STUDIA MATHEMATICA T. XLVIII (1973)

# Sur les idéaux primaires fermés stables par automorphismes linéaires

par

GEORGES BOHNKE (Nancy)

**Abstract.** Soit $A$ une algèbre de Banach de fonctions continues sur $\boldsymbol{R}^n$ tendant vers zéro à l'infini. On suppose que l'espace $\mathscr{D}$ de Schwartz est dense dans $A$ et de topologie plus fine, et que $A$ est stable par l'action du groupe $SL(n, \boldsymbol{R})$. On détermine alors tous les idéaux fermés de $A$, primaires au-dessus de l'origine, qui sont stables par $SL(n, \boldsymbol{R})$, et l'on en déduit un résultat de synthèse harmonique ponctuelle pour $A$. On applique ce résultat aux cas des algèbras de Sobolev $L^p_a(\boldsymbol{R}^n)$, et des algèbres de Lipschitz-Taibleson $\Lambda(a; p, q)$.

**§ 1. Introduction.** Soit $A$ une algèbre de Banach commutative pour le produit ordinaire des fonctions sur $\boldsymbol{R}^n$. Soit $\mathscr{D}$ l'espace des fonctions indéfiniment dérivables sur $\boldsymbol{R}^n$ à support compact muni de la topologie de Schwartz. Soit $\mathscr{C}_0$ l'espace des fonctions continues sur $\boldsymbol{R}^n$ et qui tendent vers 0 à l'infini, muni de la topologie de la convergence uniforme.

On suppose que $A$ remplit les hypothèses (H) que voici:

($\mathrm{H}_1$) *On a* $\mathscr{D} \subset A \subset \mathscr{C}_0$, *ces injections étant d'image dense et continues.*

($\mathrm{H}_2$) $A$ *est invariante par l'action du groupe* $SL(n, \boldsymbol{R})$, *c'est-à-dire, si* $f \in A$ *et si* $g \in SL(n, \boldsymbol{R})$, *alors* $f \circ g \in A$.

Dans cet article, nous caractérisons, pour une telle algèbre $A$, ses idéaux primaires fermés au-dessus de l'origine, qui sont stables par l'action de $SL(n, \boldsymbol{R})$. Nous montrons que, pour un tel idéal, il existe un entier $h \geqslant 1$ tel que l'idéal soit l'ensemble de toutes les fonctions de $A$ dont toutes les dérivées à l'origine au sens distributions, s'annulent jusqu'à l'ordre $h-1$. De plus il existe un nombre entier $\lambda \geqslant 0$, la *hauteur* de l'algèbre, tels que les entiers $h$ en question soient ceux qui sont compris entre 1 et $\lambda+1$. Il en résulte que toute fonction appartenant à $A$ nulle à l'origine, ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $\lambda$, est limite dans $A$ de fonctions nulles *au voisinage* de l'origine, ce qui est un énoncé de synthèse spectrale ponctuelle. Aux corollaires 1 et 2, nous appliquons ces résultats aux algèbres de Sobolev et aux algèbres de Lipschitz–Taibleson.

**§ 2. Le théorème sur les idéaux primaires.** Puisque $\mathscr{D}$ est dense dans $A$ et de topologie plus fine, le dual $A'$ de $A$ s'identifie à un espace de distributions. Soit $A'_0$ l'ensemble des distributions appartenant à $A'$ et à support contenu dans l'origine.

LEMMA 1. *L'ordre des distributions appartenant à $A'_0$ est borné.*

Démonstration. Puisque l'injection canonique de $\mathscr{D}$ dans $A$ est continue, pour tout compact $K$ de $\boldsymbol{R}^n$ il existe un entier $m_K \geqslant 0$ et une constante $C_K \geqslant 0$ tels que, pour toute $\varphi \in \mathscr{D}$ à support dans $K$, on ait:

$$\|\varphi\|_A \leqslant C_K \sup_{|p|\leqslant m_K} \left( \sup_{x\in\boldsymbol{R}^n} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p \varphi(x) \right| \right).$$

Soient $K_1$ un voisinage compact de 0 et $K_2$ un voisinage compact de $K_1$. Soit $\alpha$ une fonction de $\mathscr{D}$ égale à un sur $K_1$ et à zéro hors de $K_2$. Soit $T \in A'_0$. Alors, pour toute $\psi \in \mathscr{D}$, $\psi$ et $\alpha\psi$ coincident au voisinage du support de $T$, donc $\langle T, \psi\rangle = \langle T, \alpha\psi\rangle$.

De plus $\operatorname{supp}(\alpha\psi) \subset K_2$, donc, pour toute $\psi \in \mathscr{D}$,

$$\begin{aligned} |\langle T, \psi\rangle| = |\langle T, \alpha\psi\rangle| &\leqslant \|T\|_{A'} \|\alpha\psi\|_A \\ &\leqslant \|T\|_{A'} C_{K_2} \sup_{|p|\leqslant m_{K_2}} \left( \sup_{x\in\boldsymbol{R}^n} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p (\alpha\psi)(x) \right| \right) \\ &\leqslant \|T\|_{A'} C_{K_2} B_\alpha \sup_{\substack{x\in\boldsymbol{R}^n \\ |p|\leqslant m_{K_2}}} \left( \left| \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p \psi(x) \right| \right), \end{aligned}$$

où la constante $B_\alpha$, qui ne dépend que de $\alpha$, s'exprimerait facilement grâce à la formule de Leibniz. On a ainsi prouvé que la distribution $T$, est d'ordre $\leqslant m_{K_2}$, donc borné indépendamment du choix de $T$ dans $A'_0$.

DÉFINITION. On appellera *hauteur* de $A$ le plus grand entier $\lambda \geqslant 0$ tel que $A'_0$ contienne des distributions d'ordre $\lambda$.

LEMMA 2. *Soit $A$ une algèbre satisfaisant à l'hypothèse* ($\mathrm{H}_1$). *Si $a \in \boldsymbol{R}^n$, désignons par $\chi_a$ l'application $u \mapsto u(a)$ de $A$ dans $\boldsymbol{C}$. Alors $a \mapsto \chi_a$ est un homéomorphisme de $\boldsymbol{R}^n$ sur le spectre de Gelfand de $A$.*

Puisque $A$ est uniformément dense dans $\mathscr{C}_0$ et contient $\mathscr{D}$, on sait déjà que $a \mapsto \chi_a$ est un homéomorphisme de $\boldsymbol{R}^n$ sur un fermé du spectre de Gelfand de $A$ (cf. [1] p. 121 Th. 3.2.4.). Soit $\chi$ un caractère $\not\equiv 0$ de $A$. On a $A' \subset \mathscr{D}'$, donc $\chi$ est une distribution non nulle; son support contient donc *au moins* un point $a$ de $\boldsymbol{R}^n$. En fait, il n'y a *pas d'autre point* que $a$ dans le support de $\chi$, car, si $b \neq a$, et si $V_1$ (resp. $V_2$) est un voisinage de $a$ (resp. $b$) tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, on peut choisir $u \in \mathscr{D}$, à support dans $V_1$, telle que $\chi(u) \neq 0$. Alors, pour toute $v \in \mathscr{D}$ à support dans $V_2$, on aura $u\cdot v = 0$, donc $\chi(u\cdot v) = \chi(u)\cdot\chi(v) = 0$, donc $\chi(v) = 0$, ce qui prouve que $b$ n'appartient pas au support de la distribution $\chi$. Notons $\delta$ la mesure de Dirac. En translatant $a$ à l'origine, on est ramené à prouver que, si une distribution $P(\delta)$ à support l'origine vérifie, quels que soient $u$ et $v$ dans $\mathscr{D}$, la relation

$$(1) \qquad \langle P(\delta), uv\rangle = \langle P(\delta), u\rangle \langle P(\delta), v\rangle,$$

alors $P(\delta) = \delta$. Or, $P(\delta)$ étant à support compact, (1) s'étend aux fonctions $u$ et $v$ à support quelconque. Choisissant $u(x) = e^{i(x\cdot\xi)}$ et $v(x) = e^{i(x\cdot\eta)}$, on obtient que le polynôme $P$ vérifie, quels que soient $\xi \in \boldsymbol{R}^n$, $\eta \in \boldsymbol{R}^n$, la relation $P(\xi)\cdot P(\eta) = P(\xi+\eta)$. Mais le seul polynôme $\not\equiv 0$ vérifiant cette identité est évidemment le polynôme identique à 1, ce qui achève la démonstration.

Notations.

$\mathscr{E}'_{(0)}$ = l'espace vectoriel des distributions à support contenu dans l'origine.

$\mathscr{H}'_{m(0)}$ = l'ensemble des distributions de $\mathscr{E}'_{(0)}$ qui sont *homogènes et d'ordre m*.

$V_m = \mathscr{H}'_{m(0)} \cup \{0\}$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}'_{(0)}$.

$X_m$ = l'ensemble des $T \in \mathscr{E}'_{(0)}$ *non nécessairement homogènes*, mais qui sont *exactement d'ordre m*.

$\mathscr{E}'^{m}_{(0)}$ = l'espace vectoriel des distributions de $\mathscr{E}'_{(0)}$ *d'ordre* $\leqslant m$.

LEMMA 3. *Soit $W$ un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}'_{(0)}$ tel que:*

(i) *$W$ est invariant par l'action de $G = SL(n, \boldsymbol{R})$;*

(ii) *si $T \in W$ et si $u \in \mathscr{D}(\boldsymbol{R}^n)$ alors $u\cdot T \in W$.*

Alors, si $W$ contient *une* distributions *d'ordre k*, il contient *toutes* les distributions à support contenu dans $\{0\}$ *et d'ordre* $\leqslant k$. En particulier, *si $W$ contient une distribution d'ordre maximal $\lambda$, alors $W = \mathscr{E}'^{\lambda}_{(0)}$.*

L'idée d'utiliser l'irréductibilité de la représentation naturelle du groupe $SL(n, \boldsymbol{R})$ dans l'espace des polynômes homogènes d'ordre $m$ en $n$ variables, revient à P. Eymard, que je remercie pour l'aide qu'il m'a apportée dans la démonstration de ce lemme.

Démonstration. Notons $\pi$ la représentation de $G = SL(n, \boldsymbol{R})$ dans $\mathscr{E}'_{(0)}$ définie par la formule $\langle\pi(g)(T), f\rangle = \langle T, f\circ g\rangle$ pour tout $T \in \mathscr{E}'_{(0)}$, tout $g \in G$ et toute $f \in \mathscr{D}$.

1°) $\pi$ induit sur chaque $V_m$ une représentation irréductible $\pi_m$ de dimension finie; en effet, par transformation de Fourier, $\pi_m$ est équivalente à la représentation $\mathfrak{F}\circ\pi_m$ de $SL(n, \boldsymbol{R})$ dans l'espace des polynômes homogènes de degré $m$ à $n$ variables, qui est irréductible, (cf. [1]). L'irréductibilité de $\pi_m$ se traduit comme suit. Soient $S$ et $T$ appartenant à $\mathscr{H}'_{m(0)}$. Alors il existe une mesure $\nu = \sum_{i=1}^{r} c_i g_i$ à support fini dans $G$, où $c_i \in \boldsymbol{C}$, $g_i \in SL(n, \boldsymbol{R})$, $1 \leqslant i \leqslant r$, telle que $S = \pi(\nu)(T)$.

2°) *Par hypothèse* $W \cap X_k \neq \emptyset$. *Montrons d'abord que, pour tout entier* $m$, $0 \leqslant m \leqslant k$, *l'ensemble* $W \cap X_m$ *n'est pas vide.*

Soit $0 \leqslant m \leqslant k-1$. Par hypothèse de récurrence, il existe $T \in W \cap X_{m+1}$ telle que $T \doteq T_{m+1} + S$, où $T_{m+1} \in \mathscr{H}'_{m+1(0)}$ et où l'ordre de $S$ est $\leqslant m$. (Autrement dit $S \in \mathscr{E}'^{m}_{(0)}$). Puisque $\pi_{m+1}$ est irréductible, il existe $\nu = \sum_{i=1}^{r} c_i g_i$ telle que $\pi(\nu)(T_{m+1}) = \dfrac{\partial^{m+1}}{\partial x_1^{m+1}}$ donc telle que

$$\pi(\nu)(T) = \frac{\partial^{m+1}}{\partial x_1^{m+1}} + \pi(\nu)(S), \qquad \text{où} \quad \pi(\nu)(S) \in \mathscr{E}'^{m}_{(0)}.$$

Alors, si $v \in \mathscr{D}(\boldsymbol{R}^n)$ est telle que $v(0) = 0$, $\dfrac{\partial v}{\partial x_1}(0) = \dfrac{1}{m+1}$, $\dfrac{\partial^h v}{\partial x_1^h}(0) = 0$ pour $2 \leqslant h \leqslant m+1$, on a, d'après la formule de Leibniz,

$$v \cdot \pi(\nu)(T) = \frac{\partial^m}{\partial x_1^m} + v \cdot [\pi(\nu)(S)].$$

Or $v \cdot [\pi(\nu)(S)] \in \mathscr{E}'^{m-1}_{(0)}$, puisque $v(0) = 0$, et $v \cdot [\pi(\nu)(T)] \in W \cap X_m$.

3°) Montrons enfin, par récurrence sur $m$, que pour tout entier $m$, $0 \leqslant m \leqslant k$, on a $X_m \subset W$. D'après le 2°), c'est vrai pour $m = 0$ car $X_0 = C\delta$. Soit $m \geqslant 1$, il existe $T \in X_m \cap W$, $T = T_m + S$, où $T_m \in \mathscr{H}'_{m(0)}$ et $S \in \mathscr{E}'^{m-1}_{(0)}$. Alors $T_m = T - S$ appartient à $W$, car $S \in W$ par hypothèse de récurrence. Ainsi, il existe une distribution *homogène* et d'ordre $m$ dans $V$. Par conséquent, d'après l'irréductibilité de $\pi_m$, *toutes* les distributions homogènes et d'ordre $m$ sont dans $W$, et donc $X_m = \bigcup_{i=0}^{m} V_i$ est inclus dans $W$.

Ce lemme va nous permettre de classifier les idéaux primaires fermés invariants par $SL(n, \boldsymbol{R})$ des algèbres satisfaisant aux hypothèses (H). Pour une telle algèbre $A$, soit $W = A' \cap \mathscr{E}'_{(0)}$. En transposant les hypothèses (H), on voit immédiatement que $W$ satisfait aux hypothèses du lemme 3. Donc $W = \mathscr{E}'^{\lambda}_{(0)}$, où $\lambda$ est la hauteur de $A$. Pour tout entier $h$ tel que $0 \leqslant h \leqslant \lambda$, adoptons les notations suivantes: $I_{h+1}$ = l'idéal (évidemment fermé) des fonctions $u \in A$ telles que $\langle D, u \rangle = 0$ pour toute $D \in \mathscr{E}'^{h}_{(0)}$.

$J$ = l'idéal des fonctions de $A$ qui s'annulent au voisinage de l'origine.
$I_1^h$ = l'idéal puissance $h^{\text{ième}}$ de $I_1$. (Remarquons que $I_1$ est un idéal maximal de $A$). $\overline{I_h^1}$ (resp. $\bar{J}$) l'adhérence de $I_h^1$ (resp. $J$) dans $A$.

Enfin, appelons idéal primaire fermé de $A$ au-dessus de 0, tout idéal fermé de $A$ *contenant* $J$ et *contenu* dans $I_1$.

THÉORÈME. *Soit* $A$ *une algèbre satisfaisant aux hypothèses* (H). *Soit* $\lambda$ *la hauteur de* $A$. *Pour tout entier* $h = 1, 2, \ldots, \lambda+1$, *on a* $I_h = \overline{I_1^h}$. *De plus, les idéaux* $I_1, I_2, \ldots, I_{\lambda+1}$ *sont deux à deux distincts, et sont les seuls idéaux primaires de* $A$ *au dessus de* 0, *qui sont stables par l'action du groupe* $SL(n, \boldsymbol{R})$.



*En particulier* $\bar{J} = I_{\lambda+1}$.

Démonstration. 1°) Les idéaux $I_1, I_2, \ldots, I_{\lambda+1}$ sont évidemment des idéaux primaires fermés de $A$ stables par $SL(n, \boldsymbol{R})$. Montrons qu'il n'y a pas d'autres tels idéaux au-dessus de 0. Comme $\bar{J}$ est stable par $SL(n, \boldsymbol{R})$, on aura du même coup montré que $\bar{J} = I_{\lambda+1}$, puisque $\bar{J}$ est le plus petit idéal primaire fermé au-dessus de 0 et qu'il est stable par $SL(n, \boldsymbol{R})$. Soit $I$ un idéal fermé primaire de $A$ au-dessus de 0, invariant par $SL(n, \boldsymbol{R})$. Soit $W$ l'orthogonal de $I$ dans $A'$; c'est un sous-$A$ module de $A'$, invariant par $SL(n, \boldsymbol{R})$. D'autre part, toute distribution $T$ de $W$ a son support contenu dans $\{0\}$, car une telle $T$ est orthogonale à $J$. D'après le lemme 3, on a $W = I^{\perp} = \mathscr{E}'^{h}_{(0)}$, où $h$ est un entier $\leqslant \lambda$. Le théorème des bipolaires montre alors que $I = I_{h+1}$. De plus, puisque pour $h \neq h'$, on a $\mathscr{E}'^{h}_{(0)} \neq \mathscr{E}'^{h'}_{(0)}$, il est clair que $I_h \neq I_{h'}$.

2°) Montrons que $I_h = \overline{I_1^h}$. L'inclusion $I_1^h \subset I_h$ est presque immédiate car, lorsqu'on effectue une dérivation d'ordre $\leqslant h-1$ sur une fonction produit de $h$ facteurs nuls en 0, la dérivée obtenue par la formule de Leibniz est nulle en 0, vu que, dans chaque terme de cette formule, figure au moins l'un des facteurs non dérivé. Pour montrer l'inclusion inverse, nous prouvons que, dans la dualité entre $A$ et $A'$, l'orthogonal de $I_1^h$ est contenu dans l'orthogonal de $I_h$. Soit donc $T \in A'$ telle que, quelles que soient $f_1, \ldots, f_h$ de $A$ et vérifiant $f_1(0) = \ldots = f_h(0) = 0$, on ait $\langle T, f_1 f_2 \ldots f_h \rangle = 0$. Alors $\operatorname{sup} T \subset \{0\}$. En effet, supposons, par l'absurde, qu'un $a \neq 0$ soit dans le support de $T$. Soit $V$ un voisinage de $a$ tel que $0 \notin \bar{V}$. Prenons $f_1 \in \mathscr{D}$, à support dans $V$, telle que $\langle T, f_1 \rangle \neq 0$. Prenons $f_2 = f_3 = \ldots = f_h \in \mathscr{D}$, nulle en 0, et identique à 1 sur $V$. Alors $f_1 f_2 \ldots f_h = f_1$, donc $\langle T, f_1 f_2 \ldots f_h \rangle = \langle T, f_1 \rangle \neq 0$, tandis que $f_1(0) = f_2(0) = f_h(0) = 0$, contrairement à l'hypothèse. Ainsi tout $T$ orthogonal à $I_1^h$ est un opérateur de dérivation à l'origine, d'ordre $k$. Il faut montrer que $T$ est orthogonal à $I_h$, autrement dit, que $k \leqslant h$. Par l'absurde, supposons $k \geqslant h$. Soit $a_k \dfrac{\partial^k}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}$, avec $a_k \neq 0$, l'un des monômes de dérivation d'ordre maximum de $T$. Puisque $k_1 + \ldots + k_n = k \geqslant h$, il existe évidemment des fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_h \in \mathscr{D}(\boldsymbol{R}^n)$, nulles à l'origine, et telles que $f_1 f_2 \ldots f_h(x) = x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n}$ au voisinage de l'origine. Or, il est clair que $\langle T, f_1 f_2 \ldots f_h \rangle = \langle T, x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \rangle = a_k k_1! \ldots k_n!$ est $\neq 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse sur $T$. En effet, is $S = a_{k'} \dfrac{\partial^{k'}}{\partial x_1^{k'_1} \ldots \partial x_n^{k'_n}}$ est un autre monôme de dérivation intervenant dans $T$, pour un $i$ au moins, on aura $k'_i < k_i$, donc $\langle S, x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} \rangle = \left[x_i^{k_i - k'_i} g(x)\right](0) = 0$.

**§ 3. Exemple 1: Les algèbres de Sobolev $L^p_\alpha(\boldsymbol{R}^n)$.** Soit $p$ un nombre réel tel que $1 < p < \infty$. Posons $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$. Soit $\alpha$ réel. Notons $G_\alpha$ le noyau distribution de Bessel d'ordre $\alpha$ dont la transformée de Fourier est $\frac{1}{(1+|x|^2)^{\alpha/2}}$. Rappelons que, pour $\alpha > 0$, $G_\alpha$ s'identifie à une fonction de $L^1(\boldsymbol{R}^n)$ et que l'espace de Sobolev $L^p_\alpha(\boldsymbol{R}^n)$ est constitué des fonctions $f$ telles que $f = G_\alpha * h$ où $h \in L^p(\boldsymbol{R}^n)$. Sur $L^p_\alpha(\boldsymbol{R}^n)$ on considère la norme $\|f\|_{L^p_\alpha} = \|h\|_p$, qui en fait un espace de Banach. On montre facilement que le dual de $L^p_\alpha$ est l'espace $L^{p'}_{-\alpha}(\boldsymbol{R}^n)$ des distributions $T \in \mathscr{S}'$ telles que $\hat{T}(t)\cdot(1+|t|^2)^{-\frac{\alpha}{2}} \in \mathfrak{F}L^{p'}(\boldsymbol{R}^n)$ où $\hat{}$ désigne la transformation de Fourier. ($\mathscr{S}'$ désigne l'espace des distributions tempérées, dual de l'espace $\mathscr{S}$ de Schwarz). *Lorsque* $\alpha > \frac{n}{p}$, le comportement à l'origine de $G_\alpha$ entraîne que cette fonction est dans $L^{p'}$. De plus, Strichartz a montré dans [4] que, dans ce cas, $L^p_\alpha(\boldsymbol{R}^n)$ *est une algèbre pour le produit ordinaire des fonctions, invariante par l'action de* $GL(n,\boldsymbol{R})$, *telle que* $\mathscr{S}(\boldsymbol{R}^n) \subset L^p_\alpha(\boldsymbol{R}^n) \subset \mathscr{C}_0(\boldsymbol{R}^n)$, *les injections étant d'image dense et continues. Donc elle satisfait aux hypothèses* (H).

Pour préciser notre théorème dans le cas de l'algèbre $L^p_\alpha(\boldsymbol{R}^n)$, calculons sa hauteur. Si $\beta$ est un nombre réel, notons $\beta^*$ le plus grand entier *strictement* inférieur à $\beta$.

LEMME 4. *Soit* $\alpha > \frac{n}{p}$. *Alors l'algèbre* $L^p_\alpha(\boldsymbol{R}^n)$ *est de hauteur* $\left(\alpha-\frac{n}{p}\right)^*$.

Notons $\lambda$ la hauteur de $L^p_\alpha$.

1°) $\lambda \geqslant \left(\alpha-\frac{n}{p}\right)^*$: en effet, si $\alpha - k > \frac{n}{p}$, toute distribution $D$, à support l'origine et d'ordre $k$, est dans le dual $L^{p'}_{-\alpha}(\boldsymbol{R}^n)$, car $D * G_\alpha = D * G_k * G_{\alpha-k} \in L^{p'}$, puisque $D * G_k$ est un convoluteur de $L^{p'}$ et que $G_{\alpha-k} \in L^{p'}$.

2°) $\lambda \leqslant \left(\alpha-\frac{n}{p}\right)^*$: soit $T \in \mathscr{E}'_{(0)} \cap L^{p'}_{-\alpha}(\boldsymbol{R}^n)$ d'ordre $k$.

a) *Si $k$ est pair*, soit $k = 2h$. Si $\Delta$ est le Laplacien, on a $(\delta-\Delta)^h \in L^{p'}_{-\alpha}(\boldsymbol{R}^n)$ d'après le lemme 3, donc, par définition de $L^{p'}_{-\alpha}$, $\frac{(1+|t|^2)^{k/2}}{(1+|t|^2)^{\alpha/2}} \in \mathfrak{F}L^{p'}(\boldsymbol{R}^n)$. Il en résulte que le noyau de Bessel $G_{\alpha-k}$ est dans $L^{p'}(\boldsymbol{R}^n)$, ce qui implique $\alpha - k > \frac{n}{p}$, d'après les propriétés élémentaires de ce noyau liées au comportement des fonctions de Bessel à l'origine.



b) Si $k$ est impair, alors $\frac{\partial T}{\partial x_1} \in L^{p'}_{-(\alpha+1)}$: on le voit facilement par transformation de Fourier en utilisant le fait que $\frac{t_1}{(1+|t|^2)^{1/2}}$ est un multiplicateur de $\mathfrak{F}L^{p'}$. D'après a), on a alors $\alpha+1 > \frac{n}{p}+k+1$, soit $\alpha > \frac{n}{p}+k$.

Le théorème peut donc s'appliquer à l'algèbre $L^p_\alpha(\boldsymbol{R}^n)$ dont il fournit la liste des idéaux primaires fermés stables par $SL(n,\boldsymbol{R})$. De plus l'égalité $I_{\lambda+1} = \bar{J}$ s'énonce en termes d'approximation:

COROLLAIRE 1. *Soit* $\alpha > \frac{n}{p}$. *Si* $u \in L^p_\alpha(\boldsymbol{R}^n)$ *s'annule, ainsi que ses dérivées à l'origine, jusqu'à l'ordre* $\left(\alpha-\frac{n}{p}\right)^*$, *alors $u$ est approximable en norme de* $L^p_\alpha$ *par des fonctions de* $L^p_\alpha(\boldsymbol{R}^n)$ *qui s'annulent au voisinage de l'origine.*

Remarques. 1°) Si $\frac{n}{p} < \alpha \leqslant \frac{n}{p}+1$, l'algèbre $L^p_\alpha(\boldsymbol{R}^n)$ est de hauteur nulle, donc $I_1 = \bar{J}$. Autrement dit, dans ce cas, l'origine (et donc par translation *tout point* de $\boldsymbol{R}^n$) est un ensemble de synthèse spectrale relativement à cette algèbre. Il est naturel de se demander alors si, plus précisément, un point est un *ensemble de Ditkin* pour $L^p_\alpha(\boldsymbol{R}^n)$, mais nous n'avons pas pu répondre à cette question. Par dualité, elle se transforme en un problème de division, celui de démontrer que pour $\frac{n}{p} < \alpha \leqslant \frac{n}{p}+1$ les hypothèses $u \in L^p_\alpha(\boldsymbol{R}^n)$, $u(0) = 0$ et $T \in L^{p'}_{-\alpha}(\boldsymbol{R}^n)$, $u\cdot T = \delta$ sont incompatibles.

2°) Plus généralement les difficultés de l'Analyse Harmonique des algèbres $L^p_\alpha(\boldsymbol{R}^n)$ tiennent en partie à ce que cette algèbre ne possède pas d'autres unités approchées *bornées*. En effet, supposons qu'il existe $(u_n)$, unité approchée, au sens fort, de $L^p_\alpha$, bornée en norme par $C$. Soit $K$ un compact de $\boldsymbol{R}^n$ tel que $(\operatorname{mes} K)^{\frac{1}{p}} > 2C$. Soit $f \in \mathscr{D}$ telle que $0 \leqslant f \leqslant 1$ et $f \equiv 1$ sur $K$. Puisque $u_n\cdot f \to f$ dans $L^p_\alpha$ entraîne $u_n\cdot f \to f$ dans $L^p$, il existe $n_0$ tel que, pour tout $n > n_0$, on ait: $\|u_n\|_{L^p_\alpha} \geqslant \|u_n\|_p \geqslant \|u_n\cdot f\|_p \geqslant \|f\|_p/2 \geqslant (\operatorname{mes} K)^{\frac{1}{p}}/2 > C$, ce qui est absurde.

**§ 4. Exemple 2: Les espaces de Lipschitz—Taibleson $\Lambda(\alpha,p,q)$.** Soient $p$ et $q$ deux nombres réels strictement compris entre 1 et $+\infty$, et soit un nombre réel $\alpha > \frac{n}{p}$. Si $f \in L^p(\boldsymbol{R}^n)$, posons

$$\omega_1(f,t,p) = \sup_{0<|h|\leqslant t} \|f(x+h)-f(x)\|_p,$$

et

$$\omega_2(f, t, p) = \sup_{0<|h|\leqslant t} \|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)\|_p.$$

Soit $\Lambda(\alpha, p, q)$ l'espace de Banach introduit par Taibleson dans [5], des fonctions $f \in L^p(\boldsymbol{R}^n)$ telles que

$$(1) \qquad \|f\| = \|f\|_p + \left[\int_0^{+\infty} [t^{-\alpha}\omega_j(f, t, p)]^q \frac{dt}{t}\right]^{1/q} < +\infty,$$

où $j = 1$ si $0 < \alpha < 1$, et $j = 2$ si $1 \leqslant \alpha < 2$. Si $\alpha \geqslant 2$, on définit $\Lambda(\alpha, p, q)$ comme l'ensemble des $f$ telles que

$$(2) \qquad \|f\| = \|f\|_p + \sum_{|s|=\alpha^*} \left\|\frac{\partial^s f}{\partial x^s}\right\| < +\infty,$$

où $\alpha^*$ est le plus grand entier strictement inférieur à $\alpha$.

C. S. Herz prouve dans [2], prop. 1. 6., que ces espaces sont en fait, pour le produit ordinaire des fonctions des *algèbres* satisfaisant à l'hypothèse $(\mathrm{H}_1)$. On voit facilement qu'elles remplissent aussi la condition $(\mathrm{H}_2)$ de stabilité par $SL(n, \boldsymbol{R})$. En effet soit $f$ une fonction $\Lambda(\alpha, p, q)$ et $g \in SL(n, \boldsymbol{R})$. Si $f \in L^p(\boldsymbol{R}^n)$, il est clair que $f\circ g \in L^p(\boldsymbol{R}^n)$. De plus les dérivées partielles premières de $f\circ g$ sont combinaisons linéaires de celles de $f$, donc grâce à (2), on est ramené, par récurrence, à prouver que, si l'intégrale figurant dans (1) est finie pour $f$, elle est aussi finie pour $f\circ g$. Vérifions-le pour $j = 1$; pour $j = 2$ c'est analogue.

$$\begin{aligned}\omega_1(f\circ g, t, p) &= \sup_{0\leqslant|h|\leqslant t} \|f(gx+gh)-f(gx)\|_p \\ &= \sup_{0<|h|\leqslant t} \|f(y+gh)-f(y)\|_p \\ &\leqslant \sup_{0<|k|\leqslant\|g\|t} \|f(y+k)-f(y)\|_p = \omega_1(f, \|g\|t, p)\end{aligned}$$

donc

$$\int_0^{+\infty} [t^{-\alpha}\omega_1(f\circ g, t, p)]^q \frac{dt}{t} \leqslant \int_0^{+\infty} [t^{-\alpha}\omega_1(f, \|g\|t, p)]^q \frac{dt}{t}$$
$$= \|g\|^{\alpha q} \int_0^{+\infty} [t^{-\alpha}\omega_1(f, t, p)]^q \frac{dt}{t}$$

est fini, c.q.f.d.

Passons maintenant au calcul de la *hauteur* de l'algèbre $\Lambda(\alpha, p, q)$. Dans [6] (p. 833, th. 5), Taibleson montre que le dual de $\Lambda(\alpha, p, q)$ est l'espace des distributions $\Lambda(-\alpha, p', p')$ où $p'$ et $q'$ sont les exposants conjugués



de $p$ et de $q$. Pour définir cet espace, introduisons le noyau de Gauss–Weierstrass,

$$W(x, y) = y^{-n/2} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4y}\right), \quad x \in \boldsymbol{R}^n, \ y > 0.$$

Notons, pour toute $S \in \mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^n)$:

$$S(x, y) = [S * W(.\,, y)](x)$$

et pour toute fonction $g(x, y)$ mesurable dans $\boldsymbol{R}^n \times \boldsymbol{R}$, posons, pour $1 < p$, $q < \infty$

$$\|g(x, y)\|^*_{p,q} = \left(\int_0^1 (\|g(x, y)\|_p)^q \frac{dy}{y}\right)^{1/q}.$$

Alors, d'après [5], p. 436, $\Lambda(-\alpha, p', q')$ est l'ensemble des distributions $S$ appartenant à l'espace de Sobolev $L^{p'}_{-\alpha-\frac{1}{2}}$ et telle que $\|y^{\frac{\alpha}{2}} S(x, y)\|^*_{p',q'} < +\infty$.

Lemme 5. *Soit $r \geqslant 1$. Soit $D$ une distribution, à support égal à l'origine, et d'ordre $k \geqslant 0$. Il existe $c > 0$ et il existe $\eta > 0$, tels que, pour tout $y$ tel que $0 < y < \eta$,*

$$\int_{\boldsymbol{R}^n} \left|D_X\left[\exp\left(-\frac{|x|^2}{4y}\right)\right]\right|^r dx \geqslant c y^{\frac{n-kr}{2}}.$$

Démonstration. 1°) Traitons d'abord le cas où $D$ est un opérateur différentiel *homogène* d'ordre $k$. Faisons le changement de variables $\frac{x_i}{\sqrt{y}} = u_i$, $i = 1, \ldots, n$. On a $dx = y^{\frac{n}{2}} du$ et $D_x = y^{-\frac{k}{2}} D_u$, donc la formule

$$(3) \qquad \int_{\boldsymbol{R}^n} \left|D_x\left[\exp\left(-\frac{|x|^2}{4y}\right)\right]\right|^r dx = y^{-kr/2} y^{n/2} \int_{\boldsymbol{R}^n} \left|D_u\left[\exp-\left(\frac{|u|^2}{4}\right)\right]\right|^r du.$$

La fonction $D_u\left[\exp\left(-\frac{|u|^2}{4}\right)\right]$ n'est pas identiquement nulle. Il suffit, pour le voir, de considérer sa transformée de Fourier qui est le produit d'un polynôme par $\exp\left(-\frac{|t|^2}{4}\right)$. Ce polynôme ne peut pas être identique à zéro sans que tous ses coefficients le soient, donc sans que $D$ soit égal à 0, ce qui n'est pas possible puisque $\operatorname{supp} D = \{0\} \neq \emptyset$.

On pose alors $c = \int_{\boldsymbol{R}^n} \left|D_u\left[\exp\left(-\frac{|u|^2}{4}\right)\right]\right|^r dx$ et on prend $\eta$ quelconque.

2°) Cas général. $D$ est quelconque et peut s'écrire $D = \overset{k}{D}+\overset{k-1}{D}+\dots$ $\dots+\overset{0}{D}$, où $\overset{i}{D}$ est homogène de degré $i$, et où $\overset{k}{D}$ est supposé non nul. On a donc

$$D_x = \overset{k}{D}_x+\overset{k-1}{D}_x+\dots+\overset{0}{D}_x = y^{-k/2}\,[\overset{k}{D}_u+\sqrt{y}\,\overset{k-1}{D}_u+\dots+(\sqrt{y})^k\,\overset{0}{D}_u],$$

par conséquent,

$$\int_{R^n}\left|D_x\left[\exp\left(-\frac{|x|^2}{4y}\right)\right]\right|^r dx$$
$$= y^{n/2}y^{-kr/2}\int_{R^n}\left|\overset{k}{D}_u\left[\exp\left(-\frac{|u|^2}{4}\right)\right]+\sqrt{y}\,\overset{k-1}{D}_u\left[\exp\left(-\frac{|u|^2}{4}\right)\right]+\dots+\right.$$
$$\left.+(\sqrt{y})^k\,\overset{0}{D}_u\left[\exp\left(-\frac{|u|^2}{4}\right)\right]\right|^r dx.$$

Posons $\varphi_i = \overset{i}{D}_u\left[\exp\left(-\frac{|u|^2}{4}\right)\right]$ avec $i=1,\dots,k$; alors, dès que $0<y<\eta$,

$$\int_{R^n}\left|D_x\left[\exp\left(-\frac{|x|^2}{4y}\right)\right]\right|^r dx = y^{n/2}y^{-kr/2}\|\varphi_k+\sqrt{y}\,\varphi_{k-1}+\dots+(\sqrt{y})^k\varphi_0\|^r$$
$$\geqslant c y^{n/2}y^{-kr/2},$$

où $c = \dfrac{\|\varphi_k\|_r}{2}$ est $\neq 0$ et où $\eta>0$ est choisi tel que

$$\|\varphi_k+y^{1/2}\varphi_{k-1}+\dots+y^{k/2}\varphi_0\|_r \geqslant \|\varphi_k\|_r/2 \qquad \text{pour tout } y<\eta.$$

($\eta$ existe puisque la fonction $y\mapsto\|\varphi_k+y^{1/2}\varphi_{k-1}+\dots+y^{k/2}\varphi_0\|_r$ est continue et prend la valeur $\|\varphi_k\|_r$ pour $y=0$).

LEMME 6. *Soient $1<p<\infty$ et $1<q<\infty$. Soit $a>\frac{n}{p}$. Alors l'algèbre $\Lambda(a,p,q)$ est de hauteur $\left(a-\frac{n}{p}\right)^*$ = le plus grand entier strictement inférieur à $a-\frac{n}{p}$.*

Démonstration. Soit $\lambda$ cette hauteur.

a) Montrons d'abord que $\lambda\leqslant\left(a-\frac{n}{p}\right)^*$.

Soit $D\in\Lambda(-a,p',q')$, d'ordre $k$, et à support contenu dans $\{0\}$. Alors $D\in L^{p'}_{-a-\frac{1}{2}}$, et, d'après l'exemple 1, ceci implique $a>\frac{n}{p}+k-\frac{1}{2}$, ce qui est une condition plus faible que $a>\frac{n}{p}+k$. Mais, en fait

$$\int_0^1\left(\left\|y^{\frac{a}{2}}D(x,y)\right\|_{p'}\right)^{q'}\frac{dy}{y} = \int_0^1 y^{\frac{aq'}{2}-1}dy\left(\int_{R^n}|D_xW(x,y)|^{p'}dx\right)^{\frac{q'}{p'}}$$

est fini.

A fortiori, d'après le lemme 5, il existe $\eta>0$ tel que

$$\int_0^\eta y^{\frac{aq'}{2}-1}y^{-\frac{nq'}{2}}y^{\left(\frac{n-kp'}{2}\right)\frac{q'}{p'}}dy<\infty,$$

ce qui exige $aq'-nq'+(n-kp')\frac{q'}{p'}>0$, c'est-à-dire $a>\frac{n}{p}+k$.

b) Pour terminer la démonstration du lemme 6, en vertu du lemme 3, il suffit d'exhiber une distribution exactement d'ordre $\lambda=\left(a-\frac{n}{p}\right)^*$ et appartenant à $\Lambda(-a,p',q')$.

Soit $D$ une distribution homogène d'ordre $\lambda$ et à support dans $\{0\}$. D'après l'exemple 1, on a $D\in L^{p'}_{-a}$, donc à fortiori $D\in L^{p'}_{-a-\frac{1}{2}}$. Il reste à voir que $\|y^{\frac{a}{2}}D(x,y)\|^*_{p',q'}$ est fini. Mais d'après la formule (3)

$$\int_{R^n}\left|D_x\left[\exp\left(-\frac{|x|^2}{4y}\right)\right]\right|^{p'}dx = c\cdot y^{-\frac{\lambda p'}{2}}y^{n/2} \qquad \text{où } c=\int_{R^n}\left|D_u\left[\exp\left(-\frac{|u|^2}{4}\right)\right]\right|^{p'}du.$$

Il en résulte que

$$\int_0^1(\|y^{\frac{a}{2}}D(x,y)\|_{p'})^{q'}\frac{dy}{y} = c^{\frac{q'}{p'}}\int_0^1 y^{\frac{aq'}{2}-1}y^{\left(\frac{n-\lambda p'}{2}\right)\frac{q'}{p'}}y^{-\frac{nq'}{2}}dy<+\infty$$

puisque $q'\left(a-n+\dfrac{n-\lambda p'}{p'}\right)$ est $>0$.

En appliquant notre théorème, nous obtenons maintenant le

COROLLAIRE 2. *Soit $a>\frac{n}{p}$. Si $u\in\Lambda(a,p,q)$ s'annule ainsi que ses dérivées à l'origine jusqu'à l'ordre $\left(a-\frac{n}{p}\right)^*$, alors $u$ est approximable par des fonctions appartenant à $\Lambda(a,p,q)$ qui s'annulent au voisinage de l'origine, et ceci en norme $\Lambda(a,p,q)$.*

**Bibliographie**

[1] H. Boerner, *Representations of Groups*, 1963.
[2] C. S. Herz, *Lipschitz spaces and Bernstein's theorem on absolutely convergent Fourier transforms*, J. Math. Mech. 18 (1968), pp. 283–323.
[3] C. E. Rickart, *General theory of Banach algebras*, 1960.
[4] R. S. Strichartz, *Multipliers on fractional Sobolev spaces*, J. Math. Mech. 16 (1967) pp. 1031–1060.
[5] M. H. Taibleson, *On the theory of Lipschitz spaces of distributions on Euclidean spaces* I, J. Math. Mech. 13 (1964), pp. 407–479.
[6] — *Lipschitz spaces of distributions on Euclidean spaces II*, J. Math. Mech. 14 (1965), pp. 821–839.

*Received August 28, 1972* (579)

STUDIA MATHEMATICA T. XLVIII. (1973)

# Translation invariant subspaces of $L^p(G)$

by

AHARON ATZMON* (Los Angeles, Calif. and Orsay, France)

**Abstract.** The main result of this paper is that if $G$ is a locally compact abelian group which is not compact and $1 \leqslant p < \frac{4}{3}$ then $L^p(G)$ contains a closed translation invariant subspace which is not the closed span of translates of a single function.

**1. Introduction.** In what follows $G$ is a locally compact abelian group equipped with a Haar measure $dx$. For $1 \leqslant p \leqslant \infty$ we denote by $L^p(G)$ the classical Banach spaces associated with the pair $(G, dx)$. For a function $f \in L^p(G)$ and $y \in G$, the $y$-translate of $f$ is the function $f_y$ defined by $f_y(x) = f(x-y)$, $x \in G$. A subspace $V \subset L^p(G)$ is called *translation invariant*, if $f \in V$ implies that $f_y \in V$ for every $y \in G$. In this paper we are concerned with the following problem:

Is every closed translation invariant subspace of $L^p(G)$, $1 \leqslant p < \infty$, the closed span of translates of a single function?

If $G$ is compact, the structure of the closed translation invariant subspaces of $L^p(G)$ is completely determined ([11], p. 94) and it follows easily from their characterization that if $G$ is compact and metrizable, the answer to our problem is affirmative. The structure of the closed translation invariant subspaces of $L^2(G)$ was also completely determined, by Ditkin ([2], p. 111) for $G = R$ and for general $G$ by L. Schwartz ([9], p. 869), who also proved that the answer to our problem is affirmative for metrizable $G$ and $p = 2$.

On the other hand it has been proved in [1] that if $G$ is not compact then $L^1(G)$ contains a closed translation invariant subspace which is not the closed span of translates of finitely many functions, so that the answer to the problem is negative in this case.

For $G$ which is not compact and $p \neq 2$ very little is known about the closed translation invariant subspaces of $L^p(G)$ (see [3], p. 238), and the determination of their structure seems to be far out of our scope. The main result of this paper is that the answer to the problem posed is negative for $G$ not compact and $1 \leqslant p < \frac{4}{3}$. That is we prove:

* This work has been partially supported by NSF Grant GP-29012.