STUDIA MATHEMATICA, T. XLVIII. (1973)

Harmonische Analyse auf gewissen nilpotenten Lieschen Gruppen

von

HORST LEPTIN (Bielefeld)

In [3] habe ich u.a. gezeigt, daß in der Gruppenalgebra $\mathscr{L}^1(N)$ einer zusammenhängenden nilpotenten Lieschen Gruppe N der Klasse 2 Wieners Satz in folgender Form gilt: *Jedes* abgeschlossene zweiseitige Ideal $\mathscr{I}$ von $\mathscr{L}^1(N)$ liegt im Kern $\mathscr{M}$ einer irreduziblen stetigen unitären Darstellung von $\mathscr{L}^1(N)$, die Faktoralgebren $\mathscr{L}^1(N)/\mathscr{M}$ sind alle symmetrisch und lassen sich explizit als verallgemeinerte L^1-Algebren reeller Räume $\boldsymbol{R}^{2m}$ beschreiben. Wir wollen hier mit denselben Methoden zeigen, daß die $\mathscr{L}^1(N)$ selbst symmetrisch sind. Ferner ist leicht zu sehen, daß für diese N Kirillows Vermutung [2] zutrifft, wir erhalten also, zusätzlich zu den Beispielen in [1], unendlich viele weitere (allerdings dünne) Stützen für diese Vermutung.

1. Sei A eine endlichdimensionale assoziative nilpotente Algebra der Klasse r über dem Körper $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen, es ist also $A^{r+1} = 0$. Sei $\tilde{A}$ die aus A durch Adjunktion des Einselementes $\mathbf{1}$ zu A erhaltene Algebra. Die Menge

$$N = N(A) = \{\mathbf{1}+x \in \tilde{A};\ x \in A\}$$

ist dann eine nilpotente einfach zusammenhängende Liesche Gruppe der Klasse r.

Sei $\mathfrak{a}$ die aus A erhaltene Liesche Algebra, d.h. $\mathfrak{a}$ und A enthalten dieselben Elemente und das Liesche Produkt in $\mathfrak{a}$ sei durch $[x, y] = xy - yx$ definiert. Ist $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \ldots + \frac{1}{r!}x^r$ für $x \in A$, so ist $\{e^{tx}\}_{t\in \boldsymbol{R}}$ eine einparametrige Untergruppe von N, es existiert also ein durch x bestimmtes Element $\tilde{x}$ aus der Lieschen Algebra $\mathfrak{n}$ von N mit $(\tilde{x} f)(z) = \frac{d}{dt} f(z\, e^{tx})\,|_{t=0}$ für differenzierbare Funktionen f auf N. Für die Funktionen $\varrho(w)\colon z \to zw$ $(w, z \in N)$ erhält man

$$\tilde{x}\varrho(w)(z) = zxw = \varrho(xw)(z),$$

also $\tilde{x}\varrho(w) = \varrho(xw)$. Hieraus folgt $[\tilde{x}, \tilde{y}]\varrho(w) = \varrho([x, y]w) = [x, y]^{\sim}\varrho(w)$, da $\tilde{u}\varrho(w) = 0$ für alle w nur für $\tilde{u} = 0$ gilt, erhalten wir also $[x, y]^{\sim} = [\tilde{x}, \tilde{y}]$, d.h. $x \to \tilde{x}$ ist ein Isomorphismus, der uns gestattet, $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{n}$ zu identifizieren. Wegen $ge^x g^{-1} = e^{gxg^{-1}}$ für $g \in N$ und $x \in A$ erhalten wir

$$(\mathrm{Ad}\, g)x = gxg^{-1}$$

für die adjungierte Darstellung von N in $\mathfrak{a}$.

2. Sei nun A die in [3], Teil III, betrachtete Algebra, A besitzt also eine Basis $\{x_i, x_{ij};\ i, j = 1, \ldots, n,\ i < j\}$ mit den Relationen $x_i x_j = -x_j x_i = x_{ij}$ für $i < j$, $x_i^2 = x_i x_{jk} = x_{jk} x_i = 0$. Es folgt dann $A^3 = 0$ und $xy = -yx$ für alle $x, y \in A$. Für $g = \mathbf{1} + a \in N$ erhalten wir wegen $g^{-1} = \mathbf{1} - a + a^2$

$$(\mathrm{Ad}\, g)x = x + 2ax = T_{2a}x,$$

also $T_b = \mathrm{Ad}(\mathbf{1} + \tfrac{1}{2}b)$ für die in [3] definierten Transformationen T_b, $b \in A$. Hieraus folgt, daß der in [3] betrachtete Raum $\dot{A}$ der Bahnen $\mathcal{O}(z)$ der Elemente z aus der (mit A identifizierbaren) dualen Gruppe $\hat{A}$ des Vektorraumes A bezüglich der adjungierten Transformationen T_b' übereinstimmt mit dem Kirillowschen Raum der Bahnen von $\mathfrak{a}^* = L(\mathfrak{a}, \boldsymbol{R})$ unter der kanonischen, durch die adjungierte Darstellung von N in $\mathfrak{a}$ definierten Wirkung von N auf $\mathfrak{a}^*$.

Das Dual $\hat{N}$ der Gruppe N läßt sich als topologischer Raum mit dem Spektrum $\hat{\mathscr{L}}$ der Algebra $\mathscr{L} = \mathscr{L}^1(N)$ identifizieren und da N vom Typ I, also $\mathscr{L}$ postliminal ist, können wir weiter $\hat{\mathscr{L}}$ mit dem Raum Prim $(\mathscr{L})$ der primitiven Ideale und der Hülle–Kern–Topologie identifizieren.

Wie in [3] identifizieren wir nun $\mathscr{L}$ als Banachschen Raum wieder mit $\mathscr{L}^1(A)$ und weiter wie üblich das Spektrum der kommutativen L^1-Algebra $\mathscr{L}^1(A)$ mit der dualen Gruppe $\hat{A}$. Ein primitives Ideal $\mathscr{M}$ in $\mathscr{L}$ ist dann in $\mathscr{L}^1(A)$ gerade der Kern $\mathscr{M}_z$ einer Bahn $\dot{z} = \mathcal{O}(z) \in \dot{A}$ und F: $\mathscr{M} \to \dot{z}$ ist die kanonische Abbildung von $\hat{\mathscr{L}} = \mathrm{Prim}\,\mathscr{L}$ auf $\dot{A}$.

Sei X eine abgeschlossene Teilmenge von $\hat{\mathscr{L}}$, also die Hülle eines abgeschlossenen Ideals $\mathscr{I}$ aus $\mathscr{L}$. Dann ist $\mathscr{I}$ auch ein Ideal in $\mathscr{L}^1(A)$ und die Hülle X' ist abgeschlossen und invariant (bezgl. der T_b') in $\hat{A}$. Das Bild $F(X) = \dot{X}$ ist die Menge der Bahnen $\dot{z}$ der z aus X'. Da die Projektion p von $\hat{A}$ auf $\dot{A}$ offen und stetig ist, hat das Komplement U von X' ein offenes Bild $\dot{U}$ in $\dot{A}$. Aus der Invarianz von X' folgt dann $\dot{X} = p(X') = p(\complement U) = \complement \dot{U}$, d.h. $\dot{X}$ ist abgeschlossen. Somit ist die Abbildung F abgeschlossen.

Ist umgekehrt $\dot{Y}$ in $\dot{A}$ abgeschlossen, so ist das Urbild $p^{-1}(\dot{Y}) = Y'$ in $\hat{A}$ invariant und abgeschlossen, also $\mathscr{J} = k(Y')$ ein invariantes Ideal in $\mathscr{L}^1(A)$ und somit ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal in $\mathscr{L}$. Die Hülle $Y = h(\mathscr{J})$ ist also abgeschlossen in $\hat{\mathscr{L}}$. Da $Y = F^{-1}(\dot{Y})$ ist F stetig.

Dann ist aber F als bijektive, abgeschlossene und stetige Funktion ein Homöomorphismus von $\hat{\mathscr{L}}$ auf $\dot{A}$. Weil nach [3] jede zusammenhängende nilpotente Liesche Gruppe N der Klasse 2 Faktorgruppe einer geeigneten Gruppe $N(A)$ ist, haben wir damit bewiesen:

Satz 1. *Für jede zusammenhängende nilpotente Liesche Gruppe N der Klasse 2 ist das Dual $\hat{N}$ kanonisch homöomorph zum Raum der Bahnen des Raumes $\mathfrak{n}$ der reellen linearen Funktionale auf der Lieschen Algebra $\mathfrak{n}$ von N unter der natürlichen Wirkung der Gruppe N.*

3. In diesem Abschnitt bereiten wir den Beweis für die Symmetrie der Gruppenalgebra $\mathscr{L}^1(N)$ vor. Sei A ein l-dimensionaler reeller Vektorraum, Φ ein linearer Unterraum des Endomorphismenringes $\mathscr{L}(A)$ mit $\Phi^2 = 0$ und Γ die kommutative Untergruppe von $\mathrm{Aut}(A)$ aller $\mathbf{1} + \varphi$, $\varphi \in \Phi$. Wir betrachten Γ als Transformationsgruppe von A, die Abbildung von $\Gamma \times A$ auf A ist analytisch. Sei $\dot{A}$ der Raum der Bahnen

$$\dot{x} = \Gamma x = x + \Phi x = \{x + \varphi x;\ \varphi \in \Phi\}.$$

Da die Bahnen $\dot{x}$ als affine Unterräume von A abgeschlossen sind, ist $\dot{A}$ ein lokal kompakter T_1-Raum, der i.a. nicht Hausdorffsch ist. Es gilt jedoch das

Lemma. *Sei $\dot{Z}$ eine abgeschlossene Teilmenge aus $\dot{A}$ und Z ihr abgeschlossenes Urbild in A. Enthält $\dot{Z}$ mindestens zwei Elemente, so existieren Γ-invariante offene Mengen U und V in A, sowie ein Γ-invarianter affiner Unterraum H in A mit*

$$Z \subset H,\ U \cap Z \neq \emptyset,\ V \cap Z \neq \emptyset,\ U \cap V \cap H = \emptyset,$$

insbesondere enthält $\dot{Z}$ nicht leere, in $\dot{Z}$ offene disjunkte Teilmengen.

Beweis. Sei C der von ΦA aufgespannte Teilraum von A und sei B ein komplementärer Summand, so daß also

$$A = B \oplus C, \qquad \Phi A \subset C, \qquad \Phi C = 0.$$

Die Projektion q von A auf B ist dann faktorisierbar durch die Projektion p von A auf $\dot{A}$, denn es gilt

$$p(x) = x + \Phi x \subset x + C = q(x) \oplus C.$$

Sei r: $\dot{Z} \to B$ die durch diese Faktorisierung definierte stetige Abbildung, also $q(x) = r\big(p(x)\big) = r(\dot{x})$. Enthält $r(\dot{Z})$ mindestens zwei Elemente, etwa u und v, so wählen wir disjunkte offene Umgebungen U_1 von u und V_1 von v in B. Dann sind $U = U_1 \oplus C$, $V = V_1 \oplus C$ in A offen, disjunkt und invariant und erfüllen zusammen mit $H = A$ die Bedingungen des Lemmas.

Sei nun $r(\dot{Z}) = \{b\}$. In diesem Fall haben die Bahnen aus $\dot{Z}$ die Form

$$\dot{z} = (b \oplus z)^{\cdot} = b + z + D, \qquad z \in C, \quad D = \Phi b.$$

Wir können dann einen zu D komplementären Unterraum E in C wählen, so daß also $C = E \oplus D$. Da $\dot{Z}$ mindestens zwei Bahnen enthält, existieren u und v in E mit $\bar{u} \neq \bar{v}$, $\bar{u}, \bar{v} \in \dot{Z}$. Wieder wählen wir disjunkte offene Umgebungen U_1 von u und V_1 von v in E und setzen

$$U = \Gamma(B \oplus U_1 \oplus D), \qquad V = \Gamma(B \oplus V_1 \oplus D), \qquad H = b \oplus C.$$

Ein Element aus $U \cap H$ hat die Form

$$b_1 + u + d + \varphi b_1 = b + c \qquad \text{mit } b, b_1 \in B,\ u \in U_1,\ d \in D,\ c \in C.$$

Hieraus folgt $b = b_1$, $c = u + d + \varphi b \in U_1 \oplus D$, also $U \cap H \subset b \oplus U_1 \oplus D$, ebenso $V \cap H \subset b \oplus V_1 \oplus D$, also $U \cap V \cap H = \emptyset$. Offensichtlich ist H affin und $Z \subset H$, ferner sind U, V und H invariant und wegen $b + u \in U \cap Z$, $b + v \in V \cap Z$ sind somit alle Bedingungen des Lemmas erfüllt.

Ist A, wie in Teil 2, eine nilpotente Algebra der Klasse 2 und $N = N(A)$, so erfüllt $\Phi = \{T_b;\ b \in A\}$ die Bedingungen des Lemmas, ebenso $\hat{A}$ und $\Phi' = \{T'_b\}$. Hieraus erhalten wir für N (siehe auch [4]).

Satz 2. *Ist π eine nicht triviale stetige irreduzible Darstellung von $\mathscr{L}^1(N)$ in einem separierten topologischen Vektorraum E, so ist der Kern $\mathscr{K}$ von π aus* Prim$(\mathscr{L}^1(N))$, *d.h. gleich einem $\mathscr{M}_z$.*

Beweis. $\mathscr{K}$ ist ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal in $\mathscr{L}^1(N)$, also als Teil von $\mathscr{L}^1(A)$ ein Ideal mit invarianter abgeschlossener Hülle Z in $\hat{A}$. Wir behaupten, daß Z eine Bahn ist. Sonst könnten wir nämlich Teile U, V und H in $\hat{A}$ wählen mit den im Lemma enthaltenen Eigenschaften. Die Komplemente U' und V' von U und V in $\hat{A}$ wären dann abgeschlossen und invariant, ihre Kerne $\mathscr{X}$ und $\mathscr{Y}$ also invariante Ideale in $\mathscr{L}^1(A)$, also zweiseitige Ideale in $\mathscr{L}^1(N)$ mit der Hülle $h(\mathscr{X} \cap \mathscr{Y}) = h(\mathscr{X}) \cap h(\mathscr{Y}) = U' \cap V' = \complement(U \cap V) \supset H$. Da H als affiner Raum in $\hat{A}$ eine Synthese-Menge und $Z \subset H$ ist folgt

$$h\big(\mathscr{K} \cap k(H)\big) = h(\mathscr{K}) \cup H = H,$$

also $\mathscr{K} \cap k(H) = k(H) \subset \mathscr{K}$ und schließlich

$$\mathscr{X}\mathscr{Y} \subset \mathscr{X} \cap \mathscr{Y} \subset k(H) \subset \mathscr{K}.$$

Hieraus folgt $\pi(\mathscr{X}\mathscr{Y}) = \pi(\mathscr{X})\pi(\mathscr{Y}) = 0$, da π irreduzibel ist, also $\pi(\mathscr{X}) = 0$ oder $\pi(\mathscr{Y}) = 0$, d.h. $\mathscr{X} \subset \mathscr{K}$ und $Z \subset U'$ oder $\mathscr{Y} \subset \mathscr{K}$ und $Z \subset V'$. Das widerspricht jedoch dem Lemma, da $U \cap Z \neq \emptyset$ und $V \cap Z \neq \emptyset$. Es folgt $\dot{Z} = \mathcal{O}(z)$, $z \in \hat{A}$ und folglich, da die Bahnen Synthesemengen sind, $\mathscr{K} = \mathscr{M}_z$.

4. Wir können nun leicht beweisen:

Satz 3. *$\mathscr{L}^1(N)$ ist eine symmetrische involutive Banachsche Algebra.*

Beweis. Sei $a \in \mathscr{L} = \mathscr{L}^1(N)$, $h = a^* a$ und $\xi \neq 0$ aus dem Spektrum von h. Wir müssen zeigen, daß ξ positiv ist. Es ist entweder $\mathscr{I}_0 = \{\xi x - xh;\ x \in \mathscr{L}\} \neq \mathscr{L}$ oder $\{\xi x - hx;\ x \in \mathscr{L}\} \neq \mathscr{L}$. Da die letzte Beziehung wegen $h^* = h$, $(\xi x)^* = \bar{\xi} x^*$ mit $\{\bar{\xi} x - xh;\ x \in \mathscr{L}\} \neq \mathscr{L}$ äquivalent ist und mit ξ auch $\bar{\xi}$ im Spektrum von h liegt, dürfen wir $\mathscr{I}_0 \neq \mathscr{L}$ annehmen. Nun ist $\mathscr{I}_0$ ein modulares Linksideal, es existiert also ein maximales und folglich abgeschlossenes modulares Ober-Linksideal $\mathscr{I}$ von $\mathscr{I}_0$. Nach Satz 2 ist der Kern der irreduziblen Darstellung von $\mathscr{L}$ in $\mathscr{L}/\mathscr{I}$ gleich einem $\mathscr{M}_z$ aus Prim $(\mathscr{L})$ und nach [3], Theorem 2, ist $\dot{\mathscr{L}} = \mathscr{L}/\mathscr{M}_z$ symmetrisch. Nun ist $\mathscr{I}_0 h = \{\xi(xh) - (xh)h;\ x \in \mathscr{L}\} \subset \mathscr{I}_0 \subset \mathscr{I}$, da $h \notin \mathscr{I}$ ist das Bild $\dot{\mathscr{I}}_0 = \{\xi\dot{x} - \dot{x}\dot{h}\}$ von $\mathscr{I}_0$ in $\dot{\mathscr{L}}$ also echt in $\dot{\mathscr{L}}$ und folglich liegt ξ im Spektrum des Bildes $\dot{h} = \dot{a}^* \dot{a}$ von h in $\dot{\mathscr{L}}$. Aus der Symmetrie von $\dot{\mathscr{L}}$ folgt dann $\xi > 0$. Folglich liegt das Spektrum von h im Intervall $[0, \infty[$ und somit ist $\mathscr{L}$ symmetrisch.

5. Bemerkungen. Die in [3] und in dieser Note enthaltenen Sätze und Methoden hängen offensichtlich nicht von der speziellen Struktur von $\boldsymbol{R}$ ab, wir erhalten also analoge Ergebnisse für nilpotente Liesche Gruppen über beliebigen kommutativen lokal kompakten Körpern k, jedenfalls für solche der Form $N(A)$ mit nilpotenter Algebra der Klasse 2 über k.

Es ist ferner klar, daß auch Kaplansky's Satz gilt:

Jedes primäre Ideal in $\mathscr{L}^1(N)$ ist primitiv, denn die Bahnen $\mathcal{O}(z)$ sind Synthesemengen. Vermutlich läßt sich auch ähnlich der Helson–Reiter–Ditkin-Satz beweisen.

Literatur

[1] J. Dixmier, *Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotentes VI*, Canad. J. Math. 12 (1960), S. 324–352.

[2] A. A. Kirillov, *Unitäre Darstellungen nilpotenter Liescher Gruppen* (Russisch) Uspehi Mat. Nauk 17 (1962), S. 57–110.

[3] H. Leptin, *On group algebras of nilpotent Lie groups*, Studia Mat. 47 (1973), S. 37–49.

[4] G. L. Litwinow, *Über stetige Darstellungen metabelscher Liescher Gruppen in lokal konvexen Räumen* (Russisch), Uspehi Mat. Nauk 26 (1971), S. 237–238.

Received October 15, 1972 (603)