STUDIA MATHEMATICA T. XLVIII. (1973)

Sur les differentes définitions d'un espace nucléaire non localement convexe

par

JEAN PIERRE LIGAUD (Talence, France)

Sommaire. Le présent travail constitue le développement de résultats indiqués sommairement dans [3]. L'étude de la connexion entre ε-entropie et rapidité d'approximation d'un q-disque compact d'un espace localement p-convexe, avec des techniques analogues à celles que A. Dynin et B. S. Mitiagin [4] et [6] ont utilisées dans le cas convexe, permet, en tenant compte des résultats de [2] et [3], d'obtenir la solution d'un problème posé par S. Rolewicz au Colloque d'Analyse Fonctionnelle de Bordeaux (1971) (voir [5] et [3]), à savoir: existe-t-il des espaces métrisables localement pseudo-convexes complets et non localement convexes, tels que pour tout compact K et tout voisinage U de 0, on ait $\lim\limits_{n\to\infty} nd_n(K, U) = 0$. Pour la terminologie et les notations, on renvoie à [2] et [3].

Soient A et B deux équilibrés d'un espace vectoriel E; on pose:

$$d_n(A, B) = \inf\{\lambda > 0;\ \exists L,\ \dim L \leqslant n,\ A \subset \lambda B + L\},$$

$$N(A, B) = \inf\{N;\ \exists x_k \in E,\ \bigcup_{k=1}^{N} (x_k + B) \supset A\},$$

$$M(A, B) = \sup\{M;\ x_i - x_j \notin B,\ i \neq j,\ x_i \in A,\ i, j = 1, \ldots, M\},$$

$$\varrho(A, B) = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{\log\log N(A, \varepsilon B)}{\log\frac{1}{\varepsilon}}.$$

Si A est une partie équilibrée de E, on pose également, pour tout x de E $|x|_A = \inf\{t > 0;\ x \in tA\}$ et si A est un p-disque de E, on note la jauge de A, pour $x \in E$ par $\|x\|_A = \inf\{\lambda^p;\ \lambda > 0,\ x \in \lambda A\}$. On a alors $\|x\|_A = |x|_A^p$.

§ 1. Résultats techniques préliminaires.

Lemme 1. *Si S est un p-disque, K un équilibré quelconque, on a*

$$M(K, 2^{1/p} S) \leqslant N(K, S) \leqslant M(K, S).$$

Preuve. (Voir [1] p. 282, Théorème IV.) Si $M(K, S) = N(K, S) = +\infty$ c'est évident. Si $N(K, S) < +\infty$, soient $y_1, \ldots, y_N \in E$ tels que $K \subset \bigcup_{k=1}^{N} (y_k + S)$ avec $N = N(K, S)$ et soient $z_1, \ldots, z_M \in E$ tels que

$i \neq j \Rightarrow z_i - z_j \notin 2^{1/p} S$. Si $M > N$ il existe deux points z_{i_1} et $z_{i_2} \in K$, distincts tels que $z_{i_1}, z_{i_2} \in y_k + S$ pour un certain k. Alors $z_{i_1} - z_{i_2} = z_{i_1} - y_k + y_k - z_{i_2} \in S + S \subset 2^{1/p} S$ d'où une contradiction, et on a donc $M(K, 2^{1/p} S) \leqslant N(K, S)$. Si $M(K, S) < +\infty$ soit $x_1, \ldots, x_M \in K$ tels que $x_i - x_j \notin S$ pour $i \neq j$ avec $M = M(K, S)$. Alors $K \subset \bigcup_{i=1}^{M} (x_i + S)$ sinon il existerait $y \in K$ et $y \notin x_i + S$ pour tout i, donc $y - x_i \notin S$ pour tout i et $M(K, S) \geqslant M+1$ ce qui est impossible.

Lemme 2. *Soit $(U_n)_{n \geqslant 0}$ une suite d'équilibrés et $\varrho_{k,i} = \varrho(U_k, U_i)$ alors* $\dfrac{1}{\varrho_{n,0}} \geqslant \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{1}{\varrho_{k+1,k}}$ $\left(\textit{en posant } \dfrac{1}{\varrho_{k+1,k}} = +\infty \textit{ si } \varrho_{k+1,k} = 0 \textit{ et } = 0 \textit{ si } \varrho_{k+1,k} = +\infty\right)$.

Preuve. Voir la démonstration du lemme 9 de [4] p. 78, où la convexité des U_n ne joue aucun rôle.

Lemme 3. *Soit $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ la base canonique de $\boldsymbol{R}^n$ et soit*

$$p_n = \Big\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i;\ \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^p \leqslant 1\Big\} \qquad (p > 0)$$

alors le volume euclidien de p_n est

$$V(p_n) = \frac{2^n}{np^{n-1}} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right]^n}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)}$$

(où Γ est la fonction d'Euler classique).

Preuve. $V(p_n) = \displaystyle\int_{\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^p \leqslant 1} d\lambda_1 \ldots d\lambda_n = 2^n \int_{\substack{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p \leqslant 1 \\ \lambda_i \geqslant 0}} d\lambda_1 \ldots d\lambda_n.$

Si on pose

$$I_n = \int_{\substack{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^p \leqslant 1 \\ \lambda_i \geqslant 0}} d\lambda_1 \ldots d\lambda_n \quad \text{et} \quad y_i = \lambda_i^p$$

on a

$$I_n = \frac{1}{p^n} \int_{\sum_{i=1}^{n} y_i \leqslant 1} y_1^{\frac{1}{p}-1} \ldots y_n^{\frac{1}{p}-1} dy_1 \ldots dy_n$$

et en posant $z_i = \dfrac{y_i}{1-y_n}$ pour $i = 1, \ldots, n-1$, il vient

$$I_n = \frac{1}{p^n} \int_0^1 (1-y_n)^{\frac{n-1}{p}} y_n^{\frac{1}{p}-1} p^{n-1} I_{n-1} dy_n$$

alors

$$I_n = \frac{I_{n-1}}{p} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{p}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)}$$

donc finalement

$$I_n = \frac{n-1}{n} \frac{I_{n-1}}{p} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{p}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)}$$

il vient alors

$$I_n = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\right]^n}{np^{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{p}\right)},$$

d'où le résultat annoncé.

Lemme 4. *Soit S un p-disque absorbant d'un espace vectoriel E et K un équilibre de E, alors, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a*

$$\log N(K, \varepsilon S) \leqslant \frac{1}{p} m\left(\frac{2^{1/p}}{\varepsilon}\right) \log\left[\frac{8(d_0^p + \varepsilon^p)}{\varepsilon^p}\right]$$

en posant $d_n = d_n(K, S)$ et $m(t) = \sup\left\{n;\ d_{n-1} \geqslant \dfrac{1}{t}\right\}$.

Preuve. Si $\varepsilon > 0$ est assez petit, $m\left(\dfrac{2^{1/p}}{\varepsilon}\right)$ existe, donc il existe un sous-espace E_m de dimension

$$m = m\left(\frac{2^{1/p}}{\varepsilon}\right) \quad \text{tel que } K \subset \left(\frac{\varepsilon^p}{2} + \frac{\varepsilon^p}{4}\right)^{1/p} S + E_m$$

car, d'après la définition de m, $d_m < \dfrac{\varepsilon}{2^{1/p}} < \left(\dfrac{\varepsilon^p}{2} + \dfrac{\varepsilon^p}{4}\right)^{1/p}$. On pose

$$P_m(x) = \{z \in E_m;\ z - x \in (\tfrac{3}{4})^{1/p} \varepsilon S\},$$

$$K_m = \bigcup_{x \in K} P_m(x) = E_m \cap [K + (\tfrac{3}{4})^{1/p} \varepsilon S]$$

$$S_m = S \cap E_m, \quad N = N(K_m, (\tfrac{1}{4})^{1/p} \varepsilon S_m).$$

Alors il existe $x_1, \ldots, x_N$ tels que $K_m \subset \bigcup_{i=1}^{N} (x_i + (\frac{1}{4})^{1/p} \varepsilon S_m)$. Tout point x de K s'écrit sous la forme $x = y + z$ avec $y \in (\frac{3}{4})^{1/p} \varepsilon S$ et $z \in E_m$, donc

$$z = x - y \in E_m \cap [K + (\tfrac{3}{4})^{1/p} \varepsilon S] = K_m \subset \bigcup_{i=1}^{N} [x_i + (\tfrac{1}{4})^{1/p} \varepsilon S_m]$$

et, finalement

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{N} \left(x_i + (\tfrac{1}{4})^{1/p} \varepsilon S\right) + (\tfrac{3}{4})^{1/p} \varepsilon S \subset \bigcup_{i=1}^{N} (x_i + \varepsilon S)$$

il en résulte que $N(K, \varepsilon S) \leqslant N = N(K_m, (\frac{1}{4})^{1/p} \varepsilon S_m)$.

D'après le lemme 1, $N\left(K_m, (\frac{1}{4})^{1/p} \varepsilon S_m\right) \leqslant M\left(K_m, (\frac{1}{4})^{1/p} \varepsilon S_m\right) = M$. Mais $M = \sup\{n;\ t_i - t_j \notin (\frac{1}{4})^{1/p} \varepsilon S_m;\ i \neq j,\ i, j = 1, \ldots, n;\ t_i \in K_m\}$. Si on prend les points t_i correspondant à $n = M$, les boules $S^i = t_i + (\frac{1}{8})^{1/p} \varepsilon S_m$ ne se coupent pas, sinon $t_i - t_j \in (\frac{1}{8})^{1/p} \varepsilon S_m + (\frac{1}{8})^{1/p} \varepsilon S_m \subset (\frac{1}{4})^{1/p} \varepsilon S_m$, ce qui est impossible. Mais $t_i \in E_m \cap \left(K + (\frac{3}{4})^{1/p} \varepsilon S\right) \subset E_m \cap [(\frac{3}{4})^{1/p} \varepsilon S + d_0 S] \subset (\frac{3}{4}\varepsilon^p + d_0^p)^{1/p} S_m$, Donc $S^i \subset (\frac{3}{4}\varepsilon^p + d_0^p)^{1/p} S_m + (\frac{1}{8})^{1/p} \varepsilon S_m \subset (\varepsilon^p + d_0^p)^{1/p} S_m$. Si V est le volume euclidien dans E_m, on a donc

$$V\left(\bigcup_{i=1}^{M} S^i\right) = MV[(\tfrac{1}{8})^{1/p} \varepsilon S_m] \leqslant V[(\varepsilon^p + d_0^p)^{1/p} S_m]$$

donc $M (\frac{1}{8})^{m/p} \varepsilon^m \leqslant (\varepsilon^p + d_0^p)^{m/p}$ et $N(K, \varepsilon S) \leqslant M \leqslant \left[\dfrac{8(\varepsilon^p + d_0^p)}{\varepsilon^p}\right]^{m/p}$ donc $\log N(K, \varepsilon S) \leqslant m \left(\dfrac{2^{1/p}}{\varepsilon}\right) \dfrac{1}{p} \log \left[\dfrac{8(\varepsilon^p + d_0^p)}{\varepsilon^p}\right]$.

Lemme 5. *Soit* $(e_1, \ldots, e_n)$ *la base canonique de* $\boldsymbol{R}^n$; $0 < q \leqslant 1$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *et soit* $a_k > 0$ *et* $p_n^* = \{\sum_{k=1}^{n} \xi_k a_k e_k;\ \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^q \leqslant 1\}$. *Alors si* T_ε *désigne le nombre de points de la forme* $y = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon \gamma_k e_k$ *où* $\gamma_k \in \boldsymbol{Z}$, *contenus dans* p_n^*, *on a*

$$T_\varepsilon \geqslant \frac{\left[\Gamma\left(\dfrac{1}{p}\right)\right]^n}{\varepsilon^n q^n \Gamma\left(\dfrac{n}{q} + 1\right)} a_1 \ldots a_n.$$

Preuve. On considère les cubes K_y, centrés aux points y et dont les côtés ont pour longueur 2ε. Alors $p_n^* \subset \bigcup_{y \in p_n^*} K_y$, car si $x \in p_n^*$, $x = \sum_{k=1}^{n} \xi_k a_k e_k$ avec $\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^q \leqslant 1$. Soit alors γ_k la partie entière de $\left|\dfrac{\xi_k a_k}{\varepsilon}\right|$, affectée du signe de ξ_k et $y = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon \gamma_k e_k$. Alors $y = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\varepsilon \gamma_k}{a_k} a_k e_k$ et

$$\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\varepsilon \gamma_k}{a_k}\right|^q \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon |\xi_k a_k|}{\varepsilon a_k}\right)^q = \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^q \leqslant 1$$

donc $y \in p_n^*$ et $x - y = \sum_{k=1}^{n} (\xi_k a_k - \varepsilon \gamma_k) e_k$ avec, d'après la définition de γ_k, $|\xi_k a_k - \varepsilon \gamma_k| \leqslant \varepsilon$, donc $x \in K_y$. Ceci dit, le volume euclidien $V(p_n^*)$ de p_n^* dans la base (e_k) est égal au produit du volume de p_n^* dans la base $(a_k e_k)$ par le déterminant de la matrice de changement de base

$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}.$$

D'après le lemme 3, on obtient: $V(p_n^*) = \dfrac{2^n}{nq^{n-1}} \dfrac{\left[\Gamma\left(\dfrac{1}{q}\right)\right]^n}{\Gamma\left(\dfrac{n}{q}\right)} a_1 \ldots a_n$.

Alors $V(p_n^*) \leqslant V\left(\bigcup_{y \in p_n^*} K_y\right) \leqslant T_\varepsilon V(K_y) = T_\varepsilon 2^n \varepsilon^n$ d'où

$$T_\varepsilon \geqslant \frac{\left[\Gamma\left(\dfrac{1}{q}\right)\right]^n}{\varepsilon^n n q^{n-1} \Gamma\left(\dfrac{n}{q}\right)} a_1 \ldots a_n = \frac{\left[\Gamma\left(\dfrac{1}{q}\right)\right]^n}{\varepsilon^n q^n \Gamma\left(\dfrac{n}{q} + 1\right)} a_1 \ldots a_n.$$

Lemme 6. *Soit* K *un* q*-disque, et* S *un* p*-disque. On a alors*

$$\log N(K, \varepsilon S) \geqslant \int_0^{\frac{1}{\varepsilon\theta}} \frac{l(t)}{t} dt \text{ avec } \theta = \frac{2^{1/p} q}{\Gamma\left(\dfrac{1}{q}\right)}$$

et

$$l(t) = \sup\left\{n;\ \frac{d_{n-1}}{\left(\dfrac{n}{q} + 1\right)^{\frac{1}{q} + 1}} \geqslant \frac{1}{t}\right\}$$

($l(t) = 0$ *si ce dernier ensemble est vide*) *et* $d_n = d_n(K, S)$.

Preuve. Soit $0 < \lambda < 1$ donné, mais arbitraire, et soit $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 0}$ une suite décroissante vers 0 de nombres > 0 telle que $\prod_{n=0}^{+\infty} (1 - \varepsilon_n) > \lambda$. Remarquons d'abord que $[d_n(K, S)]^p = \inf_{\substack{L \\ \dim L \leqslant n}} \sup_{x \in K} \inf_{y \in L} \|x - y\|_S$ donc $d_0^p = \sup_{x \in K} \|x\|_S$. Il existe alors $x_1 \in K$ tel que $a_1^p = \|x_1\|_S \geqslant (1 - \varepsilon_0) d_0^p$. Si on suppose $x_1, \ldots, x_n$ construits et si on désigne par L_n le sous-espace engendré par ces points, $\dim L_n \leqslant n$ donc $\sup_{x \in K} \inf_{y \in L_n} \|x - y\|_S > (1 - \varepsilon_n) d_n^p$. Il existe donc $x_{n+1} \in K$ tel que $a_{n+1}^p = \inf_{y \in L_n} \|x_{n+1} - y\|_S > (1 - \varepsilon_n) d_n^p$. On construit ainsi une suite de points $x_n \in K$ $(n \geqslant 1)$ linéairement indépendants tels que $a_{n+1}^p = \inf_{y \in L_n} \|x_{n+1} - y\|_S > (1 - \varepsilon_n) d_n^p$ pour tout $n \geqslant 0$.

Soit $\sigma_n = \{\sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k;\ \sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^q \leqslant 1\}$. Puisque K est q-disqué, $\sigma_n \subset K$ et d'après le lemme 5, si $T_{\varepsilon,n}$ désigne le nombre de points de la forme $z = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon \alpha_k \dfrac{1}{a_k} x_k$ contenus dans σ_n, où $\alpha_k \in \boldsymbol{Z}$, en posant $e_k = \dfrac{x_k}{a_k}$ on voit que $T_{\varepsilon,n} \geqslant \dfrac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\right]^n}{\varepsilon^n q^n \Gamma\left(\frac{n}{q}+1\right)} a_1 \dots a_n$. Mais si $z_1 = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon \alpha_k \frac{1}{a_k} x_k$ et $z_2 = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon \beta_k \frac{1}{a_k} x_k$ sont deux tels points, et s'ils sont distincts, on a $z = z_1 - z_2 = \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \varepsilon \frac{1}{a_k} x_k$ avec $|\gamma_m| \geqslant 1$ et $1 \leqslant m \leqslant n$, où m désigne le plus grand indice k pour lequel $\alpha_k \neq \beta_k$. Alors $\|z\|_S \geqslant \inf_{y \in L_{m-1}} \|z-y\|_S = \inf_{y \in L_{m-1}} \|\gamma_m \varepsilon \frac{1}{a_m} x_m - y\|_S = |\gamma_m|^p \varepsilon^p \frac{1}{a_m^p} \inf_{y \in L_{m-1}} \|x_m - y\|_S = |\gamma_m|^p \varepsilon^p \frac{1}{a_m^p} a_m^p \geqslant \varepsilon^p$ et donc $z \notin \varepsilon' S$ pour tout $\varepsilon' < \varepsilon$ et $M(\sigma_n, \varepsilon' S) \geqslant T_{\varepsilon,n}$ pour tout $\varepsilon' < \varepsilon$. D'après le lemme 1 on a alors

$$N(K, \varepsilon' S) \geqslant N(\sigma_n, \varepsilon' S) \geqslant M(\sigma_n, 2^{1/p} \varepsilon' S) \geqslant T_{2^{1/p}\varepsilon,n} \geqslant \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\right]^n}{2^{n/p} \varepsilon^n q^n \Gamma\left(\frac{n}{q}+1\right)} a_1 \dots a_n .$$

Cette inégalité étant vraie pour ε' fixé et pour tout $\varepsilon > \varepsilon'$, on a en changeant de notations:

$$N(K, \varepsilon S) \geqslant \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\right]^n}{2^{n/p} \varepsilon^n q^n \Gamma\left(\frac{n}{q}+1\right)} a_1 \dots a_n \geqslant \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\right]^n}{2^{n/p} \varepsilon^n q^n \Gamma\left(\frac{n}{q}+1\right)}$$

$$\prod_{k=1}^{n} (1-\varepsilon_{k-1})^{1/p} d_{k-1} \geqslant \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\right]^n}{2^{n/p} \varepsilon^n q^n \Gamma\left(\frac{n}{q}+1\right)} \lambda^{1/p} \prod_{k=1}^{n} d_{k-1}$$

et comme ceci est vrai pour un λ arbitraire tel que $0 < \lambda < 1$, on a finalement

$$N(K, \varepsilon S) \geqslant \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\right]^n}{2^{n/p} \varepsilon^n q^n \Gamma\left(\frac{n}{q}+1\right)} \prod_{k=1}^{n} d_{k-1} \quad \text{pour tout } n \geqslant 1.$$

Soit maintenant $m = \left[\frac{n}{q}\right]$ la partie entière de $\frac{n}{q}$. Comme $1 \leqslant \frac{n}{q} \leqslant m+1 \leqslant \frac{n}{q}+1$ et que Γ est une fonction croissante sur $[1, +\infty[$, on a $\Gamma\left(\frac{n}{q}+1\right) \leqslant \Gamma(m+2) = (m+1)!$.

Mais pour tout k, $0 \leqslant k \leqslant m$, k entier, on a $m-k+1 \leqslant \frac{n}{q} - k + 1$ donc

$$(m+1)! \leqslant \prod_{k=0}^{m} \left(\frac{n}{q} - k + 1\right) = \prod_{\substack{0 \leqslant k \leqslant \frac{n}{q} \\ k \in N}} \left(\frac{n}{q} - k + 1\right) \leqslant \prod_{s=1}^{n} \prod_{\substack{\frac{s-1}{q} \leqslant k \leqslant \frac{s}{q} \\ k \in N}} \left(\frac{n}{q} - k + 1\right)$$

car $\frac{n}{q} - k + 1$ est toujours $\geqslant 1$. Pour $k \in N$, $\frac{s-1}{q} \leqslant k \leqslant \frac{s}{q}$, on a $\frac{n}{q} - k + 1 \leqslant \frac{n}{q} - \frac{s-1}{q} + 1 = \frac{n-s+1}{q} + 1$. Si $\mathcal{N}_s$ désigne le nombre d'entiers k tels que $\frac{s-1}{q} \leqslant k \leqslant \frac{s}{q}$, on a

$$\prod_{\frac{s-1}{q} \leqslant k \leqslant \frac{s}{q}} \left(\frac{n}{q} - k + 1\right) \leqslant \left(\frac{n-s+1}{q} + 1\right)^{\mathcal{N}_s}.$$

Mais $\mathcal{N}_s \leqslant \left[\frac{1}{q}\right] + 1 \leqslant \frac{1}{q} + 1$ et $\frac{n-s+1}{q} + 1 \geqslant 1$ donc $\left(\frac{n-s+1}{q} + 1\right)^{\mathcal{N}_s} \leqslant \left(\frac{n-s+1}{q} + 1\right)^{\frac{1}{q}+1}$. Finalement, nous avons donc

$$N(K, \varepsilon S) \geqslant \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\right]^n}{2^{n/p} \varepsilon^n q^n \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{n-k+1}{q} + 1\right)^{\frac{1}{q}+1}} \prod_{k=1}^{n} d_{k-1}.$$

Soit encore

$$N(K, \varepsilon S) \geqslant \prod_{k=1}^{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{q}\right) d_{k-1}}{2^{1/p} \varepsilon q \left(\frac{k}{q} + 1\right)^{\frac{1}{q}+1}}$$

et, en posant $\theta = \dfrac{2^{1/p} q}{\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)}$, $N(K, \varepsilon S) \geqslant \prod_{k=1}^{n} \dfrac{d_{k-1}}{\theta \varepsilon \left(\frac{k}{q} + 1\right)^{\frac{1}{q}+1}}$.

La suite

$$\left(\frac{d_{k-1}}{\left(\frac{k}{q}+1\right)^{\frac{1}{q}+1}}\right)_k$$

est décroissante. Si on prend les indices k tels que

$$\frac{d_{k-1}}{\theta\varepsilon\left(\frac{k}{q}+1\right)^{\frac{1}{q}+1}} \geqslant 1$$

on a alors

$$N(K, \varepsilon S) \geqslant \prod_{\substack{k \text{ tels que} \\ \theta\varepsilon\left(\frac{k}{q}+1\right)^{\frac{1}{q}+1} \leqslant d_{k-1}}} \frac{d_{k-1}}{\theta\varepsilon\left(\frac{k}{q}+1\right)^{\frac{1}{q}+1}}$$

donc

$$\log N(K, \varepsilon S) \geqslant \sum_{\substack{k \text{ tels que} \\ \theta\varepsilon\left(\frac{k}{q}+1\right)^{\frac{1}{q}+1} \leqslant d_{k-1}}} \log\left[\frac{d_{k-1}}{\theta\varepsilon\left(\frac{k}{q}+1\right)^{\frac{1}{q}+1}}\right].$$

La fonction l définie dans l'énoncé du lemme est une fonction en escalier croissante, définie sur $]0, +\infty[$, et on a, en utilisant l'intégrale de Stieltjes:

$$\sum_{\substack{k \text{ tels que} \\ \theta\varepsilon\left(\frac{k}{q}+1\right)^{\frac{1}{q}+1} \leqslant d_{k-1}}} \log\left[\frac{d_{k-1}}{\theta\varepsilon\left(\frac{k}{q}+1\right)^{\frac{1}{q}+1}}\right] = \int_0^{\frac{1}{\theta\varepsilon}} \log\left(\frac{1}{\theta\varepsilon t}\right) dl(t).$$

En intégrant par parties, il vient:

$$\int_0^{\frac{1}{\theta\varepsilon}} \log\left(\frac{1}{\theta\varepsilon t}\right) dl(t) = \left[l(t)\log\left(\frac{1}{\theta\varepsilon t}\right)\right]_0^{\frac{1}{\theta\varepsilon}} + \int_0^{\frac{1}{\theta\varepsilon}} \frac{l(t)}{t} dt.$$

Pour $t = \frac{1}{\theta\varepsilon}$ on a $l(t)\log\left(\frac{1}{\theta\varepsilon t}\right) = l\left(\frac{1}{\theta\varepsilon}\right)\log 1 = 0$. Quand $t \to 0$, si on suppose que la suite d_n est bornée (c'est-à-dire s'il existe un $\lambda > 0$ tel que $K \subset \lambda S$, ce qui sera toujours vérifié par la suite) alors $d_n \leqslant \lambda$ et si $n = l(t)$ on a:

$$\frac{1}{t} \leqslant \frac{d_{n-1}}{\left(\frac{n}{q}+1\right)^{\frac{1}{q}+1}} \leqslant \frac{\lambda}{\left(\frac{n}{q}+1\right)^{\frac{1}{q}+1}}$$

donc $\left(\frac{n}{q}+1\right)^{\frac{1}{q}+1} \leqslant \lambda t$ et $n = l(t) \leqslant q[(\lambda t)^{\frac{q}{q+1}} - 1] \leqslant q(\lambda t)^{\frac{q}{q+1}}$. Alors $0 \leqslant l(t)\log\left(\frac{1}{\theta\varepsilon t}\right) \leqslant q(\lambda t)^{\frac{q}{q+1}}\log\left(\frac{1}{\theta\varepsilon t}\right) \to 0$ quand $t \to 0$; et finalement

$$\log N(K, \varepsilon S) \geqslant \int_0^{\frac{1}{\theta\varepsilon}} \frac{l(t)}{t} dt.$$

LEMME 7. *Soit K un équilibré, et S un p-disque, et soit α l'indice de convergence de la suite $d_n = d_n(K, S)$ (c'est-à-dire que $\alpha = \inf\{\beta > 0;\ \sum d_n^\beta < +\infty\}$). Alors $\varrho(K, S) \leqslant \alpha$.*

Preuve. D'après le lemme 4, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on a

$$\frac{\log\log N(K, \varepsilon S)}{\log\frac{1}{\varepsilon}} \leqslant \frac{\log m\left(\frac{2^{1/p}}{\varepsilon}\right)}{\log\frac{1}{\varepsilon}} + \frac{\log\log\left[\frac{8(d_0^p+\varepsilon^p)}{\varepsilon^p}\right]}{\log\frac{1}{\varepsilon}} - \frac{\log p}{\log\frac{1}{\varepsilon}},$$

$$m(t) = \sup\left\{n;\ d_{n-1} \geqslant \frac{1}{t}\right\} = \sup\left\{n;\ t \geqslant \frac{1}{d_{n-1}}\right\}$$

donc si $\alpha = \inf\left\{\beta > 0;\ \sum_{n\geqslant 0} d_n^\beta = \sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{\frac{1}{d_n}}\right)^\beta < +\infty\right\}$. D'après le lemme 7 de ([4], p. 77), puisque $d_n \to 0$, $\alpha = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{\log m(t)}{\log t}$ donc $\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}} \frac{\log m\left(\frac{2^{1/p}}{\varepsilon}\right)}{\log\frac{1}{\varepsilon}} = \alpha$.

Comme

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log p}{\log\frac{1}{\varepsilon}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\log\log\left[\frac{8(d_0^p+\varepsilon^p)}{\varepsilon^p}\right]}{\log\frac{1}{\varepsilon}} = 0$$

on a $\varrho(K, S) \leqslant \alpha$.

LEMME 8. *Soit K un q-disque et S un p-disque. La suite $\left((n+1)^{\frac{1}{\beta}-\frac{1}{q}-1} \times d_{n-1}(K, S)\right)_{n\geqslant 1}$ est bornée pour tout $\beta > \varrho(K, S)$.*

Preuve. D'après le lemme 6, comme $l(t) \geqslant 0$ est croissante, on a

$$\log N(K, \varepsilon S) \geqslant \int_0^{\frac{1}{\theta\varepsilon}} \frac{l(t)}{t} dt \geqslant \int_{\frac{1}{\theta e\varepsilon}}^{\frac{1}{\theta\varepsilon}} \frac{l(t)}{t} dt \geqslant l\left(\frac{1}{\theta e\varepsilon}\right) \int_{\frac{1}{\theta e\varepsilon}}^{\frac{1}{\theta\varepsilon}} \frac{dt}{t} = l\left(\frac{1}{\theta e\varepsilon}\right).$$

Alors

$$\frac{\log l\left(\frac{1}{\theta\varepsilon}\right)}{\log\left(\frac{1}{\theta\varepsilon}\right)} \leqslant \frac{\log\log N(K,\varepsilon S)}{\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \times \frac{\log\frac{1}{\varepsilon}}{\log\left(\frac{1}{\theta\varepsilon}\right)}$$

donc $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\frac{\log l(t)}{\log t} \leqslant \varrho = \varrho(K,S)$. D'après ([4], p. 77, lemme 7), la suite $A_n = \frac{\left(\frac{n}{q}+1\right)^{\frac{1}{q}+1}}{d_{n-1}}$ vérifie alors $\sum_n \left(\frac{1}{A_n}\right)^{\beta} < +\infty$ pour $\beta>\varrho$, c'est-à-dire que $\sum_n \left(\frac{d_{n-1}}{\left(\frac{n}{q}+1\right)^{\frac{1}{q}+1}}\right)^{\beta} < +\infty$. Le terme général de cette suite étant décroissant, il est classique que pour n assez grand,

$$\left(\frac{d_{n-1}}{\left(\frac{n}{q}+1\right)^{\frac{1}{q}+1}}\right)^{\beta}(n+1)\leqslant 1,$$

d'où le résultat annoncé.

§ 2. Application aux espaces vectoriels topologiques nucléaires. Conformément aux définitions de [2] et [3], on dira qu'un evt E est nucléaire s'il existe un nombre $\alpha>0$ tel que pour tout voisinage U de 0 il en existe un autre V tel que $d_n(V,U)\leqslant\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}$.

D'après [2] et [3] on sait que tout espace localement pseudo-convexe nucléaire est localement convexe.

Proposition 1. *Soit E un evt métrisable et p $(0<p\leqslant 1)$. S'il existe une constante C $(0<C<+\infty)$ telle que pour tout compact K de E et tout voisinage U de 0, on ait $\varrho(\Gamma_p(K),\Gamma_p(U))\leqslant C$, alors pour tout voisinage U de 0, il en existe un autre V tel que $\varrho(\Gamma_p(V),\Gamma_p(U))\leqslant 2C$.*

Preuve. Soit (U_n) une base de voisinages de 0 de E. Si on n'a pas la propriété, il existe un voisinage U de 0 dans E tel que, quelquesoit n,

$$\varrho(\Gamma_p(U_n),\Gamma_p(U)) = \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\frac{\log\log N(\Gamma_p(U_n),\varepsilon\Gamma_p(U))}{\log\frac{1}{\varepsilon}} > 2C.$$

Il existe alors $\delta_n>0$, aussi petit que l'on veut, tel que

$$\frac{\log\log N(\Gamma_p(U_n),\delta_n\Gamma_p(U))}{\log\frac{1}{\delta_n}} > \frac{3}{2}C,$$

donc $N(\Gamma_p(U_n),\delta_n\Gamma_p(U)) > e^{\left(\frac{1}{\delta_n}\right)^{\frac{3}{2}C}}$, et alors $M(\Gamma_p(U_n),\delta_n\Gamma_p(U)) > e^{\left(\frac{1}{\delta_n}\right)^{\frac{3}{2}C}}$ d'après le lemme 1. Il existe alors $x_1,\dots,x_{M_n}$, $M_n = M(\Gamma_p(U_n),\delta_n\Gamma_p(U))$, tels que $x_i-x_j\notin\delta_n\Gamma_p(U)$, $i\neq j$, $x_i\in\Gamma_p(U_n)$. Alors $x_i\in\Gamma_p(C_{i,n})$ où $C_{i,n}$ est une partie finie de U_n. Soit $K_n=\bigcup_{i=1}^{M_n}C_{i,n}$, K_n est une partie finie contenue dans U_n, donc $K=\{0\}\cup\{\bigcup_n K_n\}$ est un compact de E. Alors $x_i\in\Gamma_p(K_n)$ donc $M(\Gamma_p(K_n),\delta_n\Gamma_p(U))\geqslant M_n$ et $N(\Gamma_p(K),\varepsilon\Gamma_p(U)) \geqslant N(\Gamma_p(K_n),\varepsilon\Gamma_p(U))$ et $N\left(\Gamma_p(K_n),\frac{\delta_n}{2^{1/p}}\Gamma_p(U)\right)\geqslant M(\Gamma_p(K_n),\delta_n\Gamma_p(U)) > e^{\left(\frac{1}{\delta_n}\right)^{\frac{3}{2}C}}$. Il en résulte que

$$\varrho(\Gamma_p(K),\Gamma_p(U))\geqslant\overline{\lim_{\delta_n\to 0}}\frac{\log\log N\left(\Gamma_p(K),\frac{\delta_n}{2^{1/p}}\Gamma_p(U)\right)}{\log\frac{2^{1/p}}{\delta_n}},$$

si on prend la peine de choisir les δ_n décroissant vers 0. Alors $\varrho(\Gamma_p(K),\Gamma_p(U))\geqslant\frac{3}{2}C$, ce qui est impossible.

Proposition 2. *Soit E un evt localement p-convexe, séparé; s'il vérifie une des conditions suivantes, il est localement convexe.*

a) *Il existe une constante C $(0<C<+\infty)$ telle que pour tout voisinage U de 0 il en existe un autre V avec $\varrho(V,U)\leqslant C$.*

b) *Pour tout voisinage U de 0 il en existe un autre V et une suite (x_n) de E tels que $\sum_n |x_n|_U<+\infty$ et V soit contenu dans l'enveloppe l_p-disquée de la suite (x_n).*

c) *E est métrisable et il existe une constante C $(0<C<+\infty)$ telle que pour tout compact K et tout voisinage U de 0, on ait $\varrho(K,U)\leqslant C$.*

Preuve. Il est bien connu d'après [4] que ces différentes conditions, pour $p=1$, impliquent la nucléarité de E. On va montrer que ceci reste vrai pour tout p $(0<p\leqslant 1)$, ce qui suffira, d'après [2] et [3].

a) Soit $\delta>0$ et soit U un voisinage de 0, alors on peut trouver une suite (U_n) de voisinages de 0 telle que $U_0=U$ et $\varrho(U_{n+1},U_n)\leqslant C$. D'après le lemme 2,

$$\frac{1}{\varrho(U_{n+1}, U)} \geqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\varrho(U_{k+1}, U_k)} \geqslant \frac{n+1}{C}$$

donc $\varrho(U_{n+1}, U) \leqslant \delta$ pour $\dfrac{C}{n+1} \leqslant \delta$.

Soit maintenant δ tel que $\dfrac{1}{\delta} > \dfrac{1}{p}+1$, d'après ce qui précède pour tout voisinage U de 0, p-disqué, il en existe un autre V tel que $\varrho(V, U) < \delta$. D'après le lemme 8, la suite $\left((n+1)^{\frac{1}{\delta}-\frac{1}{p}-1} d_{n-1}(V, U)\right)$ est bornée, donc si $0 < \alpha < \dfrac{1}{\delta} - \dfrac{1}{p} - 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)^\alpha d_n(V, U) = 0$ et E est nucléaire.

b) On peut toujours supposer que la suite $(|x_n|_U)$ est décroissante. Soit L_n le sous-espace vectoriel engendré par $x_1, \ldots, x_n$. Alors $\dim L_n \leqslant n$ et $d_n(V, U) \leqslant d_n(\Gamma_{l_p}(x_k), U)$ si $\Gamma_{l_p}(x_k)$ désigne l'enveloppe l_p-disquée de la suite (x_k). Si $x \in \Gamma_{l_p}(x_k)$, $x = \sum_{i=1}^{+\infty} \lambda_i x_i$ avec $\sum_{i=1}^{+\infty} |\lambda_i|^p \leqslant 1$. Donc

$$\left|x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right|_U^p = \left\|x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right\|_U \leqslant \sum_{i=n+1}^{+\infty} |\lambda_i|^p \|x_i\|_U$$

$$\leqslant \sum_{i=n+1}^{+\infty} |\lambda_i|^p |x_i|_U^p \leqslant |x_{n+1}|_U^p \sum_{i=n+1}^{+\infty} |\lambda_i|^p \leqslant |x_{n+1}|_U^p.$$

Donc $(d_n(V, U))^{1/p} \leqslant |x_{n+1}|_U$ car $x \in |x_{n+1}|_U^p U + L_n$ et $\sum (d_n(V, U))^{1/p} < +\infty$ donc $(n d_n(V, U)^{1/p})$ est une suite bornée et E est nucléaire.

c) La démonstration de la proposition 1 fournit également le résultat suivant: si E est un evt métrisable localement p-convexe, et s'il existe une constante C telle que pour tout voisinage U de 0 et tout compact K on ait $\varrho(K, U) \leqslant C$ alors, pour tout voisinage U de 0, il en existe un autre V tel que $\varrho(V, U) \leqslant 2C$. Ce résultat et le résultat a) fournissent la démonstration de c).

PROPOSITION 3. *Soit E un evt localement pseudo-convexe métrisable tel qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout voisinage U de 0 et tout compact K on ait $\lim n^\alpha d_n(K, U) = 0$, alors E est localement convexe.*

Preuve. Soit U un voisinage de 0 de E, qu'on peut prendre p-disqué pour un certain p et soit (V_i) une base de voisinages de 0 de E. Alors $(\Gamma_p(V_i))$ est une base de voisinages de 0 pour l'evt enveloppe localement p-convexe E_p de E et pour tout compact K de E et tout voisinage V de 0 de E, on a $\lim n^\alpha d_n(\Gamma_p(K), \Gamma_p(V)) = 0$. Soit E'_p le séparé de E_p. $E'_p = E_{p/N}$ avec $N = \bigcap_i \Gamma_p(V_i)$. D'après le lemme 7, puisque l'indice de convergence de la suite $\left(d_n(\Gamma_p(K), \Gamma_p(V))\right)$ est $\leqslant \dfrac{1}{\alpha}$, on a $\varrho(\Gamma_p(K), \Gamma_p(V)) \leqslant \dfrac{1}{\alpha}$. Alors, d'après la proposition 1, pour tout voisinage V de 0 dans E, il en existe un autre W tel que $\varrho(\Gamma_p(W), \Gamma_p(V)) \leqslant \dfrac{2}{\alpha}$. Soit $\varphi = E_p \to E'_p$ l'application canonique. Si $n = N(\Gamma_p(W), \Gamma_p(V))$, il existe alors $x_1, \ldots, x_n \in E$ tels que $\Gamma_p(W) \subset \bigcup_{i=1}^n \{x_i + \Gamma_p(V)\}$ donc $\varphi(\Gamma_p(W)) \subset \bigcup_{i=1}^n [\varphi(x_i) + \varphi(\Gamma_p(V))]$ et $N(\varphi(\Gamma_p(W)), \varphi(\Gamma_p(V))) \leqslant N(\Gamma_p(W), \Gamma_p(V))$ et $\varrho(\varphi(\Gamma_p(W)), \varphi(\Gamma_p(V))) \leqslant \varrho(\Gamma_p(W)), \Gamma_p(V)) \leqslant \dfrac{2}{\alpha}$. D'après la proposition 2, E'_p est localement convexe. Si B est un borné de E, $\varphi(B)$ est borné dans E'_p et $\Gamma(\varphi(B)) = \varphi(\Gamma(B))$ est encore borné dans E'_p. En particulier il existe un $\lambda > 0$ tel que pour le voisinage U de 0 dans E choisi au début, on ait $\varphi(\Gamma(B)) \subset \lambda\varphi(\Gamma_p(U)) = \lambda\varphi(U)$. Alors $\Gamma(B) \subset \lambda U + N \subset \lambda U + \lambda U \subset 2^{1/p}\lambda U$ et $\Gamma(B)$ est borné dans E. La bornologie de von Neumann de E est convexe, et E est métrisable, donc il est localement convexe.

Cette dernière proposition est la solution du problème n°8 de S. Rolewicz (voir [5]) posé au Colloque d'Analyse Fonctionnelle de Bordeaux (1971).

Bibliographie

[1] A. N. Kolmogorov et B. M. Tikhomirov, *ε-entropy and ε-capacity of sets in functions spaces*, Amer. Math. Soc. Trans. 17 (1961), p. 277–364.

[2] J. P. Ligaud, *Solution d'un problème de S. Rolewicz sur les espaces nucléaires*, C. R. A. S. t. 273 (1971), p. 113–114.

[3] —, *Sur les rapports de convexité des topologies et bornologies dans les espaces nucléaires*, (à paraître aux Studia Math.)

[4] B. S. Mitiagin, *Approximate dimension and bases in nuclear spaces*, Russian Math. Surveys 16 (1961), p. 59–127.

[5] S. Rolewicz, *Open problems on linear metric spaces*, Colloque d'Analyse Fonctionnelle, Bordeaux (1971), Bull. S. M. F. (à paraître).

[6] A. Dynin et B. S. Mitiagin, *Criterion for nuclearity in terms of approximative dimension*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys. 8 (1960), p. 535–540.

Received October 10, 1972 (597)