THEOREM 2. *Let V be an infinite-dimensional Banach space, and let $L(V)$ be the set of all closed subspaces of V partially ordered by set inclusion. Then $(L(V), \leqslant)$ admits an orthocomplementation if and only if $(L(V), \leqslant)$ admits a full set of probability measures.*

Proof. Assume that $(L(V), \leqslant)$ admits a full set of probability measures. Then from the lemma it follows that $(L(V), \leqslant)$ admits an orthocomplementation. Conversely, assume that $(L(V), \leqslant)$ admits an orthocomplementation $A \to A^{\perp}$ where $A \in L(V)$. From Kakutani and Mackey's theorem (Theorem 1) it follows that there exists an inner product $(\cdot, \cdot)$ on $V \times V$ such that V is a Hilbert space with respect to $(\cdot, \cdot)$ (we denote this space by H), and the orthocomplemented partially ordered set $(L(V), \leqslant, {}^{\perp})$ concides with the orthocomplemented partially ordered set of closed subspaces of H. For each $A \in L(V)$, let P_A be the orthogonal projection onto A. For every vector u in the unit sphere S^1 of H, let m_u be a function from $L(V)$ into $[0, 1]$ defined by $m_u(A) = (P_A u, u)$ for all $A \in L(V)$. We claim that $M = \{m_u \colon u \in S^1\}$ is a full set of probability measures on $(L(V), \leqslant)$ in the sense of the definition given above. In fact, we clearly have $A_1 \subset A_2$ if and only if $(P_{A_1} u, u) \leqslant (P_{A_2} u, u)$ for all $u \in S^1$, i.e. if and only if $m(A_1) \leqslant m(A_2)$ for all $m \in M$. Let $A_1, A_2, \ldots$ be a sequence of members of $L(V)$ satisfying $m(A_i) + m(A_j) \leqslant 1$ for $i \neq j$ and all $m \in M$. This means that $A_1, A_2, \ldots$ is an orthogonal sequence of closed subspaces of H. Let $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots$ and let $B = A^{\perp}$, the orthogonal complement of A. We have $B \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots = H$, which implies $m(B) + m(A_1) + m(A_2) + \ldots = 1$ for all $m \in M$. Hence both condition (i) and (ii) of the definition hold and M is a full set of probability measures on the partially ordered set $(L(V), \leqslant)$ of closed subspaces of V. This concludes the proof of the theorem.

From the theorem of Kakutani and Mackey and from Theorem 2 we obtain the following corollary.

COROLLARY. *The topology of an infinite-dimensional Banach space V coincides with a Hilbert space topology if and only if the partially ordered set of closed subspaces of V admits a full set of probability measures.*

References

[1] S. Kakutani and G. W. Mackey, *Rings and lattice characterization of complex Hilbert space*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), pp. 727–733.

[2] G. W. Mackey, *The Mathematical Foundation of Quantum Mechanics*, New York 1963.

[3] M. J. Mączyński, *On a functional representation of the lattice of projections on a Hilbert space*, Studia Math. 48 (1973), pp. 253–259.

[4] V. S. Varadarajan, *Geometry of Quantum Theory*, Vol. I., Princeton, New Jersey 1968.

Received November 28, 1972 (621)

STUDIA MATHEMATICA, T. XLIX. (1974)

Relativ vollstetige Störungen von gewöhnlichen Differentialoperatoren höherer Ordnung

von

E. MÜLLER-PFEIFFER (Erfurt, DDR)

Zusammenfassung. Für gewöhnliche Differentialoperatoren geradzahliger Ordnung, die halbbeschränkt nach unten sind und deren wesentliches Spektrum bekannt ist, werden mit Hilfe eines Satzes von Birman aus der Störungstheorie quadratischer Formen Störungen der Koeffizienten der Operatoren beschrieben, die das wesentliche Spektrum nicht verändern.

Im folgenden werden selbstadjungierte Differentialoperatoren betrachtet, die von dem Differentialausdruck

$$l[\cdot] = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} \frac{d^{n-\nu}}{dx^{n-\nu}} a_\nu(x) \frac{d^{n-\nu}}{dx^{n-\nu}}, \qquad x \geqslant 0,$$

erzeugt werden. Dabei sei jeder Koeffizient $a_\nu(x)$, $x \geqslant 0$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, eine reelle Funktion, die bis zur Ordnung $n-\nu-1$ stetig differenzierbar ist und deren Ableitung der Ordnung $n-\nu-1$ eine auf $[0, \infty)$ absolut stetige Funktion ist, deren Ableitung auf jedem endlichen Teilintervall von $[0, \infty)$ im Lebesgueschen Sinne quadratisch integrierbar ist. Dieser Sachverhalt kann kürzer durch

$$\text{(I)} \qquad a_\nu(x) \in W^{n-\nu}_{2,\mathrm{loc}}[0, \infty), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

beschrieben werden, wenn man den Begriff des Sobolevschen Raumes verwendet [8]. $a_0(x)$ sei gleich einer Konstanten $a_0 > 0$. Gehört die (komplexwertige) Funktion $y(x)$ zu $C_0^\infty(0, \infty)$(1), so liegt $l[y]$ nach den über die Koeffizienten $a_\nu(x)$ getroffenen Voraussetzungen im Hilbertraum $L_2(0, \infty)$. Durch die Festlegung

$$Ay = l[y], \qquad y \in D(A) = C_0^\infty(0, \infty),$$

wird dann ein symmetrischer Operator A mit dem Definitionsbereich $D(A)$ definiert. Im folgenden soll ein Satz über die Lokalisierung des

(1) $C_0^\infty(0, \infty)$ ist die Menge der auf der positiven x-Achse beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger.

wesentlichen Spektrums (2) selbstadjungierter Erweiterungen des Operators A bewiesen werden, der bekannte Resultate von Glazman [3] und Birman [1] verallgemeinert.

Über die Koeffizienten $a_\nu(x)$ werden weitere Voraussetzungen gemacht:

(II) $$\sup_{x\in[0,\infty)} \int_x^{x+\omega} |a_\nu(t)|\,dt = o(1), \qquad \omega \to 0,\ \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

(III) Für jedes $\omega > 0$ gelte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} a_\nu(t)\,dt = \alpha_\nu, \qquad \nu = 1, \ldots, n.$$

(II) ist z. B. erfüllt, wenn die Koeffizienten beschränkte Funktionen sind. In (III) sind die α_ν Konstanten, gegen welche die Mittelwerte der $a_\nu(x)$ auf Intervallen der Länge ω streben, wenn sich die Intervalle aus dem Endlichen entfernen. Solche Mittelwerte benutzte Molčanov [4] für das Potential $q(x)$ zur Formulierung einer notwendigen und hinreichenden Bedingung für die Diskretheit des Spektrums des Schrödingeroperators $-d^2/dx^2 + q(x)$.

Wenn die Voraussetzungen (I)–(III) erfüllt sind, erweist sich der Operator A als halbbeschränkt nach unten ([5], Satz 3), so daß die Friedrichssche Erweiterung A_F von A gebildet werden kann. Alle selbstadjungierten Erweiterungen von A besitzen das gleiche wesentliche Spektrum [7]. Um das wesentliche Spektrum $C(\tilde{A})$ einer selbstadjungierten Erweiterung $\tilde{A}$ von A zu bestimmen, wird ein Satz von Birman aus der Störungstheorie quadratischer Formen verwendet. Wir erhalten folgenden

SATZ. *Für die (reellen) Koeffizienten $a_\nu(x)$, $0 \leqslant x < \infty$, $\nu = 1, \ldots, n$, des Differentialausdrucks* (1) *seien die Bedingungen* (I)–(III) *erfüllt, und es sei $a_0(x) \equiv \alpha_0 > 0$. Der Operator*

$$Ay = l[y], \qquad y \in D(A) = C_0^\infty(0, \infty),$$

ist dann halbbeschränkt nach unten, und für das wesentliche Spektrum $C(\tilde{A})$ einer beliebigen selbstadjungierten Erweiterung $\tilde{A}$ von A gilt $C(\tilde{A}) = [\mu, \infty)$, wobei

$$\mu = \min_{t\in[0,\infty)} \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu t^{n-\nu}$$

ist.

Beweis. 1.) Das wesentliche Spektrum $C(\tilde{A}_0)$ einer selbstadjungierten Erweiterung $\tilde{A}_0$ des Operators A_0, der aus A dadurch entsteht, daß die

(2) Das wesentliche Spektrum besteht im vorliegenden Fall aus allen Häufungspunkten des Spektrums.

Koeffizientenfunktionen $a_\nu(x)$ durch die Konstanten α_ν ersetzt werden,

$$A_0 y = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} \alpha_\nu y^{(2n-2\nu)}, \qquad y \in D(A_0) = C_0^\infty(0, \infty),$$

fällt mit der Halbachse $[\mu, \infty)$ zusammen [3]. Für die quadratische Form

(1) $$(A_0 y, y) = \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu \|y^{(n-\nu)}\|^2, \qquad y \in D(A_0), (3)$$

von A_0 gilt eine Gårdingsche Ungleichung

$$(A_0 y, y) \geqslant \frac{\alpha_0}{2} \|y^{(n)}\|^2 - c_1 \|y\|^2, \qquad c_1 = \text{const} > 0,$$

wofür man bei Verwendung der Norm

$$\|y\|_{W_2^n(0,\infty)} = (\|y^{(n)}\|^2 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}}$$

des Sobolevschen Raumes $W_2^n(0, \infty)$ auch

(2) $$(A_0 y, y) \geqslant \frac{\alpha_0}{2} \|y\|^2_{W_2^n(0,\infty)} - c_2 \|y\|^2, \qquad c_2 = \text{const},$$

schreiben kann. Addiert man zu α_n bzw. zu $a_n(x)$ die Konstante c_2, was für das Spektrum einer selbstadjungierten Erweiterung $\tilde{A}$ eine Verschiebung um c_2 auf der reellen Achse bedeutet, so gilt für den so abgeänderten Operator A_0 hinsichtlich seiner quadratischen Form

$$(A_0 y, y) \geqslant \frac{\alpha_0}{2} \|y\|^2_{W_2^n(0,\infty)}.$$

Was die Abschätzung der Form nach oben betrifft, so existiert eine Konstante C, daß

(3) $$(A_0 y, y) \leqslant C \|y\|^2_{W_2^n(0,\infty)}$$

gilt. (2) und (3) folgen leicht aus Abschätzungen der Gestalt

$$\|y^{(n-\nu)}\|^2 \leqslant \varepsilon \|y^{(n)}\|^2 + C_\varepsilon \|y\|^2, \qquad \varepsilon \text{ beliebig positiv},$$

die man mit Hilfe der Fouriertransformation gewinnen kann. Insgesamt erhält man

$$\frac{\alpha_0}{2} \|y\|^2_{W_2^n(0,\infty)} \leqslant (A_0 y, y) \leqslant C \|y\|^2_{W_2^n(0,\infty)}, \qquad y \in D(A_0),$$

und damit die Äquivalenz der energetischen Norm $(A_0 \cdot, \cdot)^{\frac{1}{2}}$ von A_0 mit der Norm $\|\cdot\|_{W_2^n(0,\infty)}$. Der Definitionsbereich der Friedrichsschen

(3) $(\cdot, \cdot)$ und $\|\cdot\|$ bezeichnen das Skalarprodukt und die Norm im Hilbertraum $L_2(0, \infty)$.

Erweiterung von A_0 liegt im energetischen Raum von A_0, der mit dem Raum $\mathring{W}_2^n(0,\infty)$ zusammenfällt([4]).

2.) Der Operator A geht aus A_0 durch Addition des Störoperators S,

$$Sy = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{n-\nu} \frac{d^{n-\nu}}{dx^{n-\nu}}\, s_\nu(x) \frac{d^{n-\nu}y}{dx^{n-\nu}}, \qquad y \in D(S) = C_0^\infty(0,\infty),$$
$$s_\nu(x) = a_\nu(x) - \alpha_\nu, \qquad \nu = 1, \ldots, n,$$

hervor, $A = A_0 + S$. Für die Koeffizienten $s_\nu(x)$ gelten dann die Bedingungen (I), (II) und

(III') Für jedes $\omega > 0$ gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\omega} \int_x^{x+\omega} s_\nu(t)\,dt = 0, \qquad \nu = 1, \ldots, n.$$

Der Störoperator S ist nach Birman relativ vollstetig zu A_0, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1.)

$$|(Sy, y)| \leqslant C\, \|y\|^2_{W_2^n(0,\infty)}, \qquad y \in C_0^\infty(0,\infty). \tag{4}$$

2.) Zu jeder in $\mathring{W}_2^n(0,\infty)$ beschränkten unendlichen Menge M von Elementen $y = y(x)$, $\|y\|_{W_2^n(0,\infty)} \leqslant C$, existiert eine Teilmenge $\{y_j\}_{j=1,2,\ldots}$, $y_j \in M$, so daß

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_0^\infty s_\nu(x)\, |y_j^{(n-\nu)}(x) - y_k^{(n-\nu)}(x)|^2\,dx \to 0, \qquad j, k \to \infty, \tag{5}$$

gilt.

Relative Vollstetigkeit von S bezüglich A_0 bedeutet, daß der durch

$$(Su, v) = (Tu, v)_{W_2^n(0,\infty)}, \qquad u \in D(S),\ v \in \mathring{W}_2^n(0,\infty),$$

definierte und in $\mathring{W}_2^n(0,\infty)$ wirkende Operator T vollstetig ist; T zunächst auf $C_0^\infty(0,\infty)$ erklärt wird stetig auf ganz $\mathring{W}_2^n(0,\infty)$ fortgesetzt([5]). Aus der relativen Vollstetigkeit von S bezüglich A_0 folgt dann, daß die Friedrichsschen Erweiterungen von A_0 und $A = A_0 + S$ das gleiche wesentliche Spektrum $[\mu, \infty)$ besitzen ([1], Theorem 1.2). Unser Satz ist also bewiesen, wenn wir die Gültigkeit von (4) und (5) gezeigt haben. Wir beweisen im folgenden diese beiden Eigenschaften von S gleichzeitig. Ausgangspunkt dabei ist die Formel (13) aus [5]. Setzt man

([4]) $\mathring{W}_2^n(0,\infty)$ ist die Abschließung von $C_0^\infty(0,\infty)$ in der Norm $\|\cdot\|_{W_2^n(0,\infty)}$.

([5]) Eine Beweisskizze für die Vollstetigkeit von T bei Gültigkeit von Bedingungen der Art (4) und (5) findet sich in [6].

dort $\varepsilon = h$, $\omega_\nu = \omega$, $q_1(x) = -s_\nu(x)$, $u(x) = y(x)$ und ersetzt n durch $n-\nu+1$, so ergibt sich

$$\int_{(\omega)} s_\nu(x)\, |y^{(n-\nu)}|^2\,dx \tag{6}$$
$$\leqslant h\, \|y^{(n-\nu+1)}\|^2_{(\omega)} + \frac{\mu_\omega(s_\nu) + 4h^{-1}\omega^2\, |\mu_\omega(s_\nu^+)\cdot \mu_\omega(s_\nu^-)|}{\big(1 - 2h^{-1}\omega^2 \mu_\omega(s_\nu^+)\big)\big(1 - 2h^{-1}\omega^2 \mu_\omega(s_\nu^-)\big)}\, \|y^{(n-\nu)}\|^2_{(\omega)},$$

wobei $\mu_\omega(s_\nu^+)$, $\mu_\omega(s_\nu^-)$, $\mu_\omega(s_\nu)$ die Mittelwerte

$$\mu_\omega(s_\nu^+) = \frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} s_\nu^+(x)\,dx, \qquad \mu_\omega(s_\nu^-) = \frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} s_\nu^-(x)\,dx, \qquad \mu_\omega(s_\nu) = \frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} s_\nu(x)\,dx,$$
$$s_\nu^+(x) = \max\big(s_\nu(x), 0\big), \qquad s_\nu^-(x) = \min\big(s_\nu(x), 0\big),$$

bezeichnen. Die (6) entsprechende Abschätzung für die Funktion $-s_\nu(x)$ anstelle von $s_\nu(x)$ heißt

$$-\int_{(\omega)} s_\nu(x)\, |y^{(n-\nu)}|^2\,dx \tag{7}$$
$$\leqslant h\, \|y^{(n-\nu+1)}\|^2_{(\omega)} + \frac{[-\mu_\omega(s_\nu)] + 4h^{-1}\omega^2 |\mu_\omega(s_\nu^+)\, \mu_\omega(s_\nu^-)|}{\big(1 + 2h^{-1}\omega^2 \mu_\omega(s_\nu^+)\big)\big(1 + 2h^{-1}\omega^2 \mu_\omega(s_\nu^-)\big)}\, \|y^{(n-\nu)}\|^2_{(\omega)}.$$

Aus (6) und (7) folgt dann

$$\Big|\int_{(\omega)} s_\nu(x)\, |y^{(n-\nu)}|^2\,dx\Big|$$
$$\leqslant h\, \|y^{(n-\nu+1)}\|^2_{(\omega)} + \frac{|\mu_\omega(s_\nu)| + 4h^{-1}\omega^2\, |\mu_\omega(s_\nu^+)\, \mu_\omega(s_\nu^-)|}{\big(1 - 2h^{-1}\omega^2 |\mu_\omega(s_\nu^+)|\big)\big((1 - 2h^{-1}\omega^2 |\mu_\omega(s_\nu^-)|\big)}\, \|y^{(n-\nu)}\|^2_{(\omega)}.$$

Wegen der Bedingung (II) für $s_\nu(x)$ kann ω so klein gewählt werden ($\omega \leqslant \omega_0$), daß für jedes Intervall $(x, x+\omega)$ die Abschätzung

$$\Big|\int_{(\omega)} s_\nu(x)\, |y^{(n-\nu)}|^2\,dx\Big| \tag{8}$$
$$\leqslant h\, \|y^{(n-\nu+1)}\|^2_{(\omega)} + 2\big(|\mu_\omega(s_\nu)| + 4h^{-1}\omega^2 |\mu_\omega(s_\nu^+)\, \mu_\omega(s_\nu^-)|\big)\, \|y^{(n-\nu)}\|^2_{(\omega)}$$

gilt. $h > 0$ ist fixiert. Aus der Bedingung (II) für $s_\nu(x)$ und der Bedingung (III') ergibt sich aus (8) einfacher

$$\Big|\int_x^{x+\omega} s_\nu(t)\, |y^{(n-\nu)}|^2\,dt\Big| \leqslant h\big(\|y^{(n-\nu+1)}\|^2_{(x,x+\omega)} + \|y^{(n-\nu)}\|^2_{(x,x+\omega)}\big), \tag{9}$$

wenn zunächst ω hinreichend klein $\big(\omega < \omega_1(h) \leqslant \omega_0\big)$ und dann x hinreichend groß gewählt wird $\big(x \geqslant x_1(h)\big)$. Aus (9) folgt dann durch Aneinanderfügen von Intervallen der Länge ω und Summation der entsprechenden Ungleichungen (9) die Abschätzung

$$(10)\qquad \Big|\int_x^\infty s_\nu(t)|y^{(n-\nu)}|^2\,dt\Big| \leqslant h\big(\|y^{(n-\nu+1)}\|^2_{(x,\infty)}+\|y^{(n-\nu)}\|^2_{(x,\infty)}\big),\qquad \nu=1,\dots,n,\ x\geqslant x_1(h).$$

Weiter ist für $y\in C_0^\infty(0,\infty)$

$$(11)\qquad \|y^{(n-\nu)}\|^2_{(x,\infty)}\leqslant \|y^{(n-\nu)}\|^2_{(0,\infty)}\leqslant \|y\|^2+\|y^{(n)}\|^2=\|y\|^2_{W_2^n(0,\infty)},\qquad \nu=0,1,\dots,n,$$

was man leicht mit Hilfe der Fouriertransformation

$$\hat y(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\xi x}y(x)\,dx$$

beweist: Setzt man die Funktion $y(x)$ durch Null auf die ganze x-Achse fort, so ergibt sich

$$\|y^{(n-\nu)}\|^2=\int_{-\infty}^{+\infty}|y^{(n-\nu)}|^2\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^{2(n-\nu)}|\hat y(\xi)|^2\,d\xi\leqslant\int_{-\infty}^{+\infty}(1+\xi^{2n})|\hat y|^2\,d\xi$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(|y|^2+|y^{(n)}|^2)\,dx=\|y\|^2+\|y^{(n)}\|^2.$$

Aus (10) folgt dann mit Hilfe von (11) schließlich

$$(12)\qquad \Big|\sum_{\nu=1}^n\int_x^\infty s_\nu(t)\,|y^{(n-\nu)}|^2\,dt\Big|\leqslant 2nh\,\|y\|^2_{W_2^n(0,\infty)},\qquad x\geqslant x_1(h).$$

In (12) kann $y=y(x)$ Element von $\mathring{W}_2^n(0,\infty)$ sein. Die bisherigen Abschätzungen zeigen, daß die Bedingung (4) erfüllt ist. Um die Eigenschaft (5) zu beweisen, wird eine in $\mathring{W}_2^n(0,\infty)$ beschränkte unendliche Menge M betrachtet,

$$y\in M,\qquad \|y\|_{W_2^n(0,\infty)}\leqslant C.$$

Es ist eine Folge $(y_j)_{j=1,2,\dots}$, $y_j\in M$, zu konstruieren, so daß die Konvergenz (5) gilt. $\varepsilon>0$ sei beliebig vorgegeben. In der Ungleichung

$$\Big|\sum_{\nu=1}^n\int_0^\infty s_\nu(x)|y_j^{(n-\nu)}(x)-y_k^{(n-\nu)}(x)|^2\,dx\Big|$$
$$\leqslant\Big|\sum_{\nu=1}^n\int_0^{x_2} s_\nu(x)|y_j^{(n-\nu)}(x)-y_k^{(n-\nu)}(x)|^2\,dx\Big|+$$
$$+\Big|\sum_{\nu=1}^n\int_{x_2}^\infty s_\nu(x)|y_j^{(n-\nu)}(x)-y_k^{(n-\nu)}(x)|^2\,dx\Big|$$

kann für beliebige Funktionen $y_j(x)\in M$ durch Wahl von $h=h(\varepsilon)$ in (12) ein $x_2=x_2(\varepsilon)$ angegeben werden, daß

$$(13)\qquad \Big|\sum_{\nu=1}^n\int_{x_2}^\infty s_\nu(x)|y_j^{(n-\nu)}(x)-y_k^{(n-\nu)}(x)|^2\,dx\Big|<\frac{\varepsilon}{2},\qquad j,k=1,2,\dots,$$

gilt. Da die Einbettung von $W_2^n(0,x_2)$ in $C^{n-1}(0,x_2)$ vollstetig ist ([8], S. 72, 84), existiert eine Folge $(y_j)_{j=1,2,\dots}$, $y_j\in M$, so daß

$$\sum_{\nu=1}^n\max_{x\in[0,x_2]}|y_j^{(n-\nu)}(x)-y_k^{(n-\nu)}(x)|^2\to 0,\qquad j,k\to\infty,$$

gilt, und aus der Bedingung (II) für die Koeffizienten $s_\nu(x)$ ist zu entnehmen, daß die Integrale

$$\int_0^{x_2}|s_\nu(x)|\,dx,\qquad \nu=1,\dots,n,$$

endlich sind. Es existiert daher ein $k_0(\varepsilon)$, so daß für die Folge $(y_j)_{j=1,2,\dots}$ die Abschätzung

$$\Big|\sum_{\nu=1}^n\int_0^{x_2}s_\nu(x)|y_j^{(n-\nu)}(x)-y_k^{(n-\nu)}(x)|^2\,dx<\frac{\varepsilon}{2},\qquad j,k>k_0(\varepsilon),$$

gilt. Zusammen mit (13) folgt daraus

$$\Big|\sum_{\nu=1}^n\int_0^\infty s_\nu(x)|y_j^{(n-\nu)}(x)-y_k^{(n-\nu)}(x)|^2\,dx\Big|<\varepsilon,\qquad j,k>k_0(\varepsilon).$$

Die Diagonalfolgenmethode liefert dann die gewünschte Teilfolge von $(y_j)_{j=1,2,\dots}$ — sie sei wieder mit $(y_j)_{j=1,2,\dots}$ bezeichnet—, für die

$$\sum_{\nu=1}^n\int_0^\infty s_\nu(x)\,|y_j^{(n-\nu)}(x)-y_k^{(n-\nu)}(x)|^2\,dx\to 0,\qquad j,k\to\infty,$$

gilt. Der Satz ist bewiesen.

Bemerkung. Bei der Formulierung des Satzes kann man auf die Bedingung (I) für die Koeffizienten $a_\nu(x)$ verzichten, wenn man unter $\tilde A$ denjenigen selbstadjungierten Operator versteht, der durch die quadratische Form

$$A[y,y]=\sum_{\nu=0}^n\int_0^\infty a_\nu(x)\,|y^{(n-\nu)}|^2\,dx,\qquad y\in\mathring{W}_2^n(0,\infty),$$

erzeugt wird (vergl. [9], Theorem 2.6, S. 323).

Literatur

[1] M. S. Birman, *Über das Spektrum singulärer Randwertprobleme* (russ.), Mat. Sbornik 55 (97) (1961), S. 125–174.
[2] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators II*, New York, London 1963.
[3] I. M. Glazman, *Direct Methods of Qualitative Spectral Analysis of Singular Differential Operators*, Jerusalem 1965.
[4] A. M. Molčanov, *Über Bedingungen der Diskretheit des Spektrums selbstadjungierter Differentialoperatoren zweiter Ordnung*, Tr. Mosk. matem. ob-va 2 (1953), S. 169–200.
[5] E. Müller-Pfeiffer, *Spektraleigenschaften eindimensionaler Differential-operatoren höherer Ordnung*, Studia Math. 34 (1970), S. 183–196.
[6] — *Eine Bemerkung über das Spektrum des Schrödingeroperators*, erscheint in Mathem. Nachr.
[7] M. A. Neumark, *Lineare Differentialoperatoren*, Berlin 1963.
[8] S. L. Sobolev, *Einige Anwendungen der Funktionalanalysis auf Gleichungen der mathematischen Physik*, Berlin 1964.
[9] T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*, Berlin, Heidelberg, New York 1966.

Received December 12, 1972 (620)

STUDIA MATHEMATICA, T. XLIX. (1974)

Rational approximation on arcs in C^n

by

DAVID M. WELLS (Pittsburgh, Pa.)

Abstract. Conditions on an arc in $\boldsymbol{C}^n$ are exhibited insuring that every continuous function on the arc can be uniformly approximated by rational functions with poles off the arc. Examples are given to provide negative answers to two conjectures concerning algebras of rational functions in $\boldsymbol{C}$ and $\boldsymbol{C}^2$.

Throughout this paper X will be a compact subset of $\boldsymbol{C}^n$. Whenever A is a function algebra on X we will denote the maximal ideal space of A by M_A. We are concerned with finding conditions on X which guarantee that every continuous function on X can be uniformly approximated by functions from a certain class. To this end let $C(X)$ be the uniform algebra of all continuous functions on X. Let $P(X)$, $R(X)$ and $H(X)$ respectively denote the uniform closures in $C(X)$ of the polynomials, the rational functions with poles off X, and the functions holomorphic about X. Let $\hat{X}$ and $\hat{X}_R$ respectively denote the polynomial and rational hulls of X. It is known that $\hat{X}$ and $\hat{X}_R$ are the respective maximal ideal spaces of $P(X)$ and $R(X)$, that $X \subseteq \hat{X}_R \subseteq \hat{X}$, that $P(X) = R(X)$ whenever $\hat{X}_R = \hat{X}$ and that $R(X) = H(X)$ whenever $X = \hat{X}_R$. All of this information may be found in [3] and [5].

In terms of the above notation, we are looking for conditions under which $P(X)$ or $R(X)$ coincides with $C(X)$. Since more is known about approximation in the plane than in higher dimensions, we will have occasion to consider the plane sets $X_1, \ldots, X_n$, where X_i is the image of X under the coordinate projection z_i. In case X is an arc several results, notably those due to Alexander [1] and Stolzenberg [8], give conditions on the sets X_i which guarantee that $P(X) = C(X)$. We will study $R(X)$ via the algebras $R(X_i)$, and in the case of an arc give conditions on $R(X_i)$ insuring that $R(X) = C(X)$. Our techniques will also enable us to answer some questions concerning rational convexity of sets other than arcs. The following definition will provide our starting point.

DEFINITION. A function algebra A on X is said to be *normal* on X if for any two disjoint closed sets K and L of X there is a function $f \in A$ for which $f|K = 1$ and $f|L = 0$.