[4] P. Mankiewicz, *On the extension of sequentially continuous functionals in LF-spaces*, to appear in Bull. de l'Acad. Pol. des Sci.
[5] W. Słowikowski, *Fontionelles linéaires dans des réunions dénomerables d'espaces de Banach reflexifs*, C. R. Acad. Sc. Paris, 262 (1966), A 870–A 872.
[6] — *Extensions of sequentially continuous linear functionals in inductive sequences of F-spaces*, Studia Math., 26 (1966), pp. 193–221.
[7] — *Epimorfism of adjoint to generalized LF-spaces*, Lecture Notes, 1966, Aarhus University.
[8] J. M. Horváth, *Topological vector spaces and distributions*, I, 1966.

INSTITUTE OF MATHEMATICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
INSTYTUT MATEMATYCZNY, POLSKA AKADEMIA NAUK

Received April 4, 1972 (516)

STUDIA MATHEMATICA T. XLVIII. (1973)

Eigenschaften von Schauder Basen und Reflexivität

von

ULRICH MERTINS (Karlsruhe)

Zusammenfassung. Für lokalkonvexe Räume E mit einer Schauder Basis werden Sätze vom folgenden Typ bewiesen: E ist reflexiv genau dann, wenn jede Schauder Basis von E eine gewisse Eigenschaft erfüllt.

1. Einleitung. Es bezeichne E einen lokalkonvexen Raum mit einer Schauder Basis $\{x_i\}$. Ist $\{f_i\} \subset E'$ die Folge der zugehörigen Koeffizientenfunktionale, so sei die Basis auch durch $\{x_i, f_i\}$ gekennzeichnet.

Der Zusammenhang von Reflexivität des Raumes E und Eigenschaften der Basis $\{x_i, f_i\}$ ist in zahlreichen Untersuchungen (etwa in [1]–[6], [12], [16], [19] und [21]) erörtert. Zwei Basiseigenschaften spielen hierbei eine Hauptrolle: Eine Schauder Basis $\{x_i, f_i\}$ heißt fallend (engl. shrinking), wenn $\{f_i\}$ eine Schauder Basis für E'_b (Dual E' versehen mit der starken Topologie $\beta(E', E)$) ist. Die Basis heißt beschränkt vollständig (engl. boundedly complete), wenn für eine skalare Folge $\{a_i\}$ aus der Beschränktheit der Folge $\{\sum_{i\leqslant n} a_i x_i\}$ ihre Konvergenz in E folgt.

Zunächst zeigte James [5] für (B)-Räume, dann Retherford [16] für tonnelierte und schließlich Cook [1] für beliebige lokalkonvexe Räume, daß E genau dann halb-reflexiv ist, wenn die Basis $\{x_i, f_i\}$ fallend und beschränkt vollständig ist.

Die vorliegende Arbeit befaßt sich mit der Frage, ob ein tonnelierter Raum reflexiv ist, wenn alle seine Schauder Basen fallend bzw. beschränkt vollständig sind. Dabei werden Ergebnisse von Kalton [6] verbessert, der seinerseits Untersuchungen von Singer [19], Zippin [21] und Retherford [16] weitergeführt hat. Dies wird erreicht analog dem Vorgehen von Kalton durch eine Abschwächung der Begriffe "fallend" und "beschränkt vollständig" (Definitionen 2 und 3 in Abschnitt 2). Die hier gewählte Form der Abschwächung ist jedoch der Fragestellung und den Gegebenheiten von Basen in lokalkonvexen Räumen angepaßter als die von Kalton und liefert daher auch weiter reichende Ergebnisse. Zwar ist auch hier die Frage nicht für den allgemeinsten Fall beantwortet; jedoch lassen die offen bleibenden Probleme (A) und (B) in Abschnitt 2 vermuten, daß sie mit wesentlich anderen Hilfsmitteln als den hier angewendeten untersucht werden müssen.

Eine Folge $\{y_i\} \subset E$ heißt regulär, wenn es eine Nullumgebung U in E gibt mit $y_i \notin U$ für alle $i \in \mathbf{N}$. Ist die Folge zusätzlich beschränkt, so heißt sie normalisiert (vgl. Kalton [7]). Für tonnelierte Räume E ist eine Schauder Basis $\{x_i, f_i\}$ genau dann normalisiert, wenn $\{f_i\}$ in E'_b eine normalisierte Schauder Basisfolge ist (Schauder Basis ihrer abgeschlossenen linearen Hülle $[f_i] \subset E'_b$ (vgl. Kalton [7]; pg. 96).

Ist die Schauder Basis $\{x_i, f_i\}$ des tonnelierten Raumes E normalisiert, so existieren daher eine Nullumgebung V in E, eine beschränkte Teilmenge A in E und Konstanten $0 < m \leqslant M < \infty$ derart, daß

$$m \leqslant p_{A^\circ}(f_i) p_V(x_i) \leqslant M \quad \text{für } i \in \mathbf{N}, \tag{1}$$

wobei p_V bzw. p_{A° die Distanzfunktionen der Nullumgebungen V in E bzw. A° (Polare von A) in E'_b bezeichnen. Ist E ein (B)-Raum und $V = A$ die Einheitskugel in E, so ist (1) mit $m = 1$ stets erfüllt (vgl. Singer [18]; pg. 20).

Eine große Klasse tonnelierter Räume erfüllt (1) jedoch nicht: Es sei E ein (FM)-Raum (ein (F)-Raum der zugleich Montelscher Raum ist). Da E tonneliert ist, konvergiert die Folge $\{\sum_{i \leqslant n} < f_i, x > x_i\}$, $x \in E$, gleichmäßig auf allen präkompakten Teilmengen von E. Die präkompakten Teilmengen von E stimmen mit den beschränkten überein, und folglich gilt für jede beschränkte Teilmenge B und jede Nullumgebung U in E $\lim_{i\to\infty} p_{B^\circ}(f_i) p_U(x_i) = 0$. Die vorliegenden Untersuchungen ergeben eine enge Beziehung zwischen der Reflexivität eines Raumes E und dem Konvergenzverhalten der Folgen $\{p_{B^\circ}(f_i) x_i\}$ bzw. $\{p_U(x_i) f_i\}$ in E bzw. E', wenn $\{x_i, f_i\}$ eine Schauder Basis für E ist.

2. Definitionen, Ergebnisse und offene Fragen. Ist $\{x_i, f_i\}$ eine Schauder Basis des tonnelierten Raumes E, so sei $H = [f_i]$ die abgeschlossene lineare Hülle der Folge $\{f_i\} \subset E'_b$. Nach Kalton [8] ist H ein tonnelierter Raum, $\{f_i\}$ eine Schauder Basis für H mit den zugehörigen Koeffizientenfunktionalen $\{x_i\} \subset E \subset H'$ und die starke Topologie $\beta(H', H)$ von H' induziert die Topologie von E.

Definition 1. Eine Schauder Basis $\{x_i, f_i\}$ für E heiße *stark fallend*, wenn für jede Nullumgebung U und jede beschränkte Teilmenge B in E $\lim_{i\to\infty} p_{B^\circ}(f_i) p_U(x_i) = 0$ ist.

Ist $\{x_i\}$ in E nicht stark fallend, so ist auch $\{f_i\}$ in H nicht stark fallend. Jede im Sinne von Kalton [7] normalisierte Basis ist nicht stark fallend.

Satz 1. *Ist E ein tonnelierter Raum mit einer Schauder Basis $\{x_i, f_i\}$, dann ist für jede Nullumgebung U und jede beschränkte Teilmenge B in E die Folge $\{p_{B^\circ}(f_i) p_U(x_i)\}$ beschränkt.*

Beweis. Die Folge der Entwicklungsoperatoren $\{I_n\}$, die definiert sind durch $I_n x = \sum_{i \leqslant n} < f_i, x > x_i$, $x \in E$, ist gleichstetig.

Somit existiert in E ein Topologie erzeugendes System von Halbnormen p_U mit der Eigenschaft

$$\sup_n p_U(I_n x) = p_U(x), \quad x \in E. \tag{2}$$

Damit ist

$$|\langle f_i, x\rangle| p_U(x_i) \leqslant 2 p_U(x), \quad x \in E,\ i \in \mathbf{N},$$

woraus die Behauptung folgt.

Definition 2. Eine Schauder Basis $\{x_i, f_i\}$ für E heiße *schwach fallend*, wenn für jede beschränkte Teilmenge B in E $\lim_{i\to\infty} p_{B^\circ}(f_i) x_i = 0$ ist in der schwachen Topologie $\sigma(E, E')$ von E.

Ist die Schauder Basis $\{x_i, f_i\}$ fallend, so auch schwach fallend, da für jedes $f \in E'$ $\lim_{n\to\infty} \sum_{i \leqslant n} < f, x_i > f_i = f$ in der Topologie von E'_b.

Definition 3. Eine Schauder Basis $\{x_i, f_i\}$ für E heiße *dual schwach fallend*, wenn für jede Nullumgebung U in E $\lim_{n\to\infty} p_U(x_i) f_i = 0$ ist in der schwachen Topologie $\sigma(H, H')$ von H.

Beschränkt vollständige Basen sind in tonnelierten Räumen stets dual schwach fallend wie der folgende Satz zeigt.

Satz 2. *In einem tonnelierten Raum E ist eine Schauder Basis $\{x_i, f_i\}$ dual schwach fallend genau dann, wenn für eine skalare Folge $\{a_i\}$ aus der Beschränktheit der Folge $\{\sum_{i \leqslant n} a_i x_i\}$ stets folgt $\lim_{i\to\infty} a_i x_i = 0$ in E.*

Beweis. Die Schauder Basis $\{x_i, f_i\}$ für E sei dual schwach fallend, und $\{a_i\}$ sei eine skalare Folge derart, daß $B = \{\sum_{i \leqslant n} a_i x_i \colon n \in \mathbf{N}\}$ in E beschränkt ist. Dann ist B in H' auch $\beta(H', H)$-beschränkt und, da H tonneliert ist, $\sigma(H', H)$-relativkompakt. Folglich hat B einen Häufungspunkt $\chi \in H'$, für den gilt $a_i = \langle \chi, f_i \rangle$, $i \in \mathbf{N}$. Damit ist nach Voraussetzung für jede Nullumgebung U in E $\lim_{i\to\infty} p_U(a_i x_i) = \lim_{i\to\infty} |\langle \chi, f_i\rangle| p_U(x_i) = 0$. Es folge nun umgekehrt aus der Beschränktheit von $\{\sum_{i \leqslant n} a_i x_i\}$ in E die Konvergenz von $\{a_i x_i\}$ gegen Null.

Für jedes $f \in E'$ ist $\{\sum_{i \leqslant n} \langle f, x_i \rangle f_i\}$ $\sigma(E', E)$-konvergent und damit auch $\sigma(E', E)$-beschränkt. Wegen der Tonneliertheit von E ist somit $\{\sum_{i \leqslant n} \langle f, x_i \rangle f_i\}$ auch beschränkt in E'_b und folglich auch in H. Demnach ist für jedes $\chi \in H'$ $\sup_n |\langle \chi, \sum_{i \leqslant n} \langle f, x_i \rangle f_i \rangle| = \sup_n |\sum_{i \leqslant n} \langle f, x_i \rangle \langle \chi, f_i \rangle| < \infty$ und hiermit ist $\{\sum_{i \leqslant n} \langle \chi, f_i \rangle x_i\}$ beschränkt in E. Für jede Nullumgebung U in E ist damit $\lim_{i\to\infty} p_U(x_i) f_i = 0$ in $\sigma(H, H')$.

Eine stark fallende Basis ist schwach und dual schwach fallend. Aus den Definitionen 2 und 3 ergeben sich sofort folgende Zusammenhänge.

SATZ 3. *Es sei E ein tonnelierter Raum mit einer Schauder Basis $\{x_i, f_i\}$.*

(a) *$\{x_i\}$ ist in E schwach fallend genau dann, wenn $\{f_i\}$ in H dual schwach fallend ist.*

(b) *$\{x_i\}$ ist in E dual schwach fallend genau dann, wenn $\{f_i\}$ in H schwach fallend ist.*

Bemerkung. Normalisierte schwach fallende bzw. dual schwach fallende Basen sind in (B)-Räumen vom Typ (ωc_0) bzw. $(\omega c_0)^*$ im Sinne von Foiaş und Singer [3]. Solche Basen sind in lokalkonvexen Räumen "semi-shrinking" bzw. "semi-boundedly complete" im Sinne von Kalton [6].

THEOREM. *Es sei E ein folgenvollständiger tonnelierter Raum mit einer nicht stark fallenden Schauder Basis. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *E ist reflexiv.*

(b) *Jede nicht stark fallende Schauder Basis ist fallend.*

(c) *Jede Schauder Basis ist schwach fallend.*

(d) *Jede Schauder Basis ist dual schwach fallend.*

(e) *Jede nicht stark fallende Schauder Basis ist beschränkt vollständig.*

Beweisübersicht. Da ein tonnelierter Raum mit einer Schauder Basis genau dann reflexiv ist, wenn die Basis fallend und beschränkt vollständig ist, genügt es, die Äquivalenz der Aussagen (b) bis (e) zu zeigen. Die dazu notwendigen Sätze sind in Abschnitt 3 bereitgestellt:

(b) ist äquivalent mit (c) aufgrund der Definitionen und des Satzes 3.5. (c) ist äquivalent (d) wegen der Sätze 3.1 und 3.2. Schließlich ist (d) äquivalent (e) aufgrund der Definitionen und des Satzes 3.6.

Für normalisierte Basen hat dieses Ergebnis Kalton [6], Theorem 5.3 gezeigt. Die Äquivalenz von (a) und (c) hat für (B)-Räume Holub ([4], Theorem 4.1) bewiesen.

SATZ 4. *Es sei E ein (F)-Raum mit einer Schauder Basis. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *E ist ein Montelscher Raum.*

(b) *Jede Schauder Basisfolge ist stark fallend.*

Beweis. Ist E ein Montelscher Raum, dann ist auch jeder abgeschlossene Teilraum Montelsch und damit jede Schauder Basisfolge stark fallend. Ist E nicht Montelsch und $\{x_i\}$ eine Schauder Basis für E, dann existiert nach Kalton ([7]; § 5) eine Blockbasisfolge $\{y_j\}$ von $\{x_i\}$ und eine skalare Folge $\{a_j\}$ derart, daß $\{a_j y_j\}$ eine normalisierte Schauder Basisfolge ist. Wegen (1) ist daher $\{y_j\}$ nicht stark fallend.

Das Theorem und der Satz 4 werfen zwei Probleme auf, die hier

offen bleiben:

(A) *Ist ein lokalkonvexer Raum mit einer Schauder Basis reflexiv, wenn alle seine Basen stark fallend sind?*

(B) *Ist ein tonnelierter Raum mit einer Schauder Basis sogar Montelsch, wenn alle seine Basen stark fallend sind?*

Eine Teilantwort auf das Problem (B) ist bekannt, denn es gilt

SATZ 5. *Es sei E ein (F)-Raum mit einer Schauder Basis. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *E ist nuklear.*

(b) *Für jede Schauder Basis $\{x_i, f_i\}$ für E, jede Nullumgebung U und jede beschränkte Teilmenge B in E ist*

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_{B^\circ}(f_i) p_U(x_i) < \infty.$$

Beweis. Ist E nuklear, so folgt die Aussage (b) sofort aus dem von Pietsch ([15]; 10.2.1) angegebenen Beweis eines Satzes von Dynin und Mitiagin der besagt, daß in nuklearen (F)-Räumen alle Schauder Basen absolut sind. Gilt die Aussage (b), so sind alle Schauder Basen in E absolut, und nach einem Ergebnis von Wojtyński [20] ist dann E nuklear.

Pełczyński und Szlenk [14] sowie Retherford [17] haben Beispiele für (B)-Raum Basen angegeben, die schwach fallend aber nicht fallend sind. Wegen (1) sind diese Basen nicht stark fallend. Schauder Basen von reflexiven (B)-Räumen sind fallend (und damit schwach fallend) aber nicht stark fallend. Offen bleibt hier das Problem

(C) *Gibt es Beispiele für Basen, die stark fallend (und damit schwach fallend) aber nicht fallend sind?*

Wegen (1) kann eine solche Basis nur in einem nicht normierbaren lokalkonvexen Raum gefunden werden.

3. Sätze zum Beweis des Theorems. Dieser Abschnitt zeigt die Zusammenhänge der Aussagen (b) bis (e) des Theorems auf. Die Beweisideen sind im wesentlichen von Kalton [6] auf die hier vorliegenden Gegebenheiten übertragen. Dies gelingt insbesondere durch die Neufassung des Begriffs der Blockstörung (Definition 3.3) für nicht reguläre Basen und des damit möglichen Beweises von Satz 3.5.

3.1. SATZ. *Sind in dem tonnelierten Raum E mit Schauder Basis alle Schauder Basen schwach fallend, so sind alle Schauder Basen auch dual schwach fallend.*

Beweis. Die Schauder Basis $\{x_i, f_i\}$ für E sei nicht dual schwach fallend. Dann existieren ein $\chi \in H'$, eine Nullumgebung U in E und eine aufsteigende Folge $\{n_j\}$ natürlicher Zahlen mit

$$p_U(x_{n_j}) |\langle \chi, f_{n_j} \rangle| \geqslant 1 \quad \text{für } j \in \mathbf{N}. \tag{3}$$

Wir setzen zur Abkürzung $\langle\chi, f_i\rangle = a_i$. Dann ist $a_{n_j} \neq 0$, $j \in \boldsymbol{N}$. Durch

$$
(4)\qquad
\begin{aligned}
z_i &= \begin{cases} x_i & \text{für } i \neq n_j, \\ \sum\limits_{k=1}^{n_j} a_k x_k & \text{für } i = n_j, \end{cases} \qquad i \in \boldsymbol{N} \text{ und} \\
g_i &= \begin{cases} f_i - a_i a_{n_j}^{-1} f_{n_j} & \text{für } i \neq n_j,\ n_{j-1} < i \leqslant n_j (n_0 = 0), \\ a_{n_j}^{-1} f_{n_j} - a_{n_{j+1}}^{-1} f_{n_{j+1}} & \text{für } i = n_j, \end{cases} \qquad i \in \boldsymbol{N}
\end{aligned}
$$

wird ein Biorthogonalsystem $\{z_i, g_i\}$ definiert. Für $n_{j-1} \leqslant l < n_j$ und $x \in E$ gilt, wie sofort nachzurechnen

$$\sum_{i=1}^{l} \langle g_i, x\rangle z_i - \sum_{i=1}^{l} \langle f_i, x\rangle x_i = -\langle a_{n_j}^{-1} f_{n_j}, x\rangle \sum_{i=1}^{l} a_i x_i .$$

Die Teilmenge $B = \{\sum_{i \leqslant n} a_i x_i\colon n \in \boldsymbol{N}\}$ ist beschränkt in E (vgl. Beweis zu Satz 2). Aus (3) folgt wegen $\lim\limits_{j\to\infty} \langle a_{n_j}^{-1} f_{n_j}, x\rangle a_{n_j} p_U(x_{n_j}) = 0$, daß für jedes $x \in E$ $\lim\limits_{j\to\infty} \langle a_{n_j}^{-1} f_{n_j}, x\rangle = 0$. Folglich ist $\{z_i, g_i\}$ eine Schauder Basis für E. Ferner ist für $j \in \boldsymbol{N}$ $p_{B^\circ}(g_{n_j}) \geqslant 1$ und damit $\lim\limits_{j\to\infty} |\langle f_{n_1}, z_{n_j}\rangle| p_{B^\circ}(g_{n_j}) \geqslant |a_{n_1}| > 0$, d.h. $\{z_i, g_i\}$ ist nicht schwach fallend.

3.1. Folgerung. *Es sei E ein tonnelierter Raum mit einer Schauder Basis $\{x_i, f_i\}$. Ist $\{x_i\}$ nicht dual schwach fallend, dann existiert in $H = [f_i] \subset E'_b$ eine Schauder Basis, die ebenfalls nicht dual schwach fallend ist.*

Beweis. Durch (4) ist eine Schauder Basis $\{z_i, g_i\}$ für E definiert. Folglich ist $\{g_i\}$ eine Schauder Basis für $[g_i] \subset E'_b$. Die abgeschlossene lineare Hülle $[g_i]$ enthält nicht $f_{n_1} \in E'$. Denn wäre f_{n_1} Element von $[g_i]$, dann wäre $f_{n_1} = a_{n_1} \sum_{j=1}^{\infty} g_{n_j}$ in E'_b. $\{g_{n_j}\}$ ist aber eine reguläre Folge in E'_b, da aus der Beschränktheit von $B = \{z_{n_j}\colon j \in \boldsymbol{N}\}$ in E folgt, $p_{B^\circ}(g_{n_j}) = \sup\{|\langle g_{n_j}, x\rangle|\colon x \in B\} \geqslant 1$ für $j \in \boldsymbol{N}$. Setzt man $g_0 = f_{n_1}$, so stimmen die linearen Hüllen von $\{g_i\}_{i=0}^{\infty}$ und $\{f_i\}$ überein, und wegen $H = [g_0] \oplus [g_i]_{i=1}^{\infty}$ ist $\{g_i\}_{i=0}^{\infty}$ Schauder Basis für H. $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ ist nicht dual schwach fallend in $[g_i]_{i=1}^{\infty}$, und somit ist wegen Satz 2 auch $\{g_i\}_{i=0}^{\infty}$ nicht dual schwach fallend in H.

3.2. Satz. *Sind in dem tonnelierten Raum E mit Schauder Basis alle Schauder Basen dual schwach fallend, so sind alle Schauder Basen auch schwach fallend.*

Beweis. Die Schauder Basis $\{x_i, f_i\}$ sei nicht schwach fallend. Dann ist $\{f_i\}$ in $H = [f_i]$ nicht dual schwach fallend. Da H tonneliert ist und $\beta(H', H)$ die Topologie von E induziert, besagt die Folgerung 3.1, daß in $[x_i] \subset H'$ eine Basis existiert, die nicht dual schwach fallend ist.

Die von Pełczyński und Singer [13] eingeführte Blockstörung von Basen sei hier abgeändert für den Fall nicht regulärer Basen.

3.3. Definition. Es sei $\{x_i\}$ eine Basis des lokalkonvexen Raumes E. Eine *Blockstörung* der Basis $\{x_i\}$ heiße jede Folge $\{z_i\}$ der Form

$$z_i = \begin{cases} x_i & \text{für } i \neq k_j, \\ x_{k_j} + p(x_{k_j}) y_j & \text{für } i = k_j, \end{cases} \qquad i \in \boldsymbol{N},$$

wobei $y_j = \sum\limits_{i=n_{j-1}+1}^{k_j-1} a_i x_i + \sum\limits_{i=k_j+1}^{n_j} a_i x_i$, $\{y_j\}$ beschränkt in E und wobei $\{n_j\}$ und $\{k_j\}$ aufsteigende Folgen positiver ganzer Zahlen sind mit $n_0 = 0$, $n_{j-1} < k_j \leqslant n_j$, $j \in \boldsymbol{N}$, und p eine stetige Halbnorm auf E.

3.4. Hilfssatz. *Jede Blockstörung $\{z_i\}$ einer Schauder Basis $\{x_i, f_i\}$ des tonnelierten Raumes E ist ebenfalls eine Schauder Basis für E mit der Folge $\{h_i\}$ der zugehörigen Koeffizientenfunktionale der Form*

$$h_i = \begin{cases} f_i - p(x_{k_j}) a_i f_{k_j} & \text{für } i \neq k_j,\ n_{j-1} < i \leqslant n_j, \\ f_{k_j} & \text{für } i = k_j, \end{cases} \qquad i \in \boldsymbol{N}.$$

$\{h_i\}$ ist eine Schauder Basis für $H = [f_i] \subset E'_b$.

Beweis. Die Biorthogonalität von $\{z_i\}$ und $\{h_i\}$ ist sofort nachzurechnen. Für alle $x \in E$ gilt

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{l} \langle h_i, x\rangle z_i - \sum_{i=1}^{l} \langle f_i, x\rangle x_i \\
&= \begin{cases} -\langle f_{k_j}, x\rangle p(x_{k_j}) \sum\limits_{i=n_{j-1}+1}^{l} a_i x_i & \text{für } n_{j-1} < l \leqslant k_j - 1, \\ \langle f_{k_j}, x\rangle p(x_{k_j}) \sum\limits_{i=l+1}^{n_j} a_i x_i & \text{für } k_j \leqslant l \leqslant n_j, \end{cases} \qquad j \in \boldsymbol{N}.
\end{aligned}
$$

Wegen (2) folgt aus der Beschränktheit der Folge $\{y_j\}$ die Beschränktheit der Mengen

$$\Big\{\sum_{i=n_{j-1}+1}^{l} a_i x_i\colon n_{j-1} < l \leqslant k_j - 1,\ j \in \boldsymbol{N}\Big\} \quad \text{und}$$

$$\Big\{\sum_{i=l+1}^{n_j} a_i x_i\colon k_j \leqslant l \leqslant n_j,\ j \in \boldsymbol{N}\Big\} \quad \text{in } E.$$

Da ferner für jedes $x \in E$ $\lim\limits_{j\to\infty} \langle f_{k_j}, x\rangle p(x_{k_j}) = 0$, gilt somit auch $\lim\limits_{l\to\infty} \sum_{i=1}^{l} \langle h_i, x\rangle z_i = x$ in E. Damit ist $\{z_i\}$ Schauder Basis für E. Demnach ist auch $\{h_i\}$ Schauder Basis für $[h_i] \subset E'_b$. Da jedoch die linearen Hüllen von $\{h_i\}$ und $\{f_i\}$ übereinstimmen, ist $\{h_i\}$ Schauder Basis für H.

3.5. SATZ. *Es sei E ein tonnelierter Raum mit einer nicht stark fallenden Schauder Basis $\{x_i, f_i\}$. Ist jede Blockstörung von $\{x_i\}$ schwach fallend, dann ist $\{x_i\}$ fallend.*

Beweis. Es sei $\{x_i, f_i\}$ nicht fallend. Dann existieren ein $f \in E'$ und eine beschränkte Blockbasisfolge $\{y_j\}$,

$$y_j = \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} a_i x_i, \quad \text{mit } f(y_j) = 1,\ j \in \boldsymbol{N},$$

wobei $\{n_j\}$ eine wachsende Folge positiver ganzer Zahlen ist mit $n_0 = 0$ (vgl. Kalton [7]; Theorem 5.4).

Da $\{x_i, f_i\}$ nicht stark fallend ist, existiert eine stetige Halbnorm p, eine beschränkte Teilmenge $A \subset E$ und eine wachsende Folge $\{k_j\}$ natürlicher Zahlen mit $p_{A^\circ}(f_{k_j}) p(x_{k_j}) \geqslant 1$, $j \in \boldsymbol{N}$. Die Blockbasisfolge $\{y_j\}$ und die Folge $\{k_j\}$ seien o.B.d.A. so gewählt, daß $n_{j-1} < k_j \leqslant n_j$, $j \in \boldsymbol{N}$. Setzt man

$$z_i = \begin{cases} x_i & \text{für } i \neq k_{2j-1} \\ x_{k_{2j-1}} + p(x_{k_{2j-1}}) y_{2j} & \text{für } i = k_{2j-1} \end{cases} \quad j \in \boldsymbol{N},$$

so ist $\{z_i\}$ eine Blockstörung von $\{x_i\}$, die nach Voraussetzung schwach fallend ist. Mithin haben wir für jedes $f \in E'$

$$\lim_{j\to\infty} p_{A^\circ}(f_{k_{2j-1}}) \langle f, x_{k_{2j-1}} \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{j\to\infty} p_{A^\circ}(f_{k_{2j-1}}) \langle f, z_{k_{2j-1}} \rangle = 0.$$

Dies steht aber im Widerspruch zu $p_{A^\circ}(f_{k_{2j-1}}) p(x_{k_{2j-1}}) \langle f, y_{2j} \rangle \geqslant 1$ für $j \in \boldsymbol{N}$. Folglich ist die Basis $\{x_i, f_i\}$ fallend.

3.6. SATZ. *Es sei E ein folgenvollständiger tonnelierter Raum mit einer Schauder Basis $\{x_i, f_i\}$, die nicht stark fallend ist. Ist jede Schauder Basis in E dual schwach fallend, dann ist $\{x_i\}$ beschränkt vollständig.*

Beweis. Ist $\{x_i\}$ nicht beschränkt vollständig, so ist nach Kalton ([8]; 5.3 Corollary 2) $\{f_i\}$ nicht fallend in $H = [f_i]$. Folglich existiert wegen Satz 3.5 eine Blockstörung $\{g_i\}$ von $\{f_i\}$, die nicht schwach fallend ist. Die zu $\{g_i\}$ gehörende Folge $\{z_i\} \subset H'$ der Koeffizientenfunktionale ist eine Basisfolge in H' bzgl. der starken Topologie $\beta(H', H)$. Da die linearen Hüllen von $\{z_i\}$ und $\{x_i\}$ aufgrund der Definition der Blockstörung übereinstimmen und $\beta(H', H)$ die Topologie von E induziert, ist $\{z_i\}$ eine Schauder Basis von E und nach Voraussetzung dual schwach fallend. Dies ist aber ein Widerspurch zu $\{g_i\}$ nicht schwach fallend.

Literatur

[1] T. A. Cook, *Schauder decomposition and semi-reflexiv spaces*, Math. Ann. 182 (1969), S. 232–235.

[2] E. Dubinsky and J. R. Retherford, *Schauder bases and Köthe sequence spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 130 (1968), S. 265–280.

[3] C. Foiaş, and I. Singer, *On bases in C ([0, 1]) and L^1([0, 1])*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 10 (1965), S. 931–960.

[4] J. R. Holub, *Bases of type P and reflexivity in (B)-spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 25 (1970), S. 357–362.

[5] R. C. James, *Bases and reflexivity in Banach spaces*, Math. Ann. 52 (1950), S. 518–527.

[6] N. J. Kalton, *Schauder bases and reflexivity*, Studia Math. 38 (1970), S. 255–266.

[7] — *Normalisation properties of Schauder Bases*, Proc. London Math. Soc. 22 (1971), S. 91–105.

[8] — *Schauder decompositions of locally convex spaces*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 68 (1970), S. 377–392.

[9] — *Schauder decompositions and completeness*, Bull. London Math. Soc. 2 (1970), S. 34–36.

[10] G. Köthe, *Topologische lineare Räume*, Berlin–Heidelberg–New York 1966.

[11] L. E. Lerer, *Basis sequences in Montel spaces*, Math. Notes 6 (1969), S. 653–656.

[12] U. Mertins, *Reflexivität und Schauder Basen vom Typ P und P**, Manuscripta Math. 5 (1971), S. 147–153.

[13] A. Pełczyński and I. Singer, *On non-equivalent bases and conditional bases in Banach spaces*, Studia. Math. 25 (1964), S. 5–25.

[14] — and W. Szlenk, *An example of a non-shrinking basis*, Rev. Roumaine Math. Pures et Appl. 10 (1965), S. 961–966.

[15] A. Pietsch, *Nukleare lokalkonvexe Räume*, Berlin 2. Aufl. 1969.

[16] J. R. Retherford, *Bases, basic sequences and reflexivity of linear topological spaces*, Math. Ann. 164 (1966), S. 280–285.

[17] — *A semi-shrinking basis which is not shrinking*, Proc. Amer. Math. Soc. 19 (1968), S. 766.

[18] I. Singer, *Bases in Banach spaces*, Berlin-Heidelberg-New York 1970.

[19] — *Basic sequences and reflexivity of Banach spaces*, Studia Math. 21 (1962), S. 351–369.

[20] W. Wojtyński, *On conditional bases in non-nuclear Fréchet spaces*, Studia Math. 35 (1970), S. 77–96.

[21] M. Zippin, *A remark on bases and reflexivity in Banach spaces*, Israel J. Math. 6 (1968), S. 74–79.

MATHEMATISCHES INSTITUT I
UNIVERSITÄT KARLSRUHE

Received May 22, 1972 (532)