[3] M. M. Day, *Strict convexity and smoothness of normed spaces*, Trans, Amer. Math. Soc. 78 (1955), pp. 516–528.
[4] V. F. Gapoškin and M. I. Kadec, *Operator bases in Banach spaces*, Mat. Sb. 61 (1963), pp. 3–12.
[5] V. I. Gurarij and M. I. Kadec, *On the minimal systems and quasicomplements in Banach spaces*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 145 (1962), 2, pp. 256–258.
[6] K. John and V. Zizler, *A renorming of dual space*, Israel J. Math. 12 (1972), pp. 331–336.
[7] W. B. Johnson, *On quasi-complements*, Pacific J. Math., to appear.
[8] J. Lindenstrauss, *On a theorem of Murray and Mackey*, An. Acad. Brasil. Ci. 39 (1967), pp. 1–6.
[9] — *Weakly compact sets, their topological properties and the Banach spaces they generate*, Proc. Symp. Infinite Dim. Topology 1967, Ann. of Math. Studies, Princeton, N. J.
[10] — *Decomposition of Banach spaces*, Indiana Univ. Journ. 20 (1971), pp. 917–919.
[11] G. W. Mackey, *Note on a theorem of Murray*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), pp. 322–325.

MATHEMATICAL INSTITUTE, CZECHOSLOVAK ACADEMY OF SCIENCES
AND
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, CHARLES UNIVERSITY, PRAGUE

Received August 4, 1972 (573)

STUDIA MATHEMATICA, T. XLIX. (1973)

Sur le comportement asymptotique de systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes non homogènes

par

C. ANDRIEU, BUI TRONG LIEU* (Paris),
R. FLAVIGNY et C. LANGRAND (Lille)

Résumé. On étudie pour des systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes non homogènes des conditions nécessaires et suffisantes d'ergodicité faible, des conditions nécessaires et suffisantes d'ergodicité forte et des liens entre ces deux modes d'ergodicité.

I. Introduction. C'est dans l'article [4] de LeCalvé et Theodorescu que la notion de systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes a été introduite. Sa définition est la suivante:

On appelle système aléatoire généralisé à liaisons complètes, une suite $\big((W_t, \mathscr{W}_t), (\mathscr{X}_{t+1}, \mathscr{B}_{t+1}), {}^t\Pi, {}^tP\big)_{t\in \boldsymbol{T}}$, ($\boldsymbol{T}$ désignant soit l'ensemble $\boldsymbol{N}$ des entiers positifs ou nul, soit l'ensemble $\boldsymbol{Z}$ des entiers relatifs), telle que pour tout $t \in \boldsymbol{T}$,

a) $(W_t, \mathscr{W}_t)$ soit un espace mesurable,

b) $(\mathscr{X}_{t+1}, \mathscr{B}_{t+1})$ soit un espace mesurable appelé „espace des états" à l'instant $t+1$,

c) ${}^t\Pi$ soit une probabilité de transition de l'espace mesurable $(W_t \times \mathscr{X}_{t+1}, \mathscr{W}_t \otimes \mathscr{B}_{t+1})$ dans l'espace mesurable $(W_{t+1}, \mathscr{W}_{t+1})$,

d) ${}^tP$ soit une probabilité de transition de l'espace mesurable $(W_t, \mathscr{W}_t)$ dans l'espace des états $(\mathscr{X}_{t+1}, \mathscr{B}_{t+1})$.

Lorsque, pour tout $(w, x) \in W_t \times \mathscr{X}_{t+1}$, la probabilité de transition ${}^t\Pi[(w, x), \cdot]$ est la probabilité de Dirac $\delta_{u_t(w,x)}(\cdot)$ dont la masse est concentrée au point $u_t(w, x)$, (où u_t est une application mesurable de $(W_t \times \mathscr{X}_{t+1}, \mathscr{W}_t \otimes \mathscr{B}_{t+1})$ dans $(W_{t+1}, \mathscr{W}_{t+1})$), on retrouve la notion de systèmes aléatoires à liaisons complètes étudiée depuis longtemps par divers auteurs roumains (voir par exemple [3]).

Comme déjà indiqué dans le résumé, notre contribution porte sur l'ergodicité faible, sur l'ergodicité forte et sur les liens entre ces notions.

* Recherche partiellement supportée par la subvention A 7223 du Conseil National de Recherches du Canada.

L'étude du comportement asymptotique des systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes nécessite l'utilisation des probabilités de transition ${}^tP_h^n$, ($n \in \mathbf{N}^*$, $h \in \mathbf{N}^*$), dont nous résumons ici la définition.

On commence par définir la probabilité de transition ${}^tP_h$ de $(W_t, \mathscr{W}_t)$ dans $\left(\prod_{j=1}^{h} \mathscr{X}_{t+j}, \bigotimes_{j=1}^{h} \mathscr{B}_{t+j}\right)$ par ${}^tP_1(w, A) = {}^tP(w, A)$ et pour $h > 1$

$$ {}^tP_h(w, A) = \int_{\mathscr{X}_{t+1}} {}^tP(w, dx_{t+1}) \int_{\mathscr{X}_{t+2}} [{}^t\Gamma_{x_{t+1}} {}^{t+1}P(\cdot, dx_{t+2})](w) \dots $$
$$ \dots \int_{\mathscr{X}_{t+h}} [{}^t\Gamma_{(x_{t+1},\dots,x_{t+h-1})} {}^{t+h-1}P(\cdot, dx_{t+h})](w) \cdot 1_A(x_{t+1}, \dots, x_{t+h}) $$

où

$$ [{}^t\Gamma_{(x_{t+1},\dots,x_{t+j})} {}^{t+j}P(\cdot, A)](w) $$
$$ = \int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x_{t+1}), dw_{t+1}] \int_{W_{t+2}} {}^{t+1}\Pi[(w_{t+1}, x_{t+2}), dw_{t+2}] \dots $$
$$ \dots \int_{W_{t+j}} {}^{t+j-1}\Pi[(w_{t+j-1}, x_{t+j}), dw_{t+j}] {}^{t+j}P(w_{t+j}, A), $$

pour $(x_{t+1}, \dots, x_{t+j}) \in \mathscr{X}_{t+1} \times \dots \times \mathscr{X}_{t+j}$, $A \in \mathscr{B}_{t+j+1}$ et $w \in W_t$.

On définit ensuite la probabilité de transition ${}^tP_h^n$ de $(W_t, \mathscr{W}_t)$ dans $\left(\prod_{j=n}^{n+h-1} \mathscr{X}_{t+j}, \bigotimes_{j=n}^{n+h-1} \mathscr{B}_{t+1}\right)$ par ${}^tP_h^1(w, B) = {}^tP_h(w, B)$ et pour $n > 1$

$$ {}^tP_h^n(w, B) = {}^tP_{h+n-1}\left(w, \prod_{j=1}^{n-1} \mathscr{X}_{t+j} \times B\right) $$

pour tout $w \in W_t$ et tout $B \in \bigotimes_{j=n}^{n+h-1} \mathscr{B}_{t+j}$.

Signalons enfin la relation (pour $n > 1$)

$$ \text{(R)} \qquad {}^tP_h^n(w, B) = \int_{\mathscr{X}_{t+1}} {}^tP(w, dx) \int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x), dw_1] {}^{t+1}P_h^{n-1}(w_1, B) $$

que nous utiliserons dans les paragraphes suivants.

Afin de conserver l'aspect succint de l'exposé, nous éviterons l'examen de tous les cas particuliers. Les deux seuls cas auxquels nous ferons appel pour illustrer certains énoncés des paragraphes II et III sont les suivants:

a) Les chaînes à liaisons complètes (avec temps initial). Elles correspondent à $\mathbf{T} = \mathbf{N}$;

$(W_t, \mathscr{W}_t) = \left(\prod_{k=0}^{t} \mathscr{X}_k, \bigotimes_{k=0}^{t} \mathscr{B}_k\right)$, où nous posons par convention $(\mathscr{X}_0, \mathscr{B}_0) = (W_0, \mathscr{W}_0)$;

${}^t\Pi(*, \cdot) = \delta_{u_t(*)}(\cdot)$, où u_t est l'application qui, à $(x_0, \dots, x_t) \in W_t$ et à $x_{t+1} \in \mathscr{X}_{t+1}$ fait correspondre $(x_0, \dots, x_t, x_{t+1}) \in W_{t+1}$.

Avec elles, pour tout $t \in \mathbf{T}$, tout $(x_0, \dots, x_t) \in W_t$, tout $(x_{t+1}, \dots, x_{t+j}) \in \prod_{k=1}^{j} \mathscr{X}_{t+k}$, tout $A \in \mathscr{B}_{t+j+1}$ et tout $B \in \bigotimes_{j=n}^{n+h-1} \mathscr{B}_{t+j}$,

$$ [{}^t\Gamma_{(x_{t+1},\dots,x_{t+j})} {}^{t+j}P(\cdot, A)](x_0, \dots, x_t) $$
$$ = {}^{t+j}P[(x_0, \dots, x_t, x_{t+1}, \dots, x_{t+j}), A] $$

et

$$ {}^tP_h^n[(x_0, \dots, x_t), B] $$
$$ = \int_{\mathscr{X}_{t+1}} {}^tP[(x_0, \dots, x_t), dx_{t+1}] \int_{\mathscr{X}_{t+2}} {}^{t+1}P[(x_0, \dots, x_{t+1}), dx_{t+2}] \dots $$
$$ \dots \int_{\mathscr{X}_{t+n+h-1}} {}^{t+n+h-2}P[(x_0, \dots, x_{t+n+h-2}), dx_{t+n+h-1}] \times $$
$$ \times 1_{\left(\prod_{k=1}^{n-1} \mathscr{X}_{t+k}\right) \times B}(x_{t+1}, \dots, x_{t+n+h-1}). $$

b) Les chaînes de Markov (avec temps initial). Elles correspondent à $\mathbf{T} = \mathbf{N}$;

$(W_t, \mathscr{W}_t) = (\mathscr{X}_t, \mathscr{B}_t)$, avec la convention $(\mathscr{X}_0, \mathscr{B}_0) = (W_0, \mathscr{W}_0)$;

${}^t\Pi(*, \cdot) = \delta_{u_t(*)}(\cdot)$, où u_t est l'application qui, à $x_t \in W_t$ et à $x_{t+1} \in \mathscr{X}_{t+1}$ fait correspondre $x_{t+1} \in \mathscr{X}_{t+1}$.

Avec elles, pour tout $t \in \mathbf{T}$, tout $x_t \in W_t$, tout $(x_{t+1}, \dots, x_{t+j}) \in \prod_{k=1}^{j} \mathscr{X}_{t+k}$, tout $A \in \mathscr{B}_{t+j+1}$ et tout $B \in \bigotimes_{j=n}^{n+h-1} \mathscr{B}_{t+j}$,

$$ [{}^t\Gamma_{(x_{t+1},\dots,x_{t+j})} {}^{t+j}P(\cdot, A)](x_t) = {}^{t+j}P(x_{t+j}, A) $$

et

$$ {}^tP_h^n(x_t, B) = \int_{\mathscr{X}_{t+n}} P_{t,t+n}(x_t, dx_{t+n}) \int_{\mathscr{X}_{t+n+1}} {}^{t+n}P(x_{t+n}, dx_{t+n+1}) \dots $$
$$ \dots \int_{\mathscr{X}_{t+n+h-1}} {}^{t+n+h-2}P(x_{t+n+h-2}, dx_{t+n+h-1}) \cdot 1_B(x_{t+n}, \dots, x_{t+n+h-1}), $$

où

$$ P_{t,t+n}(x_t, dx_{t+n}) = \int_{\mathscr{X}_{t+1}} {}^tP(x_t, dx_{t+1}) \int_{\mathscr{X}_{t+2}} {}^{t+1}P(x_{t+1}, dx_{t+2}) \dots $$
$$ \dots \int_{\mathscr{X}_{t+n-1}} {}^{t+n-2}P(x_{t+n-2}, dx_{t+n-1}) {}^{t+n-1}P(x_{t+n-1}, dx_{t+n}), $$

notation courante pour les chaînes de Markov non homogènes.

En particulier, avec $h = 1$, ${}^tP_1^n(x_t, B) = {}^tP^n(x_t, B) = P_{t,t+n}(x_t, B)$.

Les conditions nécessaires et suffisantes exposées ci-dessous contribuent à une meilleure compréhension des notions d'ergodicité faible et d'ergodicité forte. Dans cet article, nous nous intéressons aux systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes non homogènes tels que, quel que soit $t \in \boldsymbol{T}$, $\mathscr{X}_t = \mathscr{X}$ et que la tribu $\bigcap_{t\in \boldsymbol{T}} \mathscr{B}_{t+1}$ ne soit pas réduite à la tribu „chaotique" $\{\emptyset, \mathscr{X}\}$.

II. Ergodicité faible.

II.1. Définitions. Soit $\mathscr{B}$ une sous-tribu de $\bigcap_{t\in \boldsymbol{T}} \mathscr{B}_{t+1}$, soit h un entier > 0. Nous disons qu'un système aléatoire généralisé à liaisons complètes $\big((W_t, \mathscr{W}_t), (\mathscr{X}, \mathscr{B}_{t+1}), {}^t\Pi, {}^tP\big)_{t\in \boldsymbol{T}}$ est:

(1) *faiblement ergodique de puissance h*, relativement à la tribu $\mathscr{B}$, si pour tout $t \in \boldsymbol{T}$, tout $B \in \overset{h}{\otimes} \mathscr{B}$, tout $w' \in W_t$ et tout $w'' \in W_t$,

$$\lim_{n\to\infty} [{}^tP_h^n(w', B) - {}^tP_h^n(w'', B)] = 0,$$

2) *faiblement et uniformément ergodique de puissance h*, relativement à la tribu $\mathscr{B}$, si la limite

$$\lim_{n\to\infty} [{}^tP_h^n(w', B) - {}^tP_h^n(w'', B)] = 0,$$

a lieu uniformément en t, B, w' et w'',

3) *faiblement ergodique, relativement à la tribu $\mathscr{B}$*, s'il est faiblement ergodique de puissance h, relativement à la tribu $\mathscr{B}$, quel que soit $h \in \boldsymbol{N}^*$,

4) *faiblement et uniformément ergodique, relativement à la tribu $\mathscr{B}$*, s'il est faiblement et uniformément ergodique de puissance h relativement à la tribu $\mathscr{B}$, quel que soit $h \in \boldsymbol{N}^*$.

II.2. Nous vérifions aisément que les propriétés suivantes sont vraies:

1) N'importe quel système aléatoire généralisé à liaisons complètes $\big((W_t, \mathscr{W}_t), (\mathscr{X}, \mathscr{B}_{t+1}), {}^t\Pi, {}^tP\big)_{t\in \boldsymbol{T}}$ est faiblement ergodique, relativement à la tribu chaotique $\{\emptyset, \mathscr{X}\}$. C'est la raison pour laquelle nous avons supposé la tribu $\bigcap_{t\in \boldsymbol{T}} \mathscr{B}_{t+1}$ non chaotique.

2) Si un système aléatoire généralisé à liaisons complètes $\big((W_t, \mathscr{W}_t), (\mathscr{X}, \mathscr{B}_{t+1}), {}^t\Pi, {}^tP\big)_{t\in \boldsymbol{T}}$ est faiblement ergodique de puissance h, relativement à une tribu $\mathscr{B}$ $\big(\mathscr{B} \subset \bigcap_{t\in \boldsymbol{T}} \mathscr{B}_{t+1}\big)$, il est aussi faiblement ergodique de puissance h, relativement à une sous-tribu $\mathscr{B}'$ de $\mathscr{B}$. Ainsi, s'il est faiblement ergodique de puissance h, relativement à la fois à une tribu $\mathscr{B}_1$ et à une tribu $\mathscr{B}_2$ $\big(\mathscr{B}_1 \subset \bigcap_{t\in \boldsymbol{T}} \mathscr{B}_{t+1}$ et $\mathscr{B}_2 \subset \bigcap_{t\in \boldsymbol{T}} \mathscr{B}_{t+1}\big)$, alors il est aussi faiblement ergodique de puissance h, relativement à la tribu $\mathscr{B}_1 \cap \mathscr{B}_2$.

3) Si un système aléatoire généralisé à liaisons complètes $\big((W_t, \mathscr{W}_t), (\mathscr{X}, \mathscr{B}_{t+1}), {}^t\Pi, {}^tP\big)_{t\in \boldsymbol{T}}$ est faiblement ergodique de puissance h relativement à une tribu $\mathscr{B}$ $\big(\mathscr{B} \subset \bigcap_{t\in \boldsymbol{T}} \mathscr{B}_{t+1}\big)$, il est faiblement ergodique de puissance h' relativement à la même tribu $\mathscr{B}$, quel que soit $h' \in \boldsymbol{N}^*$ tel que $h' \leqslant h$.

II.3. Proposition. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système aléatoire généralisé à liaisons complètes $\big((W_t, \mathscr{W}_t), (\mathscr{X}, \mathscr{B}_{t+1}), {}^t\Pi, {}^tP\big)_{t\in \boldsymbol{T}}$ soit faiblement ergodique de puissance h relativement à une sous-tribu non chaotique $\mathscr{B}$ de $\bigcap_{t\in \boldsymbol{T}} \mathscr{B}_{t+1}$ est que, pour tout $t \in \boldsymbol{T}$, il existe une suite de probabilités $({}^t\nu_h^n)_{n\in \boldsymbol{N}^*}$ définies sur $\overset{h}{\otimes} \mathscr{B}$, telles que pour tout $w \in W_t$ et tout $B \in \overset{h}{\otimes} \mathscr{B}$,*

$$\lim_{n\to\infty} [{}^tP_h^n(w, B) - {}^t\nu_h^n(B)] = 0.$$

Démonstration.

Condition nécessaire: Supposons que le système aléatoire généralisé à liaisons complètes soit faiblement ergodique. Pour chaque t fixé $\in \boldsymbol{T}$, considérons une probabilité ν_t sur $\mathscr{W}_t$, et posons, pour $B \in \overset{h}{\otimes} \mathscr{B}$,

$${}^t\nu_h^n(B) = \int_{W_t} \nu_t(dw_1)\,{}^tP_h^n(w_1, B).$$

Nous avons ainsi construit une suite de probabilités $({}^t\nu_h^n)_{n\in \boldsymbol{N}^*}$ sur $\overset{h}{\otimes} \mathscr{B}$. Pour tout $t \in \boldsymbol{T}$, tout $w \in W_t$ et tout $B \in \overset{h}{\otimes} \mathscr{B}$, nous avons, d'après le théorème de Fatou–Lebesgue et d'après l'hypothèse d'ergodicité faible de puissance h:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \Big[{}^tP_h^n(w, B) - {}^t\nu_h^n(B)\Big] &= \lim_{n\to\infty} \Big[{}^tP_h^n(w, B) - \int_{W_t} \nu_t(dw_1)\,{}^tP_h^n(w_1, B)\Big] \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{W_t} [{}^tP_h^n(w, B) - {}^tP_h^n(w_1, B)]\,\nu_t(dw_1) \\ &= \int_{W_t} \lim_{n\to\infty} [{}^tP_h^n(w, B) - {}^tP_h^n(w_1, B)]\,\nu_t(dw_1) = 0.\end{aligned}$$

Condition suffisante: Supposons que, pour tout $t \in \boldsymbol{T}$, il existe une suite de probabilités $({}^t\nu_h^n)_{n\in \boldsymbol{N}^*}$ telle que, pour tout $w \in W_t$ et tout $B \in \overset{h}{\otimes} \mathscr{B}$,

$$\lim_{n\to\infty} [{}^tP_h^n(w, B) - {}^t\nu_h^n(B)] = 0.$$

Pour tout $B \in \overset{h}{\otimes} \mathscr{B}$, tout $w \in W_t$ (resp. tout $w' \in W_t$) et tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_1(\varepsilon, B, w) \in \boldsymbol{N}^*$ (resp. $n_2(\varepsilon, B, w') \in \boldsymbol{N}^*$) tel que $n > n_1$ (resp. $n > n_2$) entraîne que

$$|{}^tP_h^n(w, B) - {}^t\nu_h^n(B)| < \varepsilon/2$$

$$(\text{resp. } |{}^tP_h^n(w', B) - {}^t\nu_h^n(B)| < \varepsilon/2).$$

Par conséquent, $n > \max(n_1, n_2)$ entraîne que

$$|{}^tP_h^n(w, B) - {}^tP_h^n(w', B)| < \varepsilon.$$

II.4. PROPOSITION. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système aléatoire généralisé à liaisons complètes* $((W_t, \mathscr{W}_t), (\mathscr{X}, \mathscr{B}_{t+1}), {}^t\Pi, {}^tP)_{t\in T}$ *soit faiblement ergodique de puissance h, relativement à une sous-tribu non chaotique $\mathscr{B}$ de $\bigcap_{t\in T} \mathscr{B}_{t+1}$ est que, pour tout $t \in T$, tout $w \in W_t$, il existe une probabilité ${}^t\nu_w$ définie sur $\mathscr{W}_t$, telle que, pour tout $B \in \overset{h}{\otimes} \mathscr{B}$, tout $w' \in W_t$, tout $w'' \in W_t$,*

(i) $$\lim_{n\to\infty} [{}^tP_h^n(w', B) - \int_{W_t} {}^t\nu_{w'}(dw_1)\,{}^tP_h^n(w_1, B)] = 0,$$

(ii) $$\lim_{n\to\infty} \int_{W_t} [{}^t\nu_{w'}(dw_1) - {}^t\nu_{w''}(dw_1)]\,{}^tP_h^n(w_1, B) = 0.$$

Démonstration.

Condition nécessaire: Supposons que le système aléatoire généralisé à liaisons complètes soit faiblement ergodique de puissance h relativement à la tribu $\mathscr{B}$. Suivant le raisonnement déjà utilisé dans la condition nécessaire de la proposition II.3, pour $B \in \overset{h}{\otimes} \mathscr{B}$, formons la différence

$$ {}^tP_h^n(w', B) - \int_{W_t} {}^t\nu_{w'}(dw_1)\,{}^tP_h^n(w_1, B).$$

Nous avons, d'après le théorème de Fatou–Lebesgue et d'après l'hypothèse d'ergodicité faible de puissance h relativement à $\mathscr{B}$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} [{}^tP_h^n(w', B) - \int_{W_t} {}^t\nu_{w'}(dw_1)\,{}^tP_h^n(w_1, B)] &= \lim_{n\to\infty} \int_{W_t} {}^t\nu_{w'}(dw_1)\,[{}^tP_h^n(w', B) - {}^tP_h^n(w_1, B)] \\ &= \int_{W_t} {}^t\nu_{w'}(dw_1) \lim_{n\to\infty} [{}^tP_h^n(w', B) - {}^tP_h^n(w_1, B)] = 0.\end{aligned}$$

Ce qui montre que (i) est vraie.

D'autre part, puisque

$$\begin{aligned}{}^tP_h^n(w', B) - {}^tP_h^n(w'', B) = {}^tP_h^n(w', B) &- \int_{W_t} {}^t\nu_{w'}(dw_1)\,{}^tP_h^n(w_1, B) + \\ &+ \int_{W_t} [{}^t\nu_{w'}(dw_1) - {}^t\nu_{w''}(dw_1)]\,{}^tP_h^n(w_1, B) + \\ &+ \int_{W_t} {}^t\nu_{w''}(dw_1)\,{}^tP_h^n(w_1, B) - {}^tP_h^n(w'', B),\end{aligned}$$

nous avons

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_{W_t} [{}^t\nu_{w'}(dw_1) - {}^t\nu_{w''}(dw_1)]\,{}^tP_h^n(w_1, B) &= \lim_{n\to\infty} [{}^tP_h^n(w', B) - {}^tP_h^n(w'', B)] - \\ &- \lim_{n\to\infty} \Big[{}^tP_h^n(w', B) - \int_{W_t} {}^t\nu_{w'}(dw_1)\,{}^tP_h^n(w_1, B)\Big] - \\ &- \lim_{n\to\infty} \Big[\int_{W_t} {}^t\nu_{w''}(dw_1)\,{}^tP_h^n(w_1, B) - {}^tP_h^n(w'', B)\Big] = 0,\end{aligned}$$

d'après l'ergodicité faible de puissance h, relativement à la tribu $\mathscr{B}$, et d'après (i) démontrée ci-dessus. Ce qui montre que la propriété (ii) est vraie.

Condition suffisante: Pour tout $t \in T$, tout $n \in N^*$, tout $B \in \overset{h}{\otimes} \mathscr{B}$, tout $w' \in W_t$ et tout $w'' \in W_t$, nous avons

$$\begin{aligned}{}^tP_h^n(w', B) - {}^tP_h^n(w'', B) = {}^tP_h^n(w', B) &- \int_{W_t} {}^t\nu_{w'}(dw_1)\,{}^tP_h^n(w_1, B) + \\ &+ \int_{W_t} [{}^t\nu_{w'}(dw_1) - {}^t\nu_{w''}(dw_1)]\,{}^tP_h^n(w_1, B) + \\ &+ \int_{W_t} {}^t\nu_{w''}(dw_1)\,{}^tP_h^n(w_1, B) - {}^tP_h^n(w'', B).\end{aligned}$$

Or d'après (i),

$$\lim_{n\to\infty} \Big[{}^tP_h^n(w', B) - \int_{W_t} {}^t\nu_{w'}(dw_1)\,{}^tP_h^n(w_1, B)\Big] = 0$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \Big[\int_{W_t} {}^t\nu_{w''}(dw_1)\,{}^tP_h^n(w_1, B) - {}^tP_h^n(w'', B)\Big] = 0.$$

Et d'après (ii),

$$\lim_{n\to\infty} \int_{W_t} [{}^t\nu_{w'}(dw_1) - {}^t\nu_{w''}(dw_1)]\,{}^tP_h^n(w_1, B) = 0.$$

Ce qui montre que

$$\lim_{n\to\infty} [{}^tP_h^n(w', B) - {}^tP_h^n(w'', B)] = 0,$$

c'est à dire que le système aléatoire généralisé à liaisons complètes est faiblement ergodique de puissance h relativement à la tribu $\mathscr{B}$.

Le résultat suivant, vrai dans le cas où, de plus, $(W_t, \mathscr{W}_t)$ est indépendant de t, est un corollaire de la proposition II.4 précédente

II.5. PROPOSITION. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système aléatoire généralisé à liaisons complètes* $((W, \mathscr{W}), (\mathscr{X}, \mathscr{B}_{t+1}), {}^t\Pi, {}^tP)_{t\in T}$ *soit faiblement ergodique de puissance h, relativement à une sous-tribu non chaotique $\mathscr{B}$ de $\bigcap_{t\in T} \mathscr{B}_{t+1}$ est qu'il existe $x_0 \in \mathscr{X}$ tel que, pour tout $t \in T$, tout $B \in \overset{h}{\otimes} \mathscr{B}$, tout $w' \in W$ et tout $w'' \in W$,*

(i) $$\lim_{n\to\infty} \big({}^tP_h^n(w', B) - [{}^t\Gamma_{x_0}\,{}^tP_h^n(\cdot, B)](w')\big) = 0,$$

(ii) $$\lim_{n\to\infty} \big([{}^t\Gamma_{x_0}\,{}^tP_h^n(\cdot, B)](w') - [{}^t\Gamma_{x_0}\,{}^tP_h^n(\cdot, B)](w'')\big) = 0.$$

Démonstration. Puisque

$$[{}^t\Gamma_{x_0}\,{}^tP_h^n(\cdot, B)](w) = \int_W {}^t\Pi[(w, x_0), dw_1]\,{}^tP_h^n(w_1, B),$$

il suffit d'appliquer la proposition II.4 à ${}^t\nu_w(\cdot) = {}^t\Pi[(w, x_0), \cdot]$ pour obtenir le résultat énoncé.

II.6. Proposition. *Soit* $\big((W_t, \mathscr{W}_t), (\mathscr{X}, \mathscr{B}_{t+1}), {}^t\Pi, {}^tP\big)_{t\in \boldsymbol{T}}$ *un système aléatoire généralisé à liaisons complètes et soit* $\mathscr{B}$ *une sous-tribu non chaotique de la tribu* $\bigcap_{t\in\boldsymbol{T}} \mathscr{B}_{t+1}$. *Les trois énoncés suivants sont équivalents:*

(i) *Le système aléatoire généralisé à liaisons complètes est faiblement ergodique de puissance* h, *relativement à* $\mathscr{B}$.

(ii) *Pour tout* $t\in\boldsymbol{T}$ *et tout* $B\in \overset{h}{\otimes}\mathscr{B}$, *chaque fois qu'une suite croissante d'indices entiers positifs* $(n_j)_{j\in\boldsymbol{N}^*}$ *est telle que, quand* $j\to\infty$,

$$\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x), dw_1]\,{}^{t+1}P_h^{n_j}(w_1, B)$$

converge pour un couple $(w, x)\in W_t\times\mathscr{X}$, *alors cette même suite d'indices* $(n_j)_{j\in\boldsymbol{N}^*}$ *est telle que, pour tout couple* $(w', x')\in W_t\times\mathscr{X}$,

$$\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w', x'), dw_1]\,{}^{t+1}P_h^{n_j}(w_1, B)$$

converge aussi, et la limite est indépendante de (w', x').

(iii) *Pour tout* $t\in\boldsymbol{T}$, *tout* $B\in\overset{h}{\otimes}\mathscr{B}$, *tout* $(w, x)\in W_t\times\mathscr{X}$ *et tout* $(w', x')\in W_t\times\mathscr{X}$,

$$\lim_{n\to\infty}\Big[\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x), dw_1]\,{}^{t+1}P_h^{n}(w_1, B) - \int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w', x'), dw_1]\,{}^{t+1}P_h^{n}(w_1, B)\Big] = 0.$$

Démonstration.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Pour tout $t\in\boldsymbol{T}$ et tout $B\in\overset{h}{\otimes}\mathscr{B}$, soit une suite croissante d'indices entiers positifs $(n_j)_{j\in\boldsymbol{N}^*}$ telle que, quand $j\to\infty$,

$$\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x), dw_1]\,{}^{t+1}P_h^{n_j}(w_1, B)$$

converge pour un couple $(w, x)\in W_t\times\mathscr{X}$. Une telle suite $(n_j)_{j\in\boldsymbol{N}^*}$ existe (car les nombres

$$\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x), dw_1]\,{}^{t+1}P_h^{n}(w_1, B)$$

sont des éléments de l'intervalle compact $[0, 1]$) et dépend de t et de B; l'énoncé (ii) indique qu'elle ne dépend pas de (w, x), et qu'il en est de même de

$$\lim_{j\to\infty}\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x), dw_1]\,{}^{t+1}P_h^{n_j}(w_1, B).$$

En effet par hypothèse, le système aléatoire généralisé à liaisons complètes est faiblement ergodique de puissance h, relativement à la tribu $\mathscr{B}$. La condition nécessaire de la proposition II.3 permet d'affirmer que, pour tout $t\in\boldsymbol{T}$, il existe une suite de probabilités $({}^t\nu_h^n)_{n\in\boldsymbol{N}^*}$ définies sur la tribu $\overset{h}{\otimes}\mathscr{B}$, telle que pour tout $w''\in W_t$ et tout $B\in\overset{h}{\otimes}\mathscr{B}$,

$$\lim_{n\to\infty}[{}^{t+1}P_h^n(w'', B) - {}^{t+1}\nu_h^n(B)] = 0.$$

Donc, pour la suite $(n_j)_{j\in\boldsymbol{N}^*}$ en particulier, nous avons aussi

$$\lim_{j\to\infty}[{}^{t+1}P_h^{n_j}(w'', B) - {}^{t+1}\nu_h^{n_j}(B)] = 0.$$

Par conséquent, pour le couple $(w, x)\in W_t\times\mathscr{X}$, nous avons

$$\begin{aligned}\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x), dw_1]&\lim_{j\to\infty}[{}^{t+1}P_h^{n_j}(w_1, B) - {}^{t+1}\nu_h^{n_j}(B)]\\ &= \lim_{j\to\infty}\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x), dw_1]\,[{}^{t+1}P_h^{n_j}(w_1, B) - {}^{t+1}\nu_h^{n_j}(B)]\\ &= \lim_{j\to\infty}\Big[\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x), dw_1]\,{}^{t+1}P_h^{n_j}(w_1, B) - \\ &\qquad - \int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x), dw_1]\,{}^{t+1}\nu_h^{n_j}(B)\Big] = 0.\end{aligned}$$

Or, pour le couple (w, x), la limite

$$\lim_{j\to\infty}\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x), dw_1]\,{}^{t+1}P_h^{n_j}(w_1, B)$$

existe. Nous avons donc

$$\begin{aligned}\lim_{j\to\infty}&\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x), dw_1]\,{}^{t+1}P_h^{n_j}(w_1, B)\\ &= \lim_{j\to\infty}\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x), dw_1]\,{}^{t+1}\nu_h^{n_j}(B) = \lim_{j\to\infty}{}^{t+1}\nu_h^{n_j}(B).\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $\lim_{j\to\infty}{}^{t+1}\nu_h^{n_j}(B)$ existe. Avec cette même suite d'indices $(n_j)_{j\in\boldsymbol{N}^*}$, quel que soit $(w', x')\in W_t\times\mathscr{X}$, nous avons encore

$$\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w', x'), dw_1]\lim_{j\to\infty}[{}^{t+1}P_h^{n_j}(w_1, B) - {}^{t+1}\nu_h^{n_j}(B)] = 0,$$

c'est à dire, comme précédemment,

$$\lim_{j\to\infty}\Big[\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w', x'), dw_1]\,{}^{t+1}P_h^{n_j}(w_1, B) - \int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w', x'), dw_1]\,{}^{t+1}\nu_h^{n_j}(B)\Big] = 0,$$

c'est à dire

$$\lim_{j\to\infty}\Big[\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w',x'),dw_1]^{t+1}P_h^{n_j}(w_1,B)-{}^{t+1}\nu_h^{n_j}(B)\Big]=0.$$

Comme la limite $\lim\limits_{j\to\infty}{}^{t+1}\nu_h^{n_j}(B)$ existe, nous avons donc

$$\lim_{j\to\infty}\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w',x'),dw_1]^{t+1}P_h^{n_j}(w_1,B)=\lim_{j\to\infty}{}^{t+1}\nu_h^{n_j}(B),$$

indépendante de (w',x'). Ce qui montre que (i) implique (ii).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Supposons que, pour tout $t\in\boldsymbol{T}$ et tout $B\in\overset{h}{\otimes}\mathscr{B}$, chaque fois qu'une suite d'indices entiers positifs $(n_j)_{j\in\boldsymbol{N}^*}$ est telle que, quand $j\to\infty$,

$$\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w,x),dw_1]^{t+1}P_h^{n_j}(w,B)$$

converge pour un couple $(w,x)\in W_t\times\mathscr{X}$, alors avec cette même suite d'indices $(n_j)_{j\in\boldsymbol{N}^*}$, pour tout couple $(w',x')\in W_t\times\mathscr{X}$,

$$\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w',x'),dw_1]^{t+1}P_h^{n_j}(w_1,B)$$

converge aussi, et la limite est indépendante de (w',x').

Pour une telle suite $(n_j)_{j\in\boldsymbol{N}^*}$,

$$\lim_{j\to\infty}\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w,x),dw_1]^{t+1}P_h^{n_j}(w_1,B)=\lim_{j\to\infty}\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w',x'),dw_1]^{t+1}P_h^{n_j}(w_1,B).$$

Considérons maintenant la suite

$$\Big(\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w,x),dw_1]^{t+1}P_h^{n}(w_1,B)-\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w',x'),dw_1]^{t+1}P_h^{n}(w_1,B)\Big)_{n\in\boldsymbol{N}^*}$$

qui est une suite de nombres de l'intervalle compact $[-1,+1]$. Nous pouvons donc en extraire une sous-suite convergente

$$\Big(\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w,x),dw_1]^{t+1}P_h^{n_k}(w_1,B)-\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w',x'),dw_1]^{t+1}P_h^{n_k}(w_1,B)\Big)_{k\in\boldsymbol{N}^*}.$$

Mais, de la suite

$$\Big(\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w,x),dw_1]^{t+1}P_h^{n_k}(w_1,B)\Big)_{k\in\boldsymbol{N}^*}$$

qui est une suite de nombres de l'intervalle compact $[0,1]$, nous pouvons aussi extraire une sous-suite convergente

$$\Big(\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w,x),dw_1]^{t+1}P_h^{n_{k_m}}(w_1,B)\Big)_{m\in\boldsymbol{N}^*}.$$

(ii) assure que

$$\lim_{m\to\infty}\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w,x),dw_1]^{t+1}P_h^{n_{k_m}}(w_1,B)=\lim_{m\to\infty}\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w',x'),dw_1]^{t+1}P_h^{n_{k_m}}(w_1,B)$$

c'est à dire que

$$\lim_{m\to\infty}\Big[\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w,x),dw_1]^{t+1}P_h^{n_{k_m}}(w_1,B)-\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w',x'),dw_1]^{t+1}P_h^{n_{k_m}}(w_1,B)\Big]=0.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\Big[&\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w,x),dw_1]^{t+1}P_h^{n_k}(w_1,B)-\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w',x'),dw_1]^{t+1}P_h^{n_k}(w_1,B)\Big]\\ &=\lim_{m\to\infty}\Big[\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w,x),dw_1]^{t+1}P_h^{n_{k_m}}(w_1,B)-\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w',x'),dw_1)]^{t+1}P_h^{n_{k_m}}(w_1,B)\Big]=0.\end{aligned}$$

Ainsi, toute sous-suite convergente extraite de la suite

$$\Big(\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w,x),dw_1]^{t+1}P_h^{n}(w_1,B)-\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w',x'),dw_1]^{t+1}P_h^{n}(w_1,B)\Big)_{n\in\boldsymbol{N}^*}$$

converge vers 0. D'où

$$\lim_{n\to\infty}\Big[\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w,x),dw_1]^{t+1}P_h^{n}(w_1,B)-\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w',x'),dw_1]^{t+1}P_h^{n}(w_1,B)\Big]=0,$$

c'est à dire (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i): En intégrant les deux membres de l'égalité de (iii) par rapport à ${}^tP(w,\cdot)$, nous avons

$$\int_{\mathscr{X}} {}^tP(w,dx)\lim_{n\to\infty}\Big[\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w,x),dw_1]^{t+1}P_h^{n}(w_1,B)-\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w',x'),dw_1]^{t+1}P_h^{n}(w_1,B)\Big]=0,$$

c'est à dire encore

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathscr{X}} {}^tP(w, dx)\Big[\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x), dw_1]^{t+1}P_h^n(w_1, B) - \\ - \int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w', x'), dw_1]^{t+1}P_h^n(w_1, B)\Big] = 0,$$

c'est à dire, d'après la relation (R),

$$\lim_{n\to\infty}\Big[{}^tP_h^{n+1}(w, B) - \int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w', x'), dw_1]^{t+1}P_h^n(w_1, B)\Big] = 0.$$

Puis, en intégrant cette fois par rapport à ${}^tP(w', \cdot)$, nous obtenons:

$$\int_{\mathscr{X}} {}^tP(w', dx')\lim_{n\to\infty}\Big[{}^tP_h^{n+1}(w, B) - \int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w', x'), dw_1]^{t+1}P_h^n(w_1, B)\Big] = 0,$$

c'est à dire

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathscr{X}} {}^tP(w', dx')\Big[{}^tP_h^{n+1}(w, B) - \int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w', x'), dw_1]^{t+1}P_h^n(w_1, B)\Big] = 0,$$

c'est à dire, toujours d'après la relation (R),

$$\lim_{n\to\infty}[{}^tP_h^{n+1}(w, B) - {}^tP_h^{n+1}(w', B)] = 0.$$

Le système aléatoire généralisé à liaisons complètes est donc faiblement ergodique de puissance h relativement à la tribu $\mathscr{B}$.

II.7. Jusqu'à présent, les résultats énoncés ne concernent que l'ergodicité faible de puissance h relativement à une sous-tribu non chaotique $\mathscr{B}$ de la tribu $\bigcap_{t\in T}\mathscr{B}_{t+1}$ des systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes $\big((W_t, \mathscr{W}_t), (\mathscr{X}, \mathscr{B}_{t+1}), {}^t\Pi, {}^tP\big)_{t\in T}$. Il est clair, cependant, que les propositions II.3, II.4, II.5 et II.6 restent valables lorsque nous substituons à l'expression „faiblement ergodique de puissance h", l'expression „faiblement ergodique", à la condition de préciser que ces énoncés sont vrais, quel que soit $h \in N^*$.

De même, nous avons des résultats analogues concernant l'ergodicité faible et uniforme de puissance h (resp. l'ergodicité faible et uniforme): les énoncés précédents restent valables lorsque nous substituons à l'expression „faiblement ergodique de puissance h", l'expression „faiblement et uniformément ergodique de puissance h" (resp. l'expression „faiblement et uniformément ergodique") à la condition de substituer à l'expression „pour tout ..., $\lim_{n\to\infty}$ ...", l'expression „$\lim_{n\to\infty}$ ..., uniformément en ..." (resp. „$\lim_{n\to\infty}$ ..., uniformément en ..." à la condition de préciser que les énoncés sont vrais quel que soit $h \in N^*$).

II.8. Dans le cas particulier des chaînes à liaisons complètes (avec temps initial), l'énoncé (iii) de II.6 devient:

„Pour tout $t \in T$, tout $B \in \overset{h}{\otimes}\mathscr{B}$, tout $(x_0, \ldots, x_t, x) \in W_t \times \mathscr{X}$, et tout $(x_0', \ldots, x_t', x') \in W_t \times \mathscr{X}$,

$$\lim_{n\to\infty}[{}^{t+1}P_h^n[(x_0, \ldots, x_t, x), B] - {}^{t+1}P_h^n[(x_0', \ldots, x_t', x'), B]] = 0."$$

C'est exactement la définition II. 1 de l'ergodicité faible de puissance h relativement à la tribu $\mathscr{B}$, exprimée pour ces chaînes.

II.9. Dans le cas particulier des chaînes de Markov (avec temps initial), la condition nécessaire et suffisante exprimée dans la proposition II.5 devient:

„... il existe $x_0 \in \mathscr{X}$ tel que, pour tout $t \in T$, tout $B \in \overset{h}{\otimes}\mathscr{B}$, tout $x' \in \mathscr{X}$,

$$\lim_{n\to\infty}[{}^tP_h^n(x', B) - {}^tP_h^n(x_0, B)] = 0."$$

Elle est évidemment équivalente à la définition II.1, qui s'énonce:

„.... pour tout $t \in T$, tout $B \in \overset{h}{\otimes}\mathscr{B}$, tout $x' \in \mathscr{X}$ et tout $x'' \in \mathscr{X}$,

$$\lim_{n\to\infty}[{}^tP_h^n(x', B) - {}^tP_h^n(x'', B)] = 0."$$

III. Ergodicité forte et ergodicité faible. Dans ce paragraphe, après avoir donné des définitions équivalentes de l'ergodicité forte, nous examinerons les liens entre l'ergodicité forte et l'ergodicité faible des systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes.

III.1. Définition. Un système aléatoire généralisé à liaisons complètes $\big((W_t, \mathscr{W}_t), (\mathscr{X}, \mathscr{B}_{t+1}), {}^t\Pi, {}^tP\big)_{t\in T}$ est dit *fortement ergodique de puissance h*, relativement à une sous-tribu $\mathscr{B}$ de la tribu $\bigcap_{t\in T}\mathscr{B}_{t+1}$ si pour tout $t \in T$, tout $B \in \overset{h}{\otimes}\mathscr{B}$ et tout $w \in W_t$,

$$\lim_{n\to\infty}{}^tP_h^n(w, B) = \varrho_h(B),$$

où ϱ_h est une probabilité sur $\overset{h}{\otimes}\mathscr{B}$, indépendante de t et de w.

Le système aléatoire généralisé à liaisons complètes est dit *fortement ergodique relativement à la tribu $\mathscr{B}$* s'il est fortement ergodique de puissance h relativement à $\mathscr{B}$, quel que soit $h \in N^*$.

(Signalons que nous avons, pour l'ergodicité forte des systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes, des propriétés analogues à celles énoncées en II.2 pour l'ergodicité faible, propriétés que nous ne détaillons pas ici pour ne pas alourdir le texte).

La définition ci-dessus n'est, en fait, pas très „économique", car la non-dépendance de ϱ_h vis-à-vis de t est une conséquence de l'existence de la limite $\lim\limits_{n\to\infty} {}^tP_h^n(w, B)$ et de la non-dépendance de w de cette limite. Aussi, nous paraît-il intéressant et utile d'énoncer la définition équivalente suivante:

III.2. Proposition. *Un système aléatoire généralisé à liaisons complètes $((W_t, \mathscr{W}_t), (\mathscr{X}, \mathscr{B}_{t+1}), {}^t\Pi, {}^tP)_{t\in T}$ est fortement ergodique de puissance h relativement à une sous-tribu non chaotique $\mathscr{B}$ de la tribu $\bigcap\limits_{t\in T} \mathscr{B}_{t+1}$ si et seulement si pour tout $t\in T$, tout $B\in \overset{h}{\otimes}\mathscr{B}$ et tout $w\in W_t$,*

$$\lim_{n\to\infty} {}^tP_h^n(w, B) = {}^t\varrho_h(B),$$

où ${}^t\varrho_h$ est une probabilité sur $\overset{h}{\otimes}\mathscr{B}$, indépendante de w.

Démonstration. La condition suffisante, seule, est à démontrer. Pour cela, supposons que pour tout $t\in T$, tout $B\in \overset{h}{\otimes}\mathscr{B}$, et tout $w\in W_t$,

$$\lim_{n\to\infty} {}^tP_h^n(w, B) = {}^t\varrho_h(B)$$

où ${}^t\varrho_h$ est une probabilité sur $\overset{h}{\otimes}\mathscr{B}$, indépendante seulement de w. Nous utilisons la relation (R) et le théorème de Fatou–Lebesgue pour avoir

$$\begin{aligned}
{}^{t+1}\varrho_h(B) &= \int_{\mathscr{X}} {}^tP(w, dx) \int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x), dw_1]\, {}^{t+1}\varrho_h(B)\\
&= \int_{\mathscr{X}} {}^tP(w, dx) \int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x), dw_1] \lim_{n\to\infty} {}^{t+1}P_h^n(w_1, B)\\
&= \int_{\mathscr{X}} {}^tP(w, dx) \lim_{n\to\infty} \int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x), dw_1]\, {}^{t+1}P_h^n(w_1, B)\\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathscr{X}} {}^tP(w, dx) \int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x), dw_1]\, {}^{t+1}P_h^n(w_1, B)\\
&= \lim_{n\to\infty} {}^tP_h^n(w, B)\\
&= {}^t\varrho_h(B).
\end{aligned}$$

Ainsi, ${}^t\varrho_h = {}^{t+1}\varrho_h$, quel que soit $t\in T$. Ce qui montre que ${}^t\varrho_h$ est indépendante de $t\in T$.

Une autre définition équivalente s'avère également intéressante. Elle s'énonce comme suit:

III.3. Proposition. *Un système aléatoire généralisé à liaisons complètes $((W_t, \mathscr{W}_t), (\mathscr{X}, \mathscr{B}_{t+1}), {}^t\Pi, {}^tP)_{t\in T}$ est fortement ergodique de puissance h relativement à une sous-tribu non chaotique $\mathscr{B}$ de la tribu $\bigcap\limits_{t\in T} \mathscr{B}_{t+1}$ si et seulement si, pour tout $t\in T$, et tout $B\in \overset{h}{\otimes}\mathscr{B}$,*

$$\Big(\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x), dw_1]\, {}^{t+1}P_h^n(w_1, B)\Big)_{n\in N^*}$$

est convergente et sa limite est indépendante de (w, x).

Démonstration.

Condition nécessaire: D'après III.1 et le théorème de Fatou–Lebesgue, pour tout $t\in T$, tout $w\in W_t$, tout $x\in\mathscr{X}$ et tout $B\in \overset{h}{\otimes}\mathscr{B}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x), dw_1]\, {}^{t+1}P_h^n(w_1, B) &= \int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x), dw_1] \lim_{n\to\infty} {}^{t+1}P_h^n(w_1, B)\\
&= \int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x), dw_1]\, {}^{t+1}\varrho_h(B)\\
&= {}^{t+1}\varrho_h(B).
\end{aligned}$$

Condition suffisante: Pour tout $t\in T$, tout $w\in W_t$, tout $x\in\mathscr{X}$ et tout $B\in \overset{h}{\otimes}\mathscr{B}$, par hypothèse,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x), dw_1]\, {}^{t+1}P_h^n(w_1, B) = {}^{t+1}\varrho_h(B).$$

Le théorème de Vitali–Hahn–Saks (voir par exemple [5]) montre que ${}^{t+1}\varrho_h$ est une probabilité sur $\overset{h}{\otimes}\mathscr{B}$. Donc,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathscr{X}} {}^tP(w, dx) \int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x), dw_1]\, {}^{t+1}P_h^n(w_1, B)$$

existe aussi, et on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} {}^tP_h^n(w, B) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathscr{X}} {}^tP(w, dx) \int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x), dw_1]\, {}^{t+1}P_h^{n-1}(w_1, B)\\
&= \int_{\mathscr{X}} {}^tP(w, dx) \lim_{n\to\infty} \int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x), dw_1]\, {}^{t+1}P_h^{n-1}(w_1, B)\\
&= \int_{\mathscr{X}} {}^tP(w, dx)\, {}^{t+1}\varrho_h(B) = {}^{t+1}\varrho_h(B),
\end{aligned}$$

où ${}^{t+1}\varrho_h$ est une probabilité sur $\overset{h}{\otimes}\mathscr{B}$, indépendante de w. Le système aléatoire généralisé à liaisons complètes est donc fortement ergodique de puissance h relativement à la tribu $\mathscr{B}$, d'après III.2.

III.4. Il est clair que l'ergodicité forte de puissance h relativement à une sous-tribu non chaotique $\mathscr{B}$ de la tribu $\bigcap\limits_{t\in T} \mathscr{B}_{t+1}$ d'un système aléatoire généralisé à liaisons complètes non-homogène $((W_t, \mathscr{W}_t), (\mathscr{X}, \mathscr{B}_{t+1}), {}^t\Pi, {}^tP)_{t\in T}$ implique l'ergodicité faible de même puissance, relativement à la même tribu $\mathscr{B}$, de ce système aléatoire généralisé à liaisons complètes, alors que la réciproque n'est pas vraie.

Le résultat suivant permet de préciser l'hypothèse qui fait défaut à un système aléatoire généralisé à liaisons complètes faiblement ergodique de puissance h relativement à une sous-tribu non chaotique, pour être fortement ergodique de même puissance relativement à la même tribu:

III.5. Proposition. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système aléatoire généralisé à liaisons complètes* $\big((W_t, \mathscr{W}_t), (\mathscr{X}, \mathscr{B}_{t+1}), {}^t\Pi, {}^tP\big)_{t\in T}$ *soit fortement ergodique de puissance h, relativement à une sous-tribu non chaotique $\mathscr{B}$ de la tribu* $\bigcap_{t\in T} \mathscr{B}_{t+1}$, *est que:*

(i) *il soit faiblement ergodique de même puissance, relativement à la même tribu $\mathscr{B}$,*

(ii) *pour tout $t\in T$, tout $w\in W_t$, tout $x\in\mathscr{X}$ et tout $B\in \overset{h}{\otimes}\mathscr{B}$, la suite*

$$\Big(\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x), dw_1]\,{}^{t+1}P_h^n(w_1, B)\Big)_{n\in N^*}$$

soit convergente.

Démonstration.

Condition nécessaire. La condition nécessaire découle de III.4 (qui implique (i)) et de la proposition III.3 (qui implique (ii)).

Condition suffisante. L'unique (d'après l'hypothèse (ii)) valeur d'adhérence de la suite

$$\Big(\int_{W_{t+1}} {}^t\Pi[(w, x), dw_1]\,{}^{t+1}P_h^n(w_1, B)\Big)_{n\in N^*}$$

est indépendante de (w, x) (d'après la proposition II.6. (ii) et par l'intermédiaire de (i)). Donc, le système aléatoire généralisé à liaisons complètes est fortement ergodique de puissance h relativement à la tribu $\mathscr{B}$, d'après la proposition III.3.

III.6. La remarque faite en II.7 sur l'ergodicité faible est encore vraie pour l'ergodicité forte. Les propositions III.2, III.3, III.4 et III.5 restent valables lorsque nous substituons à l'expression „fortement ergodique de puissance h", l'expression „fortement ergodique" en précisant que ces énoncés sont vrais, quel que soit $h\in N^*$.

III.7. Nous avons donné dans III.1 la définition de l'ergodicité forte de puissance h (resp. l'ergodicité forte). Nous disons qu'un système aléatoire généralisé à liaisons complètes $\big((W_t, \mathscr{W}_t), (\mathscr{X}, \mathscr{B}_{t+1}), {}^t\Pi, {}^tP\big)_{t\in T}$ est fortement et uniformément ergodique de puissance h relativement à une sous-tribu non chaotique $\mathscr{B}$ de $\bigcap_{t\in T}\mathscr{B}_{t+1}$ si

$$\lim_{n\to\infty} {}^tP_h^n(w, B) = \varrho_h(B)$$

uniformément en t, B, w; où ϱ_h est une probabilité sur $\overset{h}{\otimes}\mathscr{B}$ indépendante de t et de w.

Nous disons qu'il est fortement et uniformément ergodique s'il est fortement et uniformément ergodique de puissance h, quel que soit $h\in N^*$.

Et nous remarquons que, dans le cas *homogène*, c'est à dire celui où $(W_t, \mathscr{W}_t)$, $(\mathscr{X}, \mathscr{B}_{t+1})$, ${}^t\Pi$ et ${}^tP$ sont tous indépendants de t, nous pouvons dire que: „le système aléatoire généralisé à liaisons complètes est fortement et uniformément ergodique si et seulement si $\alpha(P_h^n)\to 1$ quand $n\to\infty$";

($\alpha(P_h^n)$ désigne le coefficient ergodique de la probabilité de transition P_h^n:

$$\alpha(P_h^n) = 1 - \sup_{\substack{(w,w')\in W^2\\ B\in \overset{h}{\otimes}\mathscr{B}}} |P_h^n(w, B) - P_h^n(w', B)|)$$

car (dans le cas homogène), l'ergodicité forte et uniforme est équivalente à l'ergodicité faible et uniforme (voir [4], et dans le cas particulier des chaînes de Markov, [2]).

References

[1] C. Andrieu, Bui Trong Lieu, R. Flavigny et C. Langrand, *Sur les systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris 274 (1972), p. 1560–1562.

[2] Bui Trong Lieu et M. Dorel, *Sur le comportement asymptotique de processus de Markov non homogènes*, Studia Math. 28 (1967), p. 253–274.

[3] M. Iosifescu et R. Theodorescu, *Random processes and learning*, 1969.

[4] G. Lecalve et R. Theodorescu, *Systèmes aléatoires généralisés à liaisons complètes*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 19 (1971), p. 19–28.

[5] J. Neveu, *Bases mathématiques du Calcul des Probabilités*, 1964.

Received October 15, 1972 (607)