômes de Fejér de la série (2) ne sont pas uniformément convergents dans aucun intervalle. Donc, si la série (2) est la série de Fourier d'une fonction $f(x)$, cette fonction est pantachiquement discontinue.

Remarque 2. Sans changer la démonstration nous pouvons établir un théorème analogue pour les séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n}\cos p_{n}x$ $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{n}^{2}=\infty\right)$, s'il existe un nombre l, tel que $\sum\limits_{1\leq i<k<\infty}\frac{1}{(p_{k}-p_{i})^{l}}<\infty$. (Nous demanderons seulement, que $\left|\int\limits_{0}^{2\pi}\varphi(x)\cos nx\,dx\right|<\frac{A}{n^{\frac{l}{2}}}$).

Nous pouvons poser par exemple $p_{n}=n^{k}$, k naturel, $k\geqslant 2$.

Remarque 3. Le théorème dont nous avons parlé dans la remarque 2. ne peut pas être généralisé aux ensembles fermés arbitraires. Nous construirons notamment une série trigonométrique $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos p_n x$ convergente presque partout (donc uniformément convergente dans un ensemble fermé E, $|E| > 0$) telle que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2 = \infty$ et $\sum_{1 \leq i < k < \infty} \frac{1}{(p_k - p_i)^2} < \infty$. Nous emploierons une méthode, qui nous a été communiquée, relativement à une autre question, par M. A. Zygmund.

Posons

$$\psi_N(x) = \sum_{\nu=1}^{N} \frac{\cos \nu x}{\sqrt{\nu}}$$

et considérons la série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} \psi_{2^{k^2}}(2^{k^3} x).$$

Si $k \neq l$, les polynômes trigonométriques $\psi_{2^{k^2}}(2^{k^3} x)$ et $\psi_{2^{l^2}}(2^{l^3} x)$ ne contiennent pas des termes communs. Par conséquent, nous pouvons considérer cette série comme une série trigonométrique de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos p_n x$. Il est assez facile de démontrer que cette série trigonométrique satisfait aux conditions énoncées.

(Reçu par la Rédaction le 17. 11. 1934).