Beiträge zur Theorie der Orthogonalentwicklungen (IV)

von

W. ORLICZ (Lwów).

Mit $OS\{\varphi_i(x)\}$ bezeichnen wir stets im folgenden ein in $(0,1)$ definiertes Orthogonalsystem. Ein $OS\{\varphi_i(x)\}$ heißt *gleichmäßig beschränkt*, falls $|\varphi_i(x)| \leqslant K$ für fast jedes x und alle i gilt.

Wenn eine Funktion $f(x)$ vorgegeben ist, so bezeichnen wir mit f_n die Koeffizienten der Entwicklung dieser Funktion nach dem gegebenen Orthogonalsystem.

Seien A, B zwei Funktionenklassen; man sagt, *eine Zahlenfolge* $\{\lambda_i\}$ *führe die Klasse* A *in die Klasse* B *über*, wenn sie die folgende Eigenschaft besitzt:

Ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i \varphi_i(x)$$

die Entwicklung der Funktion $f(x) \in A$, so ist

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i f_i \varphi_i(x)$$

die Entwicklung einer Funktion $g(x) \in B$. Die Menge aller Zahlenfolgen $\{\lambda_i\}$, welche diese Eigenschaft aufweisen, bezeichnen wir mit (A, B). Jede Folge, die dieser Menge angehört, nennt man auch einen *Multiplikator* der Klasse (A, B).

In Weiterführung einer früheren Untersuchung werden hier einige Probleme behandelt, welche Multiplikatoren verschiedener Klassen betreffen [1]).

[1]) Vgl. die früheren Teile: I Studia Math. 1 (1929) p. 1—39, II p. 241—255; III Bull. Ac. Pol. (1932) p. 229—238. Diese Arbeiten werden im folgenden als Beiträge I, II, III zitiert.

§ 1.

Hilfssatz 1. *Gegeben sei ein OS* $\{\varphi_i(x)\}$, *dessen Funktionen beschränkt sind. Gibt es für jede Funktion* $g(x) \in (L^{\alpha})$ $(\alpha > 1)$ *eine Konstante* $K > 0$, *so daß die Ungleichung*

$$\left| \int_0^1 g(t) \left\{ \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\, \varphi_i(t) \right\} dt \right| \leqslant K \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

fast überall besteht, so gibt es auch ein $M > 0$, *so daß für fast jedes* x

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\, \varphi_i(t) \right|^{\alpha'} dt \leqslant M \tag{1}$$

gilt [2]).

Beweis. Wir setzen $K_n(x, t) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\, \varphi_i(t)$, $U_n[g(x)] = \int_0^1 g(t)\, K_n(x, t)\, dt$; offenbar sind die Operationen $U_n[g(x)]$ linear, wenn man sie als Operationen in (L^{α}) mit dem Raume (L^{∞}) angehörenden Werten betrachtet [3]). Da nach Voraussetzung für jedes $g(x) \in (L^{\alpha})$

$$\| U_n[g(x)] \|_{\infty} \leqslant K \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist, so gibt es nach einem Satze von Herrn S. Banach [4]), eine Konstante $M > 0$, so daß

$$\| U_n[g(x)] \|_{\infty} \leqslant M \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

d. h.

$$\int_0^1 g(t)\, K_n(x, t)\, dt \leqslant M \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

für fast alle x besteht, wenn nur $\| g(x) \|_{\alpha} \leqslant 1$. Offenbar gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Menge A, so daß: 1⁰ A in jedem Punkte die Dichte 1 besitzt; 2⁰ jede Funktion $\varphi_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ in bezug auf A stetig ist; 3⁰ $|A| \geqslant 1 - \varepsilon$. Ist $x_0 \in A$ und $\| g(x) \|_{\alpha} \leqslant 1$, so besteht (2), woraus bekanntlich (1) in diesem Punkte folgt. Da das Maß der Menge A beliebig wenig von 1 abweicht, so besteht (1) fast überall.

Bemerkung. Im Grenzfalle $\alpha = 1$, $\alpha' = \infty$ muß man die Ungleichung (1) durch

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\, \varphi_i(t) \right| \leqslant M \tag{3}$$

für fast jedes x, t ersetzen.

Hilfssatz 2. *Gibt es für jede Reihe, die der Bedingung*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{\alpha} < +\infty \qquad (1 < \alpha < \infty) \tag{4}$$

genügt, eine Konstante $K > 0$, *so daß die Ungleichung*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x) \right| \leqslant K \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{5}$$

fast überall besteht, so gilt für ein $M > 0$, *die Ungleichung*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f_i(x)|^{\alpha'} \leqslant M \tag{6}$$

fast überall.

Beweis. Zum Beweise betrachtet man die Folge linearer Operationen $U_n[\{a_i\}] = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ und wendet den schon oben erwähnten Banach'schen Satz an.

Bemerkung. Der Hilfssatz 2 behält im Grenzfalle $\alpha = 1$, $\alpha' = \infty$, bezw. $\alpha = \infty$, $\alpha' = 1$ seine Gültigkeit, wenn man (6) durch $|f_i(x)| \leqslant M$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$, bezw. (4) durch Ob. Gr. $|a_i| < +\infty$ ersetzt.

Die Multiplikatoren sind insbesondere in Beiträge I, p. 15—26 und Beiträge III, p. 237—238, behandelt.

Vgl. auch die Arbeiten: H. Steinhaus, Sur les développements orthogonaux, Bull. Ac. Pol. (1926) p. 11—39, S. Kaczmarz, Sur les multiplicateurs des séries orthogonales, Studia Math. 4 (1933) p. 21—26.

[2]) Mit (L^{α}) bezeichnen wir den Raum der mit der α-ten Potenz $(\alpha \geqslant 1)$ integrierbaren Funktionen, mit (L^{∞}) den Raum der wesentlich beschränkten Funktionen. Mit $\| \; \|_{\alpha}$ wird die übliche Norm: $\left(\int_0^1 |f(x)|^{\alpha} dx \right)^{\frac{1}{\alpha}}$, bezw. wesentliche Ob. Gr. $|f(x)|$, wenn $\alpha = \infty$, bezeichnet.

Der zu einem α konjugierte Exponent wird immer mit α' bezeichnet; es ist also $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} = 1$.

[3]) Für die Theorie der linearen Operationen verweisen wir auf: S. Banach, Théorie des Opérations linéaires, Warszawa (1932). Dieses Buch wird im folgenden als Opérations zitiert.

[4]) Vgl. Opérations, p. 80, Théorème 5.

Hilfssatz 3. *Gegeben sei ein OS* $\{\varphi_i(x)\}$, *dessen Funktionen beschränkt sind. Damit die Reihe*

$$\sum_{i=1}^{\infty} |f_i|\,|p_i| \tag{7}$$

für jede Koeffizientenfolge $\{f_i\}$ *einer integrierbaren Funktion konvergiert, ist notwendig und hinreichend, daß die Ungleichung*

$$\sum_{i=1}^{n} |p_i|\,|\varphi_i(x)| \leqslant M \qquad (n=1,2,3,\ldots) \tag{8}$$

fast überall besteht.

Beweis. 1⁰. Ist (8) fast überall erfüllt, dann gilt auch

$$\sum_{i=1}^{n} d_i p_i \varphi_i(x) \leqslant M$$

fast überall, wenn $|d_i| \leqslant 1$ ist. Beiderseitige Multiplikation der letzten Ungleichung mit einer integrierbaren Funktion $f(x)$ und Integration ergibt die Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} d_i f_i p_i \leqslant M \qquad (n=1,2,3,\ldots),$$

woraus die Konvergenz der Reihe (7) folgt.

2⁰. Wir setzen jetzt die Konvergenz der Reihe (7) bei beliebigen $f(x) \in (L^1)$ voraus. Ist $|d_i| \leqslant 1$ $(i=1,2,3,\ldots)$, so existiert dann der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} d_i p_i f_i = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x) \left\{ \sum_{i=1}^{n} d_i p_i \varphi_i(x) \right\} dx,$$

woraus, nach dem bekannten Satze des Herrn H. Lebesgue [5]), die Ungleichung

$$\left| \sum_{i=1}^{n} d_i p_i \varphi_i(x) \right| \leqslant K \qquad (n=1,2,3\ldots)$$

fast überall folgt. Nach der Bemerkung zum Hilfssatze 2 ergibt sich hieraus die Ungleichung (8) fast überall.

[5]) Vgl. H. Hahn, Über Folgen linearer Operationen, Monatshefte für Mathematik u. Physik, Bd. 32 (1922), p. 40, Satz XVIII a.

Bemerkung. Für gleichmäßig beschränkte OS ist das Bestehen der Ungleichung (8) mit der Bedingung $\sum_{i=1}^{\infty} |p_i| < +\infty$ äquivalent. Zum Beweise genügt es zu bemerken, daß für solche OS die Ungleichung $\int_0^1 |\varphi_i(x)|\,dx > a > 0$ $(i=1,2,3,\ldots)$ besteht.

§ 2.

Satz 1. *Gegeben sei ein gleichmäßig beschränktes OS* $\{\varphi_i(x)\}$. *Ist* $\{\lambda_i\} \in (L^\alpha, L^\beta)$, *so ist die Folge* $\{\lambda_i\}$ *beschränkt.*

Beweis. Wenn $\{\lambda_i\} \in (L^\alpha, L^\beta)$, $f(x) \in (L^\alpha)$, so ist $\lambda_i f_i \to 0$, d. h. $\int_0^1 f(x)\,\lambda_i \varphi_i(x)\,dx \to 0$. Daraus folgt bekanntlich [6])

$$\|\lambda_i \varphi_i(x)\|_\beta \leqslant M.$$

Da aber für ein gleichmäßig beschränktes OS $\|\varphi_i(x)\|_\beta \geqslant a > 0$ $(i=1,2,3\ldots)$ gilt, so ist

$$|\lambda_i| \leqslant \frac{M}{a} \qquad (i=1,2,3,\ldots).$$

Satz 2. *Gegeben sei ein OS* $\{\varphi_i(x)\}$, *dessen Funktionen beschränkt sind. Dafür, daß* $\{\lambda_i\} \in (L^1, L^2)$, *ist notwendig und hinreichend, daß die Ungleichung*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \varphi_i^2(x) \leqslant M \tag{9}$$

fast überall besteht.

Beweis. 1⁰. Es sei $h(x) \in (L^2)$, $f(x) \in (L^1)$; wenn die Ungleichung (9) fast überall erfüllt ist, so besteht fast überall

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|\,|h_i|\,|\varphi_i(x)| \leqslant \Big(M \sum_{i=1}^{\infty} h_i^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Nach Hilfssatz 3 ist also $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|\,|h_i|\,|f_i| < +\infty$. Da für $\{h_i\}$ eine beliebige Folge aus (l^2) gewählt werden kann, so ist weiter

[6]) Vgl. l. c. [5]) p. 43, Satz XIX a.

$$(10) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 f_i^2 < +\infty,$$

was mit $\{\lambda_i\} \in (L^1, L^2)$ gleichbedeutend ist.

2°. Wir setzen jetzt voraus, daß $\{\lambda_i\} \in (L^1, L^2)$. Dann besteht (10) für jedes $f(x) \in (L^1)$, und wenn $\{a_i\} \in (l^2)$, so ist die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|\,|f_i|\,|a_i|$ konvergent. Es gilt also nach Hilfssatz 3 fast überall

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\,|a_i|\,|\varphi_i(x)| \leqslant K \qquad (n=1,2,3,\ldots),$$

folglich, nach Hilfssatz 2, auch die Ungleichung (9).

Bemerkung. Da für ein OS $\{\varphi_i(x)\}$ $\int_0^1 \varphi_i^2(x)\,dx = 1$ ist, so folgt aus dem Bestehen der Ungleichung (9) für fast alle x, die Bedingung $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 < +\infty$. Für ein gleichmäßig beschränktes OS folgt aus dieser Bedingung die Ungleichung (9) für jedes x. Es gilt also der folgende Satz: Für ein gleichmäßig beschränktes OS $\{\varphi_i(x)\}$ ist $\{\lambda_i\} \in (L^1, L^2)$ dann und nur dann, wenn

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 < +\infty.$$ [7]

Satz 3. *Gegeben sei ein gleichmäßig beschränktes OS $\{\varphi_i(x)\}$. Wenn $\{\lambda_i\} \in (L^1, L^\alpha)$, $1 < \alpha < 2$, so gilt*

$$(11) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^{\alpha'} < +\infty.$$

Beweis. Ist $\{\lambda_i\} \in (L^1, L^\alpha)$, $1 < \alpha < 2$, $f(x) \in (L^1)$, so sind $\lambda_i f_i$ die Koeffizienten einer Funktion aus (L^α). Nach einem Satze des Herrn F. Riesz[8]) ist also die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i f_i|^{\alpha'}$ konvergent.

[7]) Unter weiteren, sehr einschränkenden, Voraussetzungen wurde dieser Satz zuerst von Herrn S. Kaczmarz bewiesen. Siehe die unter [1]) zit. Arbeit des Herrn Kaczmarz, p. 25—26.

[8]) F. Riesz, Über eine Verallgemeinerung der Parsevalschen Formel, Math. Zeitschr. 18 (1923) p. 117—124.

Wenn $\sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{\alpha} < +\infty$, so ist die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} |f_i|\,|\lambda_i|\,|a_i|$ konvergent, und nach Hilfssatz 3 gilt fast überall

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|\,|a_i|\,|\varphi_i(x)| \leqslant K.$$

Daraus folgt weiter, nach Hilfssatz 2,

$$(12) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^{\alpha'}\,|\varphi_i(x)|^{\alpha'} \leqslant M$$

für fast alle x, und beiderseitige Integration von (12) ergibt endlich, da

$$\left(\int_0^1 |\varphi_i(x)|^{\alpha'}\,dx\right)^{\frac{1}{\alpha'}} \geqslant a > 1 \qquad (i=1,2,3,\ldots),$$

die Bedingung (11).

Bemerkung. Für ein gleichmäßig beschränktes, in (L^1) vollständiges OS $\{\varphi_i(x)\}$, ist die im Satze 3 angeführte notwendige Bedingung sicher nicht hinreichend. Dies folgt ohne weiteres aus dem Satze 7.

Satz 4. *Gegeben sei ein in (L^α) $(1 \leqslant \alpha < \infty)$ vollständiges OS $\{\varphi_i(x)\}$* [9]), *dessen Funktionen beschränkt sind. Damit die Folge $\{\pm\lambda_i\}$ bei beliebiger Vorzeichenverteilung zur Menge (L^1, L^α) gehöre, ist notwendig und hinreichend, daß die Ungleichung*

$$(13) \qquad \int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \lambda_i \varphi_i(t) \varphi_i(x)\right|^{\alpha} dt \leqslant M \qquad (n=1,2,3\ldots)$$

bei beliebiger Vorzeichenverteilung $\varepsilon_i = \pm 1$ für fast jedes x erfüllt sei.

Beweis. 1°. Setzen wir voraus, daß bei beliebigen $\{\varepsilon_i\}$, $\varepsilon_i = \pm 1$, die Ungleichung (13) fast überall erfüllt ist. Ist $g(x) \in (L^{\alpha'})$, so erhalten wir, mit Hilfe von (13) und der Hölder'schen Ungleichung für Integrale, die Beziehung

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \lambda_i g_i \varphi_i(x)\right| \leqslant M^{\frac{1}{\alpha}} \|g(x)\|_{\alpha'} \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

[9]) Ein OS $\{\varphi_i(x)\}$ heißt im (L^α) vollständig, wenn aus

$$\int_0^1 f(x)\varphi_i(x)\,dx = 0 \quad (i=1,2,3,\ldots),\ f(x) \in (L^\alpha),$$

die Beziehung $f(x) = 0$ für fast jedes x folgt.

fast überall. Wenn $f(x) \in (L^1)$, so folgt daraus weiter

$$\int_0^1 g(x)\{\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \lambda_i f_i \varphi_i(x)\}\,dx \leqslant M^{\frac{1}{\alpha}} \|g(x)\|_{\alpha'} \|f(x)\|_1 \quad (n=1,2,3,\ldots),$$

und endlich

$$(14) \qquad \|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \lambda_i f_i \varphi_i(x)\|_\alpha \leqslant M^{\frac{1}{\alpha}} \|f(x)\|_1 \quad (n=1,2,3,\ldots).$$

Aus (14) folgt aber, daß $\{\varepsilon_i \lambda_i\} \in (L^1, L^\alpha)$ [10]).

2⁰. Nun setzen wir voraus, daß bei beliebiger Vorzeichenverteilung $\{\pm\lambda_i\} \in (L^1, L^\alpha)$. Dann ist es ohne weiteres klar, daß jede Folge $\{\eta_i \lambda_i\}$, wo η_i die Werte 1, 0 annimmt, auch der Menge (L^1, L^α) angehört. Wir erklären jetzt in (L^1) eine Operation $g(x) = U_\eta[f(x)]$, indem wir einer integrierbaren Funktion $f(x)$, diejenige Funktion $g(x) \in (L^\alpha)$ zuordnen, welche den Gleichungen $\int_0^1 g(x)\varphi_i(x)\,dx = \eta_i \lambda_i \int_0^1 f(x)\varphi_i(x)\,dx$ genügt. Da unser OS in (L^α) vollständig ist, so ist diese Operation eindeutig bestimmt und, wie leicht einzusehen, additiv. Ihre Stetigkeit folgt am einfachsten durch Anwendung eines allgemeinen Satzes des Herrn S. Banach [11]). Es gilt also für jede Folge $\{\eta_i\}$, $(\eta_i = 1, 0)$, die Ungleichung

$$(15) \qquad \|U_\eta[f(x)]\|_\alpha \leqslant M_\eta \|f(x)\|_1,$$

wobei M_η die sog. Norm der Operation bedeutet (d. h. die kleinste Konstante, für welche die Ungleichung (15) für jedes $f(x) \in (L^1)$ stattfindet). Wir behaupten nun die Existenz einer Konstanten M derart, daß $M_\eta \leqslant M$ für jede Folge $\{\eta_i\}$, $(\eta_i = 1, 0)$.

Zuerst bemerken wir, daß die Orthogonalpolynome

$$\sum_{i=1}^{r} c_i \varphi_i(x),$$

eine in (L^1) dichte Menge bilden. Unserer Voraussetzung zufolge kann man nämlich das gegebene OS in (L^∞) als eine im Banach'schen Sinne *vollständige Menge* betrachten [12]). Daraus

[10]) Vgl. Beiträge I, p. 11—12, Satz 1.

[11]) Vgl. Opérations, p. 41, Théorème 7.

[12]) Opérations, p. 58.

folgt aber, daß sie in (L^1) *fundamental* ist [13]), was auf unsere Behauptung hinauskommt. Wir setzen nun voraus, daß die Menge der Zahlen M_η nicht beschränkt sei. Dann gibt es, wie leicht einzusehen, zu jeder Zahl k und einem beliebigen Index m ein Orthogonalpolynom $w_r(x) = \sum_{i=1}^{r}{}' c_i \varphi_i(x)$, $(r > m)$ und eine Zahlenfolge $\eta = \{\eta_i\}$, $(\eta_i = 1, 0)$, mit den folgenden Eigenschaften:

1) $\qquad \eta_i = 0$ für $1 \leqslant i \leqslant m, \quad i > r;$

2) $\qquad \|U_\eta[w_r(x)]\|_\alpha \geqslant k;$

3) $\qquad \|w_r(x)\|_1 \leqslant 1.$

Man konstruiert mit Benutzung dieser Bemerkung eine Folge von Orthogonalpolynomen $w_{r_n}(x)$, $(r_n < r_{n+1})$, und unendlich viele Folgen $\eta^n = \{\eta_i^n\}$, $(\eta_i^n = 1, 0)$, so daß:

a) $\qquad \eta_i^n = 0$ für $1 \leqslant i \leqslant r_{n-1}, \quad i > r_n;$

b) $\qquad \|U_{\bar\eta^n}[w_{r_n}(x)]\|_\alpha \geqslant M_{\bar\eta^{n-1}} \cdot 2^{2n}, \quad M_{\bar\eta^n} \geqslant 1;$

wobei $\bar\eta^n = \eta^1 + \eta^2 + \ldots + \eta^n;$

c) $\qquad \|w_{r_n}(x)\|_1 \leqslant 1.$

Nach c) ist die Reihe

$$(16) \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{\infty}{}' \frac{1}{2^i} w_{r_i}(x)$$

in (L^1) konvergent und es ist $\|f(x)\|_1 \leqslant 1$. Wir definieren jetzt eine Folge $\bar\eta = \{\bar\eta_i\}$, indem wir $\bar\eta_i = \eta_i^n$ für $r_{n-1} < i \leqslant r_n$ $(n = 2, 3, \ldots)$ $\bar\eta_i = 0$ für $1 \leqslant i \leqslant r_1$ setzen. Für die durch (16) definierte Funktion $f(x)$, besteht nach (15) die Ungleichung

$$(17) \qquad \|U_{\bar\eta}[f(x)]\|_\alpha \leqslant M_{\bar\eta}.$$

Anderseits gilt aber die Abschätzung

[13]) Opérations, p. 58, Théorème 7.

$$(18)\quad \| U_{\bar\eta}[f(x)] \|_\alpha = \| U_{\bar\eta}\left[\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i} w_{r_i}(x)\right] + U_{\bar\eta}\left[\frac{1}{2^n} w_{r_n}(x)\right] +$$
$$+ U_{\bar\eta}\left[\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} w_{r_i}(x)\right] \| \geqslant M_{\bar\eta\, n-1} 2^n - M_{\bar\eta} \| \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^i} w_{r_i}(x) \|_\alpha -$$
$$- M_{\bar\eta} \| \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^i} w_{r_i}(x) \|_\alpha .$$

Die Ungleichungen (17), (18) sind unvereinbar, da für $n \to \infty$ die rechte Seite in (18) gegen $+\infty$ strebt. Damit ist die Existenz der Konstanten M gesichert. Sei $\{\varepsilon_i\}$ eine Folge mit $\varepsilon_i = 0$ für $i > n$ und $\varepsilon_i = \pm 1$ für $i \leqslant n$.

Nach Ungleichung (15) ist:

$$\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \lambda_i f_i \varphi_i(x) \|_\alpha \leqslant 2M \| f(x) \|_1 = N \| f(x) \|_1$$

und weiter, wenn $g(x) \in (L^{\alpha'})$,

$$\int_0^1 g(x) \, \{ \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \lambda_i f_i \varphi_i(x) \} \, dx = \int_0^1 f(x) \, dx \int_0^1 g(t) \, \{ \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \lambda_i \varphi_i(x) \varphi_i(t) \} \, dt$$
$$\leqslant N \| f(x) \|_1 \| g(x) \|_{\alpha'} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Da die letzte Ungleichung für jede Funktion $f(x) \in (L^1)$ besteht, so haben wir weiter für fast jedes x

$$\int_0^1 g(t) \, \{ \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \lambda_i \varphi_i(x) \varphi_i(t) \} \, dt \leqslant N \| g(x) \|_{\alpha'} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Daraus folgt endlich, nach Hilfssatz 1, daß die Bedingung unseres Satzes auch notwendig ist.

Bemerkung. Im Grenzfalle $\alpha = \infty$, $\alpha' = 1$ behält Satz 4 seine Gültigkeit, wenn man die dort angegebene Bedingung durch die folgende ebenfalls notwendige und hinreichende Bedingung ersetzt:

Die Ungleichung

$$(13') \qquad \left| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \lambda_i \varphi_i(t) \varphi_i(x) \right| \leqslant M \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

soll, bei beliebiger Vorzeichenverteilung $\varepsilon_i = \pm 1$, für fast jedes x, t bestehen.

Satz 5. *Gegeben sei ein gleichmäßig beschränktes OS* $\{\varphi_i(x)\}$.

A. Genügen die Exponenten α, β *einer der Bedingungen*

1) $1 < \alpha < 2, \quad 1 \leqslant \beta < \infty$;
2) $\alpha \geqslant 2, \quad 2 < \beta < \infty$,

und ist das $OS\, \{\varphi_i(x)\}$ *in* (L^δ), $[\delta = \min(\alpha', \alpha)]$, *vollständig, so gibt es eine nullkonvergente Zahlenfolge* $\{\lambda_i\}$, *welche der Menge* (L^α, L^β) *nicht angehört.*

B. Genügen die Exponenten α, β *der Bedingung*

$$\alpha \geqslant 2, \; 1 \leqslant \beta \leqslant 2,$$

so ist jede beschränkte Folge in (L^α, L^β) *enthalten.*

Beweis. *A.* Nehmen wir an, daß jede nullkonvergente Folge der Menge (L^α, L^β), $(1 < \alpha < 2)$, angehöre. Wir betrachten eine Funktion $f(x) \in (L^\alpha)$, so daß $f_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3 \ldots)$, $\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 = +\infty$.

Die Existenz einer solchen Funktion ist bei unseren Voraussetzungen offenbar gesichert. Wir definieren in (c_0) [14]) eine Operation $U[\lambda] \equiv g(x)$, indem wir einer Folge $\lambda \equiv \{\lambda_i\}$, $\lambda \in (c_0)$, diejenige Funktion $g(x) \in (L^\beta)$ zuordnen, in welche $f(x)$ durch die Folge $\{\lambda_i\}$ überführt wird. Daß diese Operation linear ist, folgt wieder am einfachsten durch die Anwendung des schon beim Beweise des Satzes 4 erwähnten Satzes des Herrn Banach. Es besteht die Ungleichung

$$\| U[\lambda] \|_\beta \leqslant M \max_{1 \leq i < \infty} |\lambda_i|,$$

woraus insbesondere

$$\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i f_i \varphi_i(x) \|_\beta \leqslant M \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

bei beliebiger Vorzeichenverteilung $\varepsilon_i = \pm 1$ folgt. Daraus folgt aber weiter die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i^2 \varphi_i^2(x)$$

fast überall [15]). Da für ein gleichmäßig beschränktes $OS\, \{\varphi_i(x)\}$,

[14]) Man bezeichnet mit (c_0) den Raum aller nullkonvergenten Zahlenfolgen.

[15]) Vgl. Beiträge III, p. 230, Hilfssatz, oder W. Orlicz, Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen (I), Studia Math. 4 (1933) p. 33—37.

$\int\limits_A \varphi_i^2(x)\,dx > \frac{1}{2}$ ist, wenn nur das Maß der Menge A genügend wenig von 1 abweicht, so sehen wir, indem wir den EGOROFF'schen Satz anwenden, daß die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i^2$ konvergiert. Wir sind also zu einem Widerspruch mit unserer Annahme $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i^2 = +\infty$ gelangt.

Wenn das OS in (L^δ), $[\delta = \min(\alpha', \alpha)]$, vollständig ist, so ist $(L^\alpha, L^\beta) = (L^{\beta'}, L^{\alpha'})$ [16]; der Fall A 2) läßt sich also ohne weiteres auf den Fall A 1) zurückführen.

B. Wir setzen jetzt $\alpha \geqslant 2$, $1 \leqslant \beta \leqslant 2$, $\{\lambda_i\} \in (c_0)$ voraus. Für ein $f(x) \in (L^\alpha)$ ist die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 f_i^2$ konvergent; es sind also $\lambda_i f_i$ die Koeffizienten einer quadratisch und umsomehr mit dem Exponenten β integrierbaren Funktion.

Satz 6. *Gegeben sei ein gleichmäßig beschränktes OS $\{\varphi_i(x)\}$. Ist $\alpha > 1$, $\beta < \infty$, so gibt es immer in (L^α, L^β) einen Multiplikator $\{\lambda_i\}$ mit der Eigenschaft, daß für unendlich viele Indizes $\{n_i\}$, $\lambda_{n_i} = 1$ ist.*

Beweis. Ist das OS $\{\varphi_i(x)\}$ gleichmäßig beschränkt, so gibt es, wie Herr BANACH gezeigt hat, eine Indizesfolge $\{n_i\}$, so daß aus $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^2 < +\infty$ die Konvergenz im Mittel der Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i \varphi_{n_i}(x)$$

mit jedem Exponent $\beta < \infty$ folgt [17]. Eine leichte Überlegung zeigt, daß für jede Funktion $f(x) \in (L^\alpha)$, $\alpha > 1$, die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_{n_i}^2$ konvergiert [18]. Setzen wir nun $\lambda_{n_p} = 1$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$, $\lambda_i = 0$ für $i \neq n_p$, so gehört die Folge $\{\lambda_i\}$, wie leicht einzusehen, der Menge (L^α, L^β) an.

[16] Vgl. die unter [1]) zit. Arbeit des Herrn Kaczmarz, p. 24, Théorème 3. Für die Gültigkeit des Satzes genügt es statt der Vollständigkeit in (L^1) die Vollständigkeit in (L^δ) vorauszusetzen.

[17] S. Banach, Sur les séries lacunaires, Bull. Ac. Pol. (1933), p. 149—154.

[18] Vgl. dazu [17]) p. 153.

Satz 7. *Gegeben sei ein gleichmäßig beschränktes, in (L^1) vollständiges OS $\{\varphi_i(x)\}$.*

A. Genügen die Exponenten α, β einer der Bedingungen

1) $\alpha = 1$, $1 \leqslant \beta < \infty$;

2) $1 < \alpha \leqslant +\infty$, $\beta = \infty$,

und ist die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2$ divergent, so gibt es eine Vorzeichenverteilung $\varepsilon_i = \pm 1$, so daß die Folge $\{\varepsilon_i \lambda_i\}$ der Menge (L^α, L^β) nicht angehört.

B. Ist die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|$ divergent, so gibt es eine Vorzeichenverteilung $\varepsilon_i = \pm 1$, so daß die Folge $\{\varepsilon_i \lambda_i\}$ der Menge (L^1, L^∞) nicht angehört.

Beweis. *A.* Da $(L^1, L^\beta) = (L^{\beta'}, L^\infty)$ ist [19], so genügt es nur A 1) zu beweisen. Wir setzen voraus, daß bei beliebiger Vorzeichenverteilung die Folge $\{\varepsilon_i \lambda_i\}$ der Menge (L^1, L^β) angehört. Nach Satz 4 gilt (13) fast überall, woraus die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \varphi_i^2(t) \varphi_i^2(x)$$

für fast alle x, t folgt [20]. Indem wir nun, analog wie beim Beweise des Satzes 5, den EGOROFF'schen Satz anwenden, sehen wir, daß die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2 \varphi_i^2(t)$ für fast jedes t konvergiert. Eine nochmalige Anwendung des EGOROFF'schen Satzes ergibt endlich die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \lambda_i^2$. Dies steht aber im Widerspruch zu unserer Voraussetzung.

B. Setzen wir voraus, daß bei bei beliebiger Vorzeichenverteilung die Folge $\{\varepsilon_i \lambda_i\}$ der Menge (L^1, L^∞) angehört. Dann besteht, nach der Bemerkung zum Satze 4, bei beliebiger Vorzeichenverteilung für fast alle x, t die Ungleichung (13'), woraus für $|d_i| \leqslant 1$ die Relation

[19] Vgl. die unter [1]) zit. Arbeit des Herrn Kaczmarz, p. 23, Théorème 2.

[20] Vgl. dazu die unter [15]) zit. Arbeiten.

$$\left| \sum_{i=1}^{n} d_i \lambda_i \varphi_i(t) \varphi_i(x) \right| \leqslant M \qquad (n=1,2,3,\ldots)$$

für fast alle x, t folgt.

Nach der Bemerkung zum Hilfssatze 2 ist also die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| \, |\varphi_i(x)| \, |\varphi_i(t)|$$

für fast alle x, t konvergent. Daraus erhalten wir, wieder durch zweimalige Anwendung des Egoroff'schen Satzes, daß $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i| < +\infty$. Das widerspricht aber unserer Voraussetzung.

Bemerkung. Wir haben in den Sätzen 4, 5, 7 die Vollständigkeit des gegebenen OS vorausgesetzt. Die Behauptungen jener Sätze lassen sich auch unter anderen Voraussetzungen beweisen. Man kann z. B. statt der Vollständigkeit des OS die folgende Eigenschaft fordern:

Es soll für fast jedes x die Ungleichung

$$\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^{\infty} b_{pi} \left(\sum_{j=1}^{i} \varphi_j(x) \varphi_j(t) \right) \right| dt \leqslant M$$

bestehen. Dabei bedeutet (b_{pi}) die Matrix irgend einer zeilenfiniten Toeplitz'schen Limitierungsmethode.

(Reçu par la Rédaction le 18. 4. 1934).