STUDIA MATHEMATICA, T. XLIX. (1974)

Remarques sur les propriétés de dualité et d'interpolation des idéaux de R. Schatten

par

CHRISTIANE GAPAILLARD et PHAM THE LAI (Nantes)

Résumé. Nous considérons dans ce travail l'espace $\mathscr{C}_\varphi(H)$, un espace d'opérateurs compacts sur un espace hilbertien H, défini à l'aide d'une fonction de norme φ introduite par R. Schatten. Nous donnons une preuve du théorème de dualité pour H non nécessairement séparable et nous montrons que $\mathscr{C}_\varphi(H)$ est strictement intermédiaire entre l'espace des opérateurs nucléaires et l'espace des opérateurs compacts. Nous appliquons enfin ces résultats à l'étude des espaces $\mathscr{C}_{q,p}(H)$, introduits par H. Triebel.

H étant un espace de Hilbert, nous désignerons par $\mathscr{C}^{\omega+1}$(resp. $\mathscr{C}^\omega$, $\mathfrak{F}$) l'espace vectoriel des opérateurs linéaires continus de H dans lui-même (resp. l'idéal des opérateurs compacts, l'idéal des opérateurs de rang fini). $\mathscr{C}^{\omega+1}$ sera muni de la norme uniforme notée $|\cdot|$.

Etant donnée la suite numérique $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots)$, $\tau_n\lambda$ désignera la suite $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, 0, 0, \ldots)$; λ est dite de rang fini si tous les λ_n sont nuls sauf un nombre fini. Pour deux suites λ et μ, l'écriture $\lambda \precsim \mu$ signifie:

$$\forall j \geqslant 1, \quad \sum_{n=1}^{j} \lambda_n \leqslant \sum_{n=1}^{j} \mu_n.$$

Soit C le cône des suites positives décroissantes (au sens large) de rang fini. Une fonction numérique φ est dite *fonction de norme* si elle vérifie:

(i) $$\varphi(\lambda) > 0, \quad \forall \lambda \in C, \lambda \neq 0,$$

(ii) $$\varphi(a\lambda) = a\varphi(\lambda), \quad \forall a \geqslant 0, \forall \lambda \in C,$$

(iii) $$\varphi(\lambda+\mu) \leqslant \varphi(\lambda)+\varphi(\mu), \quad \forall \lambda \in C, \forall \mu \in C,$$

(iv) $$\varphi(1, 0, 0, \ldots) = 1,$$

(v) $$\lambda \precsim \mu \Rightarrow \varphi(\lambda) \leqslant \varphi(\mu).$$

Deux fonctions de norme φ et ψ sont équivalentes si $\exists a, b > 0$, $\forall \lambda \in C$, $a\varphi(\lambda) \leqslant \psi(\lambda) \leqslant b\varphi(\lambda)$.

Rappelons que $\mathscr{C}_\varphi$ est l'espace des opérateurs $T \in \mathscr{C}^\omega$ tels que $|T|_\varphi$

$= \lim_{n\to+\infty} \varphi(\tau_n \lambda_T) < +\infty$ où λ_T est la suite décroissante des valeurs propres de $(T^*T)^{1/2}$, chaque valeur propre figurant dans la suite un nombre de fois égal à sa multiplicité. L'application $T \rightsquigarrow |T|_\varphi$ est une norme sur $\mathscr{C}_\varphi$; muni de cette norme, $\mathscr{C}_\varphi$ est un idéal normé complet. De cette façon, on définit une correspondance biunivoque entre les fonctions de norme et les normes invariantes sur $\mathfrak{F}$ au sens de R. Schatten ([3] et [7]). Un exemple classique de tels idéaux est fourni par la fonction de norme $\varphi_p(\lambda) = \big(\sum_n \lambda_n^p\big)^{1/p}$ pour $1 \leqslant p < +\infty$. Nous obtenons ainsi les opérateurs de classe $\mathscr{C}_p$ et nous notons $|\cdot|_p$ le norme correspondante. On démontre ([3]) les inégalités:

$$|T| \leqslant |T|_\varphi \leqslant |T|_1 \leqslant +\infty$$

pour tout opérateur compact T.

En général, $\mathfrak{F}$ n'est pas dense dans $\mathscr{C}_\varphi$. $\mathscr{C}_\varphi^0$ désignera le fermeture de $\mathfrak{F}$ dans $\mathscr{C}_\varphi$. Muni de la norme induite, $\mathscr{C}_\varphi^0$ est un idéal de Banach.

Nous nous proposons de donner des propriétés de dualité et d'interpolation des espaces $\mathscr{C}_\varphi$ et nous considèrerons quelques applications aux espaces $\mathscr{C}_{q,p}$. En particulier, nous montrerons que le dual de $\mathscr{C}_{q,p}$ est $\mathscr{C}_{q',p'}$ avec $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{p'} = \dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{q'} = 1$, ce qui a été obtenu par une autre méthode dans [5].

§ 1. Propriété de dualité. Rappelons d'abord le résultat classique suivant:

LEMME 1 (R. Schatten [1]). *Pour $\lambda \in C$, on peut poser*

$$\varphi^*(\lambda) = \max_{\mu\in C} \frac{\sum_n \lambda_n \mu_n}{\varphi(\mu)},$$

φ^* est une fonction de norme et $\varphi^{**} = \varphi$.

Le théorème de dualité ci-dessous a déjà été établi par I. C. Gohberg et M. G. Krein dans [3] lorsque H est séparable. De la démonstration de ces auteurs, nous ne retiendrons qu'un résultat que nous pouvons énoncer ainsi:

LEMME 2. *Pour tout $T \in \mathscr{C}_{\varphi^*}$, on définit une forme linéaire continue F sur $\mathscr{C}_\varphi^0$ par*

$$S \rightsquigarrow F(S) = \operatorname{tr}(TS)$$

où tr *désigne la trace sur $\mathscr{C}_1$.*

De plus, on a $|F| = \sup_{S\in\mathscr{C}_\varphi^0} \dfrac{|\operatorname{tr} TS|}{|S|_\varphi} = |T|_{\varphi^*}$.

Nous utiliserons également le lemme suivant de S. T. Kuroda ([4]):

LEMME 3. *Pour une fonction de norme φ on a:*

$$\sup_{\lambda\in C} \frac{\sum_n \lambda_n}{\varphi(\lambda)} = \sup_{n\in N} \frac{n}{\varphi(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots)}.$$

THÉORÈME 4. *Soit φ une fonction de norme non équivalente à la φ-norme maximale. Le dual de $\mathscr{C}_\varphi^0$ est alors isométrique à $\mathscr{C}_{\varphi^*}$.*

Preuve. Soit $F \in (\mathscr{C}_\varphi^0)'$ alors $F \in (\mathscr{C}_1)'$ car $\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C}_\varphi^0$, donc il existe $T \in \mathscr{C}^{\omega+1}$ tel que:

$$F(S) = \operatorname{tr}(TS), \quad \forall S \in \mathscr{C}_1.$$

On représente l'opérateur T par sa forme polaire $T = U(T^*T)^{1/2}$, U étant un opérateur partiellement isométrique.

Supposons que $T \notin \mathscr{C}^\omega$. Alors $(T^*T)^{1/2} \notin \mathscr{C}^\omega$ et d'après la théorie spectrale des opérateurs positifs on peut affirmer qu'il existe une projection orthogonale P de rang infini telle que $P = G(T^*T)^{1/2}$ avec $G \in \mathscr{C}^{\omega+1}$.

Par suite $\operatorname{tr}(TSGU^*) = \operatorname{tr}(SGU^*T) = \operatorname{tr}(SP)$, $\forall S \in \mathscr{C}_1$.

Soit S une projection orthogonale de rang n sur un sous-espace de $P(H)$. Alors on a:

$$\operatorname{tr}(SP) = n$$

d'où

$$n \leqslant |S|_\varphi |F|$$

et par suite:

$$\frac{n}{\varphi(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots)} \leqslant |F|$$

puisque

$$|S|_\varphi = \varphi(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots).$$

Or, φ n'étant pas équivalente à la φ-norme maximale on a: $\sup_{\lambda\in C} \dfrac{\sum_j \lambda_j}{\varphi(\lambda)} = +\infty$ ([3]), résultat incompatible avec le lemme 3 et l'inégalité ci-dessus. Donc $T \in \mathscr{C}^\omega$.

De plus $T \in \mathscr{C}_{\varphi^*}$. En effet considérons l'égalité

$$(T^*T)^{1/2} x = \sum_j \lambda_j (x, \varphi_j) \varphi_j$$

où $(\varphi_j)_j$ est une famille orthonormale et où $(\lambda_j)_j = \lambda_T$.

Soit $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, 0, 0, \ldots)$ et posons:

$$S(x) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j (x, \varphi_j) \varphi_j \quad (S \in \mathfrak{F}).$$

Alors $F(SU^*) = \mathrm{tr}(TSU^*) = \mathrm{tr}\big(S(T^*T)^{1/2}\big) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\mu_j$ et puisque:

$$|S|_\varphi = \varphi(\mu)$$

on a:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\mu_j \leqslant \varphi(\mu)\,|F|$$

ou encore:

$$\varphi^*(\tau_n\lambda_T) \leqslant |F|, \qquad \forall n \in N$$

et comme $\big(\varphi^*(\tau_n\lambda_T)\big)_n$ est une suite croissante il vient:

$$T \in \mathscr{C}_{\varphi^*}.$$

On prouve facilement que:

$$F(S) = \mathrm{tr}(TS), \qquad \forall S \in \mathscr{C}_\varphi^0$$

car si $S \in \mathscr{C}_\varphi^0$ et si $(S_n)_{n\in N}$ est une suite de $\mathfrak{F}$ telle que $\lim_n |S - S_n|_\varphi = 0$, on a $|\mathrm{tr}(TS_n - TS)| \leqslant |TS_n - TS|_1 \leqslant |T|_{\varphi^*}|S_n - S|_\varphi$ d'où $F(S) = \mathrm{tr}(TS)$ $\forall S \in \mathscr{C}_\varphi^0$, et d'après le lemme 2, $|F| = |T|_{\varphi^*}$ ce qui achève la démonstration.

§ 2. Propriété d'interpolation. Suivant Calderón ([2]), un opérateur $\mathscr{T}$ de $\mathscr{C}^\omega$ dans $\mathscr{C}^\omega$ est dit *admissible* si $\mathscr{T}$ envoie $\mathscr{C}_1$ dans $\mathscr{C}_1$ et si $|\mathscr{T}|_\omega \leqslant 1$ et $|\mathscr{T}|_1 \leqslant 1$. Un espace de Banach $\mathscr{C}$ continûment injecté dans $\mathscr{C}^\omega$ est dit *strictement intermédiaire* si $\mathscr{T}$ envoie $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$ avec une norme inférieure ou égale à 1 pour tout $\mathscr{T}$ admissible.

Soit $\{A_0, A_1\}$ un couple d'interpolation d'espaces de Banach. On posera:

$$K(t, a, A_0, A_1) = \inf_{\substack{a = a_0 + a_1 \\ a_0 \in A_0 \\ a_1 \in A_1}} (\|a_0\|_{A_0} + t\|a_1\|_{A_1}) \qquad \text{pour } t \geqslant 0.$$

On note l_∞ et l_1 les espaces classiques de suites réelles munis de leurs normes usuelles.

Le lemme suivant que nous prouvons ici directement, est un cas particulier de la formule de Peetre dont une démonstration se trouve dans [1]. Peetre considérait seulement des mesures non atomiques.

LEMME 5. *Pour toute suite positive décroissante ξ on a:*

$$K(t, \xi, l_1, l_\infty) = \sum_{j=1}^{[t]} \xi_j + (t - [t])\,\xi_{[t]+1} \qquad si\ t \geqslant 1$$

où $[t]$ désigne la partie entière de t et $K(t, \xi, l_1, l_\infty) = t\xi_1$ si $0 \leqslant t < 1$.

Preuve. Soit $\xi = (\xi_j)_{j\in N}$ une suite positive décroissante. Pour calculer:

$$K(t, \xi, l_1, l_\infty) = \inf_{\substack{\xi = \xi' + \xi'' \\ \xi' \in l_1 \\ \xi'' \in l_\infty}} \sum_j |\xi'_j| + t\sup_j |\xi''_j|$$

il suffit de se limiter aux décompositions de ξ telles que ξ' et ξ'' soient des suites positives.

Pour $t_0 \geqslant 0$, on a:

$$K(t_0, \xi, l_1, l_\infty) \geqslant \sum_{j=1}^{[t_0]} \xi_j + (t_0 - [t_0])\,\xi_{[t_0]+1}$$

avec une convention immédiate si $[t_0] = 0$. En effet, si $\xi = \xi' + \xi''$ est une décomposition de ξ, on a:

$$\sum_{j=1}^{[t_0]} \xi_j + (t_0 - [t_0])\,\xi_{[t_0]+1} \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \xi'_j + \sum_{j=1}^{[t_0]} \xi''_j + (t_0 - [t_0])\,\xi''_{[t_0]+1}.$$

Posons $f(t) = \sum_{j=1}^{[t_0]} \xi''_j + (t - [t_0])\,\xi''_{[t_0]+1} - t\sup_j \xi''_j$.

f est une fonction décroissante de t et

$$f([t_0]) = \sum_{j=1}^{t_0} \xi''_j - [t_0]\sup_j \xi''_j \leqslant 0$$

d'où $f(t_0) \leqslant 0$ c'est-à-dire:

$$\sum_{j=1}^{[t_0]} \xi_j + (t_0 - [t_0])\,\xi_{[t_0]+1} \leqslant \inf_{\substack{\xi = \xi' + \xi'' \\ \xi' \in l_1 \\ \xi'' \in l_\infty}} \Big(\sum_j \xi'_j + t_0 \sup_j \xi''_j\Big).$$

Remarquons, par ailleurs, que si l'on désigne par ξ' la suite $(\xi_1 - \xi_{[t]+1}, \xi_2 - \xi_{[t]+1}, \ldots, \xi_{[t]} - \xi_{[t]+1}, 0, 0, \ldots)$ et par ξ'' la suite $(\underbrace{\xi_{[t]+1}, \xi_{[t]+1}, \ldots, \xi_{[t]+1}}_{[t]+1}, \xi_{[t]+2}, \ldots)$ on a: $\xi = \xi' + \xi''$ et $\sum_j \xi'_j + t\sup_j \xi''_j = \sum_{j=1}^{[t]} \xi_j + (t - [t])\,\xi_{[t]+1}$ d'où $K(t, \xi, l_1, l_\infty) \leqslant \sum_{j=1}^{[t]} \xi_j + (t - [t])\,\xi_{[t]+1}$.

THÉORÈME 6. *Soit φ une fonction de norme. Alors $\mathscr{C}_\varphi$ est un espace strictement intermédiaire.*

Preuve. Soit $\mathscr{T}$ un opérateur admissible.

Alors pour tout $T \in \mathscr{C}_\omega$ on a:

$$\lambda_{\mathscr{T}(T)} \prec \lambda_T. \tag{1}$$

En effet, considérons une décomposition quelconque de T:

$$T = T_1 + T_\omega \qquad \text{avec } T_1 \in \mathscr{C}_1,\ T_\omega \in \mathscr{C}^\omega.$$

Puisque $\mathscr{T}$ est admissible on a

$$|\mathscr{T}(T_1)|_1 \leqslant |T_1|_1 \quad \text{et} \quad |\mathscr{T}(T_\omega)| \leqslant |T_\omega|$$

et il vient:

$$|\mathscr{T}(T_1)|_1 + t|\mathscr{T}(T_\omega)| \leqslant |T_1|_1 + t|T_\omega| \quad \text{pour tout } t \geqslant 0$$

d'où: $K\big(t, \mathscr{T}(T), \mathscr{C}_1, \mathscr{C}^\omega\big) \leqslant K(t, T, \mathscr{C}_1, \mathscr{C}^\omega)$.

Par ailleurs dans [5] il est prouvé que:

$$K(t, \lambda_T, l_1, l_\infty) = K(t, T, \mathscr{C}_1, \mathscr{C}^\omega).$$

Il en résulte que:

$$K(t, \lambda_{\mathscr{T}(T)}, l_1, l_\infty) \leqslant K(t, \lambda_T, l_1, l_\infty)$$

d'où l'inégalité (1) d'après le lemme 5.

Par conséquent,

$$\varphi(\tau_n \lambda_{\mathscr{T}(T)}) \leqslant \varphi(\tau_n \lambda_T), \qquad \forall n \in N^*$$

et si $T \in \mathscr{C}_\varphi$ on a alors:

$$\varphi(\tau_n \lambda_{\mathscr{T}(T)}) \leqslant |T|_\varphi$$

donc $\mathscr{T}(T) \in \mathscr{C}_\varphi$ et $|\mathscr{T}(T)|_\varphi \leqslant |T|_\varphi$, d'où le théorème.

Une application du théorème 5 est par exemple le résultat suivant prouvé dans [3] par une autre méthode dans l'hypothèse H séparable, et dans [6] pour les espaces $\mathscr{C}_p$ dans le cas général.

COROLLAIRE 7. *Soit $(P_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ une suite de projections mutuellement orthogonales, c'est-à-dire, telles que $P_n P_m = 0$ pour $n \neq m$.*

Alors l'opérateur $\mathscr{T}$ de $\mathscr{C}^\omega$ dans $\mathscr{C}^\omega$ défini par:

$$\mathscr{T}(T) = \sum_n P_n T P_n$$

est admissible ([6]) et par conséquent, est un opérateur de $\mathscr{C}_\varphi$ dans $\mathscr{C}_\varphi$ de norme plus petite que 1 pour toute fonction de norme φ.

§ 3. Applications aux espaces $\mathscr{C}_{q,p}$. Rappelons que les espaces $\mathscr{C}_{q,p}$ introduits par Triebel ([8]) sont définis en posant pour $0 < q < +\infty$ et $0 < p < +\infty$

$$\mathscr{C}_{q,p} = \Big\{T;\ T \in \mathscr{C}^\omega,\ |T|_{q,p} = \Big[\sum_n \lambda_n^p n^{\frac{p}{q}-1}\Big]^{1/p} < +\infty\Big\},$$

$$\mathscr{C}_{\infty,p} = \Big\{T;\ T \in \mathscr{C}^\omega,\ |T|_{\infty,p} = \Big[\sum_n \lambda_n^p n^{-1}\Big]^{1/p} < +\infty\Big\},$$

$$\mathscr{C}_{q,\infty} = \{T;\ T \in \mathscr{C}^\omega,\ |T|_{q,\infty} = \sup_n n^{1/q} \lambda_n < +\infty\},$$

$$\mathscr{C}_{\infty,\infty} = \mathscr{C}^\omega \quad \text{avec } |T|_{\infty,\infty} = |T|$$

où $(\lambda_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ est la suite λ_T.

On montre facilement que, pour tout $(q, p) \in \,]1, +\infty] \times [1, +\infty]$, ou $p = q = 1$, $|\cdot|_{q,p}$ est une quasi-norme et, muni de cette quasi-norme, $\mathscr{C}_{q,p}$ est un idéal complet.

LEMME 8. *Pour $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$, on peut définir une fonction de norme $\varphi_{q,p}$ telle que:*

$$\mathscr{C}_{q,p} = \mathscr{C}^0_{\varphi_{q,p}} = \mathscr{C}_{\varphi_{q,p}}.$$

Preuve. Si $p = q = +\infty$, on pose $\varphi_{\infty,\infty}(\lambda) = \lambda_1$ pour tout λ de C. Si $1 \leqslant p \leqslant q < +\infty$ ou $1 \leqslant p < +\infty$, $q = +\infty$, posons

$$\varphi_{q,p}(\lambda) = \Big[\sum_n \lambda_n^p n^{(p/q)-1}\Big]^{1/p}, \qquad \forall \lambda \in C,$$

où conviendra de poser $1/q = 0$ si $q = +\infty$.

$\varphi_{q,p}$ est une fonction de norme: les propriétés (i)–(iv) sont immédiates, pour (v) remarquons que si λ est une suite de longueur N on a:

$$\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^p n^{\frac{p}{q}-1} = \sum_{n=2}^{N-1} \Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p\Big)\Big(n^{\frac{p}{q}-1} - (n+1)^{\frac{p}{q}-1}\Big) + \lambda_1^p\big(1 - 2^{\frac{p}{q}-1}\big) + \Big(\sum_{i=1}^{N} \lambda_i^p\Big) N^{p/q-1}.$$

Supposons $\lambda \precsim \mu$. On peut toujours considérer λ et μ de même longueur, en ajoutant au besoin des zéros. Pour $1 \leqslant n \leqslant N$ $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p \leqslant \sum_{i=1}^{n} \mu_i^p$ (voir [3]). Comme $p/q - 1 \leqslant 0$, on obtient:

$$\varphi_{q,p}(\lambda) \leqslant \varphi_{q,p}(\mu).$$

Il est clair que, si $T \in \mathscr{C}^\omega$, on a:

$$|T|_{q,p} = \lim_{n \to +\infty} \varphi_{q,p}(\tau_n \lambda_T)$$

donc $\mathscr{C}_{q,p} = \mathscr{C}^0_{\varphi_{q,p}} = \mathscr{C}_{\varphi_{q,p}}$.

LEMME 9. *Pour $1 < p \leqslant q < +\infty$ ou $1 = p < q < +\infty$ ou $p = q = +\infty$, le dual de $\mathscr{C}_{q,p}$ est $\mathscr{C}_{q',p'}$ si $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ avec des conventions immédiates si p ou q sont infinis ou si $p = 1$.*

Preuve. Si $p = q = +\infty$, le résultat est bien connu; on exclura ce cas dans ce qui suit.

Remarquons que dans les conditions du lemme 9,

$$\sup \frac{n}{\varphi_{q,p}(\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n}, 0, 0, \ldots)} = +\infty.$$

Pour cela, on utilise l'inégalité $\sum_{i=1}^{n} i^{\frac{p}{q}-1} \leqslant \frac{q}{p} n^{\frac{p}{q}}$.

Par conséquent, d'après le lemme 3, $\varphi_{q,p}$ n'est pas équivalent à la φ-norme maximale et d'après le théorème 4, le dual de $\mathscr{C}_{q,p}$ est isométrique à $\mathscr{C}_{\varphi^*_{q,p}}$ puisque $\mathfrak{F}$ est dense dans $\mathscr{C}_{q,p}$.

Si $1 < p \leqslant q < +\infty$ ou si $1 < p < +\infty$, $q = +\infty$, on a

$$\varphi^*_{q,p}(\lambda) \leqslant \Big(\sum_{n} \lambda_n^{p'} n^{p'/q'-1}\Big)^{1/p'}, \quad \forall \lambda \in C,$$

car d'après l'inégalité de Hölder

$$\sum_{n} \lambda_n \mu_n = \sum_{n} \lambda_n n^{\frac{1}{q'}-\frac{1}{p'}} \mu_n n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \leqslant \Big[\sum_{n} \lambda_n^{p'} n^{\frac{p'}{q'}-1}\Big]^{1/p'} \Big[\sum_{n} \mu_n^{p} n^{\frac{p}{q}-1}\Big]^{1/p},$$

car $\sum_{n} \lambda_n \mu_n = \sum_{n} \lambda_n n^{\frac{1}{q}-1} \mu_n n^{\frac{1}{q'}} \leqslant (\sup_{n} \lambda_n n^{\frac{1}{q'}}) \big(\sum_{n} \mu_n n^{\frac{1}{q}-1}\big)$.

Si $p = 1$, $q = +\infty$ on a encore,

$$\varphi^*_{\infty,1}(\lambda) \leqslant \sup_{n} n\lambda_n, \quad \forall \lambda \in C.$$

Ces diverses inégalités prouvent que:

$$|T|_{\varphi^*_{q,p}} \leqslant |T|_{q',p'}, \quad \forall T \in \mathscr{C}_{q',p'}$$

et donc que:

$$\mathscr{C}_{q',p'} \subset \mathscr{C}_{\varphi^*_{q,p}}.$$

Démontrons que les ensembles $\mathscr{C}_{\varphi^*_{q,p}}$ et $\mathscr{C}_{q',p'}$ coïncident.

Soit $T \in \mathscr{C}_{\varphi^*_{q,p}}$, T est compact

$$(T^*T)^{1/2} x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (x, \varphi_i) \varphi_i$$

où $(\varphi_i)_{i \in N}$ est une famille orthonormale de vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_i \geqslant 0$.

D'autre part, d'après le théorème 4,

$$|T|_{\varphi^*_{q,p}} = \sup_{S \in \mathscr{C}_{q,p}} \frac{|\mathrm{tr}\, TS|}{|S|_{\varphi_{q,p}}}.$$

Soit $\mu = (\mu_i)_{i \in N}$ avec $\mu_i \geqslant 0$ telle que la suite $(\mu_i i^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}})_{i \in N}$ appartienne à l_p.

Posons $S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i (x, U\varphi_i) \varphi_i$ où U est l'opérateur partiellement isométrique défini par

$$T = U(T^*T)^{1/2},$$

$$TS_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \lambda_i (x, U\varphi_i) U\varphi_i.$$

Puisque U est isométrique sur l'image de $(T^*T)^{1/2}$, $(U\varphi_i)_{i \in N}$ est une famille orthonormale et

$$\mathrm{tr}\, TS_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i$$

or, $|\mathrm{tr}\, TS_n| \leqslant |T|_{\varphi^*_{q,p}} |S_n|_{\varphi_{q,p}}$ et en remarquant que $\lambda_{S_n} = \tau_n \mu$, il vient:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i \leqslant |T|_{\varphi^*_{q,p}} \Big[\sum_{i=1}^{n} \mu_i^p i^{\frac{p}{q}-1}\Big]^{1/p}$$

et puisque

$$(\mu_i i^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}})_{i \in N} \in l_p,$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \mu_i < +\infty.$$

On déduit de ce résultat que pour toute suite $(\mu_i)_i$ telle que $(\mu_i i^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}})_i \in l_p$, la série $\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i \lambda_i$ converge, c'est-à-dire que $(\lambda_i i^{\frac{1}{q'}-\frac{1}{p'}})_i \in l_{p'}$ car le dual de l_p est $l_{p'}$. Donc $T \in \mathscr{C}_{q',p'}$.

Les ensembles $\mathscr{C}_{q',p'}$ et $\mathscr{C}_{\varphi^*_{q,p}}$ coïncident. Il résulte alors de l'inégalité $|T|_{\varphi^*_{q,p}} \leqslant |T|_{q',p'}$ et de l'application du théorème du graphe fermé pour les espaces vectoriels topologiques métrisables complets que la norme $|\cdot|_{\varphi^*_{q,p}}$ est équivalente à la quasi-norme $|\cdot|_{q',p'}$.

THÉORÈME 10. *Pour $(p, q) \in [1, +\infty] \times]1, +\infty]$ ou $p = q = 1$, $\mathscr{C}_{q,p}$ est un idéal de Banach normé par une fonction de norme $\varphi_{q,p}$ telle que:*

$$\mathscr{C}_{q,p} = \mathscr{C}_{\varphi_{q,p}}.$$

Si de plus $p < +\infty$, on a $\mathscr{C}^0_{\varphi_{q,p}} = \mathscr{C}_{\varphi_{q,p}}$.

Preuve. Pour $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant +\infty$, $\varphi_{q,p}$ est défini dans le lemme 8.

Pour $1 < q < p \leqslant +\infty$, on peut choisir d'après les lemmes 1 et 9

$$\varphi_{q,p} = \varphi^*_{q',p'}$$

avec $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'} = \frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$.

Le théorème 6 donne alors le

COROLLAIRE 11. *Pour $(p, q) \in [1, +\infty] \times]1, +\infty]$, $\mathscr{C}_{q,p}$ est un espace strictement intermédiaire.*

THÉORÈME 12. *Le dual de $\mathscr{C}_{q,p}$ est $\mathscr{C}_{q',p'}$ avec $\frac{1}{q}+\frac{1}{q'} = \frac{1}{p}+\frac{1}{p'} = 1$ si $(p, q) \in [1, +\infty[\times]1, +\infty[$ ou $p = q = +\infty$.*

Preuve. Le cas $1 < q \leqslant p < +\infty$ résulte des lemmes 1 et 9 et du théorème 4 après avoir constaté que la fonction de norme $\varphi_{q,p} = \varphi^*_{q',p}$ n'est pas équivalente à la φ-norme maximale. Pour ce faire, on s'appuie sur l'inégalité $\sum_{i=1}^{n} i^{\frac{p}{q}-1} \leqslant \frac{q}{p}[(n+1)^{\frac{p}{q}} - 1]$ et sur l'équivalence de la norme $|\ |_{\varphi^*_{q',p'}}$ et de la quasi-norme $|\ |_{q,p}$.

Nous avons alors le

COROLLAIRE 13. *Pour $(p, q) \in]1, +\infty[\times]1, +\infty[$ $\mathscr{C}_{q,p}$ est un espace réflexif.*

Bibliographie

[1] P. L. Butzer, H. Berens, *Semi-groups of operators and approximation*, Berlin–Heidelberg–New York 1967.

[2] A. P. Calderón, *Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkiewicz*, Studia Math. 26 (1966), p. 273–299.

[3] I. C. Gohberg, M. G. Krein, *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators*, Transl. of Math. Monographs 18, Amer. Math. Soc. 1965.

[4] S. T. Kuroda, *On a theorem of Weyl–von Neumann*, Proc. Japan Acad. 34 (1958), p. 11–15.

[5] C. Merucci, *Interpolation dans $\mathscr{C}^\omega(H)$*, C. R. Acad. Sci. Paris 274 (1972), p. 1163–1166.

[6] Pham The Lai, *L'analogue dans $\mathscr{C}^p$ des théorèmes de Convexité de M. Riesz et G. O. Thorin*, Studia Math. 46 (1973), p. 111–124.

[7] R. Schatten, *Norm ideals of completely continuous operators*, Ergebnisse der Math. 27, 1960.

[8] H. Triebel, *Über die Verteilung der Approximationszahlen kompakter Operatoren in Sobolev–Besov-Räumen*, Inv. Math. 4 (1967), p. 275–279.

U.E.R. DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE NANTES

Received November 13, 1972 (613)

STUDIA MATHEMATICA, T. XLIX. (1974)

Some remarks on the spectra of unitary dilations

by

PAUL S. MUHLY* (Iowa City, Iowa)

Abstract. We generalize several well-known theorems concerning the spectral behavior of the minimal unitary dilation of a single contraction to the setting of contractive representations of certain semigroups. We prove, for example, that if such a representation is completely non-unitary, then the spectral measure for its minimal unitary dilation is quasi-invariant under a certain flow. This generalizes the fact that the spectral measure for the minimal unitary dilation of a single completely non-unitary contraction is mutually continuous with respect to Lebesgue measure on the circle.

§ 1. Introduction. Throughout this note Γ will denote a fixed dense subgroup of the real numbers $\boldsymbol{R}$. We shall give Γ the discrete topology and we shall denote its subsemigroup of nonnegative elements by Γ_+. Also, we shall fix a contractive representation $\{T_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_+}$ of Γ_+ on a (complex) Hilbert space $\mathscr{H}$ and we shall let $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ be its minimal unitary dilation acting on a Hilbert space $\mathscr{K}$ containing $\mathscr{H}$. This means first that $\{T_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma_+}$ is a family of linear operators on $\mathscr{H}$ such that $\|T_\gamma\| \leqslant 1$ for each γ in Γ_+, $T_{\gamma+\sigma} = T_\gamma T_\sigma$, and such that T_0 is the identity operator on $\mathscr{H}$, and secondly, that $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ is a unitary representation of Γ on $\mathscr{K}$ such that $T_\gamma = PU_\gamma|\mathscr{K}$ for all γ in Γ_+ and such that the smallest subspace of $\mathscr{K}$ containing $\mathscr{H}$ and reducing $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ is $\mathscr{K}$ itself. (Here P denotes the projection of $\mathscr{K}$ onto $\mathscr{H}$, and the vertical bar denotes restriction here and always.) In this note we investigate some of the spectral properties of $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ and prove analogues of well-known theorems concerning the spectral behavior of the minimal unitary dilation of a single contraction (see [7], Chap. II, n° 6). We note that Mlak [3] proved that the minimal unitary dilation of a contractive representation of Γ_+ always exists and, consequently, we are not working in a vacuum.

The group dual to Γ will be denoted by G, and the pairing between the two will be denoted thus: $\langle\gamma, x\rangle$, $\gamma\in\Gamma$, $x\in G$. We shall write $\langle\gamma, \cdot\rangle$ for γ if we wish to regard γ as a function on G. For each t in $\boldsymbol{R}$ we shall write e_t for the element in G defined by the equation $\langle\gamma, e_t\rangle = e^{it\gamma}$. The family $\{e_t\}_{t\in\boldsymbol{R}}$ is a one-parameter subgroup of G and the action of $\boldsymbol{R}$ on G

* This research was supported in part by the National Science Foundation.