Contents of volume XLVII, number 1

The journal STUDIA MATHEMATICA prints original papers in English, French, German and Russian, mainly on functional analysis, abstract methods of mathematical analysis and on the theory of probabilities. Usually 3 issues constitute a volume.

The submitted papers should be typed on one side only and accompanied by abstracts, normally not exceeding 200 words in length.

The authors are requested to send two copies one of them being the typed one not Xerox copy. Authors are advised to retain a copy of the paper submitted for publication.

Manuscripts and the correspondence concerning editorial work should be addressed to

STUDIA MATHEMATICA
ul. Śniadeckich 8,
00-950 Warszawa, Poland.

Correspondence concerning exchange should be addressed to:
Institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Exchange
ul. Śniadeckich 8, 00-950 Warszawa, Poland

The journal is available at your bookseller's or at

"ARS POLONA – RUCH"
Krakowskie Przedmieście 7,
00-068, Warszawa (Poland)

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

Calcul différentiel dans les espaces vectoriels topologiques

par

JEAN-PAUL PENOT (Pau, France)

Résumé. Cet article n'a pas pour but de proposer une nouvelle définition de la dérivabilité d'une application entre espaces vectoriels topologiques. Il est consacré à la notion d'application de classe C^k. Plusieurs définitions sont proposées répondant aux deux exigences suivantes: a) coïncider avec la définition usuelle dans les espaces normés, b) vérifier la règle de composition. Ces définitions sont simples, naturelles et valables pour tous les types d'espaces. Cependant l'une d'entre elles (la classe C^k_L) ne vaut que pour les espaces dans lesquels les suites convergentes caractérisent la topologie (les espaces métrisables par exemple) mais elle ne demande (à l'ordre 1) que la continuité et la dérivabilité de l'application et la continuité de sa dérivée sans aucune condition supplémentaire. Une application aux variétés fonctionnelles est donnée.

Ce travail a pour but de montrer quelques voies pour surmonter les difficultés soulevées par la généralisation aux espaces vectoriels topologiques (e.v.t.) de la notion d'application de classe C^n. On sait bien que la dérivabilité est une notion qu'on peut facilement définir dans ce cadre; cette facilité a même engendré une pléthore de définitions (voir V.I. Averbukh et O. G. Smolyanov [3]). Nous rappellons les principales définitions (table 1), et nous ne retenons que celles qui satisfont des conditions naturelles de cohérence et de fonctorialité (§ 1.A.). Nous proposons plusieurs variantes de la notion d'application de classe C^1 (§ 1.B.) puis de classe C^n, $n > 1$ (§ 2) satisfaisant les deux conditions:

1) Cohérence: la théorie coïncide avec la théorie usuelle dans les espaces normés;

2) Fonctorialité: la composée de deux applications de classe C^n est de classe C^n.

Les difficultés rencontrées (qui tiennent essentiellement au fait que l'application de composition $\gamma\colon L(X, Y)\times L(Y, Z)\to L(X, Z)$ n'est pas continue si X, Y, Z sont des e.v.t. non normables lorsqu'on munit les espaces $L(X, Y)$, $L(Y, Z)$ et $L(X, Z)$ d'une topologie naturelle d'e.v.t., cf. H. H. Keller [25]) ont en général été surmontées jusqu'ici dans un cadre plus large que celui des e.v.t.: espaces vectoriels pseudo-topologiques avec A. Frolicher — W. Bucher [18], G. Marinescu [33], espaces vectoriels bornologiques avec J. Sebastião e Silva [42], J. F. Colombeau [10], espaces vectoriels semi-topologiques avec J.-P. Penot [39]. Reconnaissant les avantages respectifs de ces méthodes, nous nous refusons à suivre ici de telles voies (hormis une esquisse, au paragraphe 3, d'une théorie analogue à celle de A. Frölicher — W. Bucher). C'est que nous destinons cette étude à des applications aux variétés (variétés fonctionnelles notamment) où la topologie s'impose; un exemple d'application est donné au paragraphe 4.

Signalons pour terminer les tentatives antérieures: 1) de A. Bastiani [5] [6], théorie reprise ensuite par J. Leslie [30], [31] qui a le mérite d'être simple mais ne satisfait pas la condition de cohérence, 2) de J. Kijowski et W. Szczyrba [26] particulière aux espaces de Fréchet—Schwartz, 3) de H. Omori [38] plus puissante, mais particulière aux chaînes d'espaces de Banach.

Notations. X, Y, Z désignent des e.v.t., le plus souvent des e.v.t.l.c.s. (espaces vectoriels topologiques localement convexes séparés), E, F, G des espaces normés.

Si T est un espace topologique, $\mathcal{O}(T)$ désigne la famille des ouverts de X. Si X est un e.v.t., $\mathscr{V}(X)$ désigne la famille des voisinages équilibrés de 0 dans X, $\mathscr{B}(X)$ la famille des bornés de X, $\mathscr{C}(X)$ la famille des parties semi-compactes de X. L'espace $L(X, Y)$ est toujours muni de la topologie de la convergence bornée.

§.1. CALCUL DIFFERENTIEL A L'ORDRE UN

La table 1 regroupe les principales définitions; les relations entre ces définitions sont résumées dans le diagramme ci-dessous. Cette table explicite la définition d'un sous-espace vectoriel $\mathscr{R}_Z(X, Y)$ de Y^X, X et Y étant des e.v.t., espace des Z-restes d'ordre un ($Z = A, B, C \ldots$).

On dit que $f\colon X \to Y$ est Z-dérivable en $a \in X$ s'il existe $u \in L(X, Y)$ tel que l'application r définie par $r(x) = f(a+x) - f(a) - u.x$ appartienne à $\mathscr{R}_Z(X, Y)$. Comme $L(X, Y) \cap \mathscr{R}_Z(X, Y) = \{0\}$ si Y est séparé, l'application u est unique et appelée dérivée de f en a.

La table 1 est loin d'être exhaustive; un recensement plus complet est donné dans Averbukh et Smolyanov [3]. De plus, la considération de la notion de dérivabilité stricte (Cartan [9]), utile notamment pour les théorèmes de fonctions implicites (McDermott [36]) doublerait le volume du tableau.

$$\begin{tikzcd}
 & & S \arrow[dd, Rightarrow] & & \\
K \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & H \arrow[d, Rightarrow] & & & \\
K' \arrow[r, Rightarrow] & M \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & B \arrow[r, Leftrightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & A \arrow[d, Rightarrow] & \\
 & M' \arrow[r, Rightarrow] & C \arrow[r, Leftrightarrow] & F \arrow[r, Rightarrow] & G
\end{tikzcd}$$

TABLE 1

Z	Appellation, origine	$\mathscr{R}_Z(X, Y)$
A	dérivabilité absolue (nouvelle définition)	Pour tout espace normé E, pour toute application $\varphi\colon E \to X$ dérivable en 0 avec $\varphi(0) = 0$ $\dfrac{r(\varphi(e))}{\lVert e\rVert} \to 0$ quand $e \to 0$.
B	dérivabilité par rapport aux bornés (Sebastião e Silva (1956), Sova (1964))	$\forall B \in \mathscr{B}(X), \forall V \in \mathscr{V}(Y) \exists \delta > 0\colon (x \in B, \lvert t\rvert < \delta) \Rightarrow \left(\dfrac{r(tx)}{t} \in V\right)$.
C	dérivabilité par rapport aux semicompacts	$\forall C \in \mathscr{C}(X), \forall V \in \mathscr{V}(Y) \exists \delta > 0\colon (x \in C, \lvert t\rvert < \delta) \Rightarrow \left(\dfrac{r(tx)}{t} \in V\right)$.
F	dérivabilité au sens d'Hadamard (Fréchet (1937), Balanzat (1960)) de Foglio (1960))	Pour toute application $\varphi\colon \boldsymbol{R} \to X$ telle que $\varphi(0) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \dfrac{\varphi(t)}{t}$ existe, on a $\lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \dfrac{r(\varphi(t))}{t} = 0$.
G	dérivabilité directionnelle (Gâteaux (1913))	$\forall x \in X, \forall V \in \mathscr{V}(Y) \exists \delta > 0\colon (\lvert t\rvert < \delta) \Rightarrow \left(\dfrac{r(tx)}{t} \in V\right)$.
H	Hyers (1941) — Lang (1962)	$\forall V \in \mathscr{V}(Y) \exists U \in \mathscr{V}(X)\colon \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0\colon (x \in U, \lvert t\rvert < \delta)$ $\Rightarrow \left(\dfrac{r(tx)}{t} \in \varepsilon V\right)$.
K	Keller (1964)	$\exists U \in \mathscr{V}(X) \forall V \in \mathscr{V}(Y) \exists \delta > 0$ $(x \in U, \lvert t\rvert < \delta) \Rightarrow \left(\dfrac{r(tx)}{t} \in V\right)$.
K'	Keller (1964)	$\exists U \in \mathscr{V}(X) \forall V \in \mathscr{V}(Y) \exists U' \in \mathscr{V}(X) (x \in U, tx \in U')$ $\Rightarrow \left(\dfrac{r(tx)}{t} \in V\right)$.
L	de Lamadrid (1955), Ver Eecke (1967)	L'application $x \to \dfrac{r(tx)}{t}$ de X dans Y^X tend vers 0 quand $t \to 0$ pour une topologie $\mathscr{T}$ sur Y^X.
M	Marinescu (1957), Sebastião e Silva (1957)	$\forall V \in \mathscr{V}(Y) \exists U \in \mathscr{V}(X) \forall \varepsilon > 0 \exists U' \in \mathscr{V}(X)$ $(x \in U, tx \in U') \Rightarrow$ $\Rightarrow \left(\dfrac{r(tx)}{t} \in \varepsilon V\right)$.
M'	Michal (1938), Bastiani (1962)	$\forall V \in \mathscr{V}(Y) \forall a \in X \exists U \in \mathscr{V}(X) \exists \delta > 0\colon (x \in a + U, \lvert t\rvert < \delta) \Rightarrow$ $\Rightarrow \left(\dfrac{r(tx)}{t} \in V\right)$.
S	Sebastião e Silva (1956).	$\forall B \in \mathscr{B}(X) \exists C \in \mathscr{B}(Y) \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0\colon (\lvert t\rvert < \delta, x \in B) \Rightarrow$ $\Rightarrow \left(\dfrac{r(tx)}{t} \in \varepsilon C\right)$.

Nous ne retenons que les définitions A, B, M, H, K, K' qui satisfont les conditions de cohérence et de fonctorialité. Nous écartons la S-dérivabilité, bien qu'elle satisfasse ces conditions et qu'elle permette d'obtenir les résultats les plus proches de ceux obtenus avec les espaces normés (cf. Silva [41], Colombeau [10]). Nous considérons en effet que c'est une notion plus bornologique que topologique; d'autre part elle ne correspond pas à la notion naturelle d'une application dérivable $f\colon X \to Y$ lorsque X est normé et Y n'est pas normable (un reste est une application r telle que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x\neq 0}} \frac{r(x)}{\|x\|} = 0$).

La notion la plus stricte est la K-dérivabilité. La notion la moins stricte, la A-dérivabilité, coïncide en fait avec la B-dérivabilité. Pour le voir il suffit de montrer que si $r \in \mathscr{R}_A(X, Y)$, r est un B-reste. Soient $V \in \mathscr{V}(Y)$, $B \in \mathscr{B}(X)$. Désignons par E le sous-espace de X engendré par B, muni de la norme $\| \ \|$ associée à l'enveloppe équilibrée convexe $\hat{B}$ de B, et par $i\colon E \to X$ l'injection canonique. Puisque $i \in L(E, X)$ nous pouvons trouver $\delta > 0$ tel que $\frac{r(i(e))}{\|e\|} \in V$ pour $\|e\| \leqslant \delta$, ce qui assure que $\frac{r(tb)}{t} \in V$ pour $|t| \leqslant \delta$, $b \in B$.

A. Applications de classe C^1.

Définitions 1.1. Soient X, Y des e.v.t.s., $O \in \mathscr{O}(X)$. Une application continue $f\colon O \to Y$ est dite de classe C^1_{ZB} (resp. C^1_{ZC}, resp. C^1_{ZE}) pour $Z = K, K', H, M, B, A$ si elle vérifie les conditions a) et b) (resp. a) et c), resp. a) et e)) ci-dessous:

a) f est Z-dérivable et $f'\colon O \to L(X, Y)$ est continue;

b) f' est localement bornée: $\forall a \in O\ \exists A \in \mathscr{O}(X)$, $a \in A \subset O$, tel que $f'(A) \in \mathscr{B}(L(X, Y))$;

c) l'application $df\colon O \times X \to Y$ définie par $df(x, x') = f'(x)\cdot x'$ est continue;

e) f' est localement équicontinue: $\forall a \in O\ \exists A \in \mathscr{O}(X)$, $a \in A \subset O$ tel que $\forall V \in \mathscr{V}(Y)\ \exists U \in \mathscr{V}(X)$ avec $f'(A)\cdot U \subset V$.

Toute application de classe C^1_{ZE} est de classe C^1_{ZC} et C^1_{ZB}. Si X est infratonnelé une application de classe C^1_{ZB} est de classe C^1_{ZE}. Si X est métrisable et tonnelé une application est de classe C^1_{ZC} dès que la condition a) est remplie.

Ces définitions satisfont la condition de cohérence. Montrons qu'elles satisfont la condition de fonctorialité. Soient $f\colon A \to Y$, $g\colon B \to Z$ des applications de classe C^1_{ZB} (resp. C^1_{ZE}) avec $A \in \mathscr{O}(X)$, $B \in \mathscr{O}(Y)$, $f(A) \subset B$. Soit $a \in A$ et soient A' et B' des voisinages de a et $b = f(a)$ dans A et B respectivement tels que $f(A') \subset B'$ et que $H = f'(A')$ et $K = g'(B')$ soient des parties bornées (resp. des parties équicontinues). La restriction à $H \times K$ de l'application de composition

$$\gamma\colon L(X, Y) \times L(Y, Z) \to L(X, Z)$$

étant continue l'application $h' = \gamma(g'\circ f, f')$ est continue sur A' donc $h = g\circ f$ vérifie a). De plus $\gamma(H \times K)$ est bornée (resp. équicontinue). Examinons maintenant le cas où f et g sont de classe C^1_{ZC}. La condition c) étant remplie puisque $dh(x, x') = dg(f(x), df(x, x'))$ montrons la continuité de h' en un point arbitraire de A. Soient $M \in \mathscr{B}(X)$, $W \in \mathscr{V}(Z)$, et $W' \in \mathscr{V}(Z)$ avec $W' + W' \subset W$. Nous pouvons trouver un voisinage A' de a dans A tel que $[g'(f(x)) - g'(b)]f'(a)\cdot M \subset W'$ pour tout $x \in A'$ puisque g' est continue; la continuité de dg et f' en $(b, 0)$ et a respectivement nous permet aussi de supposer que $dg(f(x), f'(x)m - f'(a)m) \in W'$ pour tout $(x, m) \in A' \times M$. Nous en déduisons que

$$h'(x)\cdot m - h'(a)\cdot m = dg(f(x), f'(x)m - f'(a)m) + [g'(f(x)) - g'(b)]\cdot f'(a)m \in W$$

pour tout $(x, m) \in A' \times M$, ce qu'il fallait établir pour prouver la continuité de h'.

Remarque. La continuité de f découle des conditions a) et e) ou de la condition c) si Y est localement convexe, comme il ressort du théorème des accroissements finis (Averbukh et Smolyanov [2] théorème 1.10).

Le choix de la topologie de la convergence bornée sur $L(X, Y)$ privilégie la B-dérivabilité. Ainsi le théorème des accroissements finis a pour conséquences les résultats suivants qui ne sont vrais pour les autres notions de dérivabilité que si l'on munit $L(X, Y)$ d'un autre type de convergence (pseudo-topologie de Marinescu [33] pour la M-dérivabilité, topologie semi-vectorielle de J.-P. Penot [39] pour la K' et la M-dérivabilité), ou d'hypothèses restrictives sur X (X de Fréchet–Schwartz pour la M-dérivabilité, Kijowski et Szczyrba [26]). Y est un e.v.t.l.c.s.

Proposition 1.2. *Si $f\colon O \to Y$, $O \in \mathscr{O}(X)$ est G-dérivable sur U et si f' est continue de O dans $L(X, Y)$, f est B-dérivable sur O.*

Proposition 1.3. *Si $f_n\colon O \to Y$ est une suite d'applications B-dérivables telles que*

a) *f_n converge simplement vers $f\colon O \to Y$,*

b) *f'_n converge localement uniformément vers $g\colon O \to L(X, Y)$.*

Alors f est B-dérivable sur O et $f' = g$.

Si Y est semi-complet et si O est connexe l'hypothèse a) peut être affaiblie en a'): il existe $x_0 \in O$ tel que $f_n(x_0)$ converge; on en déduit que la suite $f_n(x)$ converge pour tout $x \in O$ et que sa limite $f(x)$ définit une fonction f satisfaisant la conclusion de l'énoncé. En ajoutant la condition que la suite $\{f'_n(x)\}$ est localement bornée (resp. localement équicontinue) dans son ensemble on déduit des hypothèses a) et b) que f est de classe C^1_{BB} (resp. C^1_{BE}). Si les f_n sont de classe C^1_{BC} et si df_n converge localement uniformément (nécessairement vers $\bar{g}\colon O\times X \to Y$ définie par $\bar{g}(x, x') = g(x)\cdot x'$, d'après b)) alors f est de classe C^1_{BC}.

La réciproque de la proposition suivante, forme commode du théorème de la moyenne, n'a lieu que pour la B-dérivabilité (et les notions plus faibles). Y est encore supposé localement convexe.

PROPOSITION 1.4. *Soit $f\colon O \to Y$, $O\in\mathcal{O}(X)$ une application de classe C^1_{ZB} (resp. C^1_{ZE} resp. C^1_{ZC}) avec $Z = K, K', H, M, B, \Delta$, et soit $\hat{Y}$ le complété de Y. Il existe une application continue $R\colon V \to L(X, \hat{Y})$ définie sur un voisinage V de la diagonale Δ de $O\times O$, localement bornée sur Δ (resp. localement équicontinue sur Δ, resp. telle que $\tilde{R}\colon V\times X \to \hat{Y}$ définie par $\tilde{R}(x, x', x'') = R(x, x')\cdot x''$ soit continue) telle que*

$$f(x)-f(x') = R(x, x')\cdot(x-x') \quad \textit{pour tout } (x, x')\in V.$$

De plus $R(x, x) = f'(x)\in L(X, Y)$ pour tout $x\in O$.

Si l'enveloppe convexe fermée de tout ensemble semi-compact de Y est semi-complète, ce qui est le cas si Y est quasi-complet, l'application R prend ses valeurs dans $L(X, Y)$.

On peut déduire facilement de cet énoncé (ou du théorème des accroissements finis) une condition nécessaire et suffisante pour qu'une application définie sur un ouvert d'un produit de deux e.v.t. soit de classe C^1_{ZB}, C^1_{ZC} ou C^1_{ZE}.

§.2. CALCUL DIFFERENTIEL D'ORDRE SUPERIEUR

A. Dérivabilité d'ordre supérieur.

Dans ce paragraphe $X_1, \ldots, X_n, Y$ sont des e.v.t.l.c. et nous désignons par

$L(X_1, \ldots, X_n; Y)$ l'espace des applications n-linéaires continues de $X_1\times \ldots \times X_n$ dans Y,

$LS(X_1, \ldots, X_n; Y)$ l'espace des applications n-linéaires séparément continues de $X_1\times \ldots \times X_n$ dans Y,

$LH(X_1, \ldots, X_n; Y)$ l'espace des applications n-linéaires "hypocontinues" de $X_1\times \ldots \times X_n$ dans Y, c'est-à-dire des $u\in LS(X_1, \ldots, X_n; Y)$ telles que

$$\forall V\in\mathscr{V}(Y), \forall k = 1, \ldots, n, \forall B_i\in\mathscr{B}(X_i)\, i\neq k\ \exists U_k\in\mathscr{V}(X_k)$$

tel que $u(B_1\times \ldots \times B_{k-1}\times U_k\times B_{k+1}\times \ldots \times B_n) \subset V$,

$\tilde{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ le sous-espace de $LS(X_1, \ldots, X_n; Y)$ des applications u telles que pour $\forall k = 1, \ldots, n$, $\forall (x_1, \ldots, x_{k-1})\in X_1\times \ldots \times X_{k-1}$, $\forall B_i\in\mathscr{B}(X_i)$ $i = k+1, \ldots, n$, $\forall V\in\mathscr{V}(Y)\ \exists U_k\in\mathscr{V}(X_k)$ avec

$$u(\{x_1\}\times \ldots \times\{x_{k-1}\}\times U_k\times B_{k+1}\times \ldots \times B_n) \subset V.$$

$\tilde{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ est l'image de $L\big(X_1, L\big(X_2, \ldots, L(X_n, Y)\ldots\big)\big)$ par l'application $u\mapsto\tilde{u}$ définie par $\tilde{u}(x_1, \ldots, x_n) = u\cdot x_1\ldots x_n$.

L'espace $LH(X_1, \ldots, X_n; Y)$ est un sous-espace de $\tilde{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ qui contient tous les éléments symétriques de $\tilde{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$ si $X_1 = \ldots = X_n = X$; les notations précédentes sont abrégées en $L^n(X; Y), \ldots, \tilde{L}^n(X; Y)$ dans ce cas.

DÉFINITION 2.1. Une application $f\colon O \to Y$, $O\in\mathcal{O}(X)$ est dite *n fois* ($n > 1$) *Z-dérivable en* $a\in O$ si elle est Z-dérivable sur un voisinage de a dans O et si f' est $(n-1)$ fois Z-dérivable en a. Nous considérerons $f^{(n)}(a)$ comme élément de $\tilde{L}^n(X; Y)$.

EXEMPLE 2.2. Si $u\in LH(X_1, \ldots, X_n; Y)$, u est *indéfiniment B-dérivable en tout point* $a = (a_1, \ldots, a_n)\in X_1\times \ldots \times X_n$ et $u^{(k)}(a) = 0$ pour $k > n$, $u^{(n)}(a) = n!\,S(u)$, $S(u)$ étant l'application symétrisée déduite de u.

EXEMPLE 2.3. Si $u\in L(X_1, \ldots, X_n; Y)$, u est *indéfiniment H-dérivable en tout point de* $X_1\times \ldots \times X_n$ et toutes ses dérivées successives sont continues.

LEMME 2.4. *Si $f\colon O \to Y$, $O\in\mathcal{O}(X)$ est $(n+1)$ fois Z-dérivable en $a\in O$, $n\geqslant 1$, et si pour $v_1, \ldots, v_n$ fixés dans X on pose $f^{(n)}(x)(v_1, \ldots, v_n) = g(x)$ on a pour tout $v_0\in X$*

$$g'(a)\cdot v_0 = f^{(n+1)}(a)(v_0, v_1, \ldots, v_n).$$

Preuve. L'application $\lambda\colon u \to u(v_1, \ldots, v_n)$ est une application linéaire continue de $\tilde{L}^n(X; Y)$ dans Y; $\tilde{L}^n(X; Y)$ est muni de la topologie transportée par l'application $u \to \tilde{u}$. Le résultat découle donc de la propriété de composition à l'ordre 1.

PROPOSITION 2.5. *Si $f\colon O \to Y$ est n fois Z-dérivable en $a\in O$ ($n\geqslant 2$) $f^{(n)}(a)\in LH^n(X; Y)$ et est symétrique.*

Il suffit de prouver la symétrie de $f^{(n)}(a)$. Pour cela on se ramène, comme dans le cadre des espaces normés, au cas $n = 2$, grâce au lemme. On utilise alors le fait que pour tous x_1, x_2 de X l'application $g\colon (t_1, t_2) \to f(a+t_1x_1+t_2x_2)$ définie au voisinage de 0 dans $\boldsymbol{R}^2$ est deux fois dérivable en 0 et que

$$f^{(2)}(a)(x_1, x_2) = D_1D_2g(0) = D_2D_1g(0) = f^{(2)}(a)(x_2, x_1).$$

THÉORÈME 2.6. *Soient $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ des applications n fois B-dérivables en $a\in X$ et $b = f(a)$ respectivement. Alors $g\circ f$ est n-fois B-dérivable en a.*

LEMME 2.7. *Si $u\in\tilde{L}(X_1, \ldots, X_n; Y)$, u est B-dérivable en tout point et* $u'(a)\cdot x = \sum_{i=1}^{n} u(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$.

LEMME 2.8. *Si $n_1, \ldots, n_p$ sont des entiers positifs, si $n = n_1 + \ldots n_p$, l'application*

$$\omega\colon LH^p(Y;Z) \times LH^{n_1}(X;Y) \times \ldots \times LH^{n_p}(X;Y) \to LH^n(X;Z)$$

caractérisée par $\omega(v, u_1, \ldots, u_p) = v\circ(u_1 \times \ldots \times u_p)$ est bien définie et appartient à

$$\tilde{L}\big(LH^p(Y;Z), LH^{n_1}(X;Y), \ldots, LH^{n_p}(X;Y); LH^n(X;Z)\big).$$

La vérification des lemmes 2.7. et 2.8. n'offre pas de difficulté. Le théorème 2.6. s'en déduit à l'aide d'une récurrence sur n, de la proposition 2.5. et de la formule

$$(g\circ f)^{(n)}(a)\cdot x^{(n)} = \sum_{\nu} \frac{n!}{n_1! \ldots n_p!}\, g^{(p)}\big(f(a)\big)\big(f^{(n_1)}(a)\cdot x^{(n_1)}, \ldots, f^{(n_p)}(a)\cdot x^{(n_p)}\big)$$

la sommation étant effectuée sur les p-uplets $\nu = (n_1, \ldots, n_p)$, avec $n = n_1 + \ldots + n_p$, p variant de 1 à n; cette formule caractérise $(g\circ f)^{(n)}(a)$ puisque cette application n-linéaire est symétrique.

B. Applications de classe C^n.

DÉFINITIONS 2.9. Une application continue $f\colon O \to Y$, $O \in \mathcal{O}(X)$ est dite de *classe* C^n_{ZB} (resp. C^n_{ZE}) avec $Z = B, M, H$ si

(1) f est n fois Z-dérivable;

(2) pour $k = 1, \ldots, n$, $f^{(k)}$ est une application continue de O dans $L^k(X;Y)$;

(3) pour $k = 1, \ldots, n$, $f^{(k)}$ est localement bornée (resp. localement équicontinue).

Pour la notion d'application de classe C^n_{BB} il n'est pas nécessaire de supposer que $f^{(k)}(x) \in L^k(X;Y) \subset LH^k(X;Y)$, pour tout $x \in O$. Il n'en va pas de même pour les autres notions et nous préférons donner une présentation unifiée. Ces définitions satisfont évidemment la condition de cohérence. Montrons qu'elles satisfont la condition de fonctorialité. La vérification des propriétés (2) et (3) est immédiate. Pour $Z = B$ la propriété (1) est aussi transitive (théorème 2.6.). Montrons que pour $Z = M$ ou H la composée de deux applications de classe C^n_{ZB} (resp. C^n_{ZE}) est Z-dérivable. Procédons par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant déjà réglé. D'après la formule de dérivation d'une application composée, nous sommes ramenés à montrer que si X, Y, Z sont des e.v.t.l.c., si $O \in \mathcal{O}(X)$, $a \in O$, et si $f_i\colon O \to L^{n_i}(X;Y)$ pour $i = 1, \ldots, p$, $g\colon O \to L^p(Y;Z)$ sont des applications de classe C^1_{ZB} (resp. C^1_{ZC}) avec $Z = M, H$, et si $g'(a) \in L(X, Y, \ldots, Y; Z)$, l'application $h\colon O \to L^n(X;Z)$ (avec $n = n_1 + \ldots + n_p$), définie par:

$$h(z) = g(x)\circ\big(f_1(x) \times \ldots \times f_p(x)\big)$$

est Z-dérivable en a. Posons

$$r_i(x) = f_i(a+x) - f_i(a) - f_i'(a)\cdot x \quad \text{pour } i = 1, \ldots, p,$$
$$s(x) = g(a+x) - g(a) - g'(a)\cdot x,$$
$$q(x) = h(a+x) - h(a) - g'(a)\cdot x\circ f_1(a) \times \ldots \times f_p(a) -$$
$$- \sum_{i=1}^{p} g(a)\circ f_1(a) \times \ldots \times f_{i-1}(a) \times f_i'(a)\cdot x \times f_{i+1}(a) \times \ldots \times f_p(a).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} q(x) = {} & s(x)\circ f_1(a+x) \times \ldots \times f_p(a+x) + \\ & + g'(a)\cdot x\circ f_1(a+x) \times \ldots \times f_p(a+x) - g'(a)\cdot x\circ f_1(a) \times \ldots \times f_p(a) + \\ & + [g(a)\circ f_1(a+x) \times \ldots \times f_p(a+x) - g(a)\circ f_1(a) \times \ldots \times f_p(a) - \\ & - \sum_{i=1}^{p} g(a)\circ f_1(a) \times \ldots \times f_{i-1}(a) \times f_i'(a)\cdot x \times f_{i+1}(a) \times \ldots \times f_p(a)] \end{aligned}$$

et le crochet s'écrit encore

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{p} g(a)\circ f_1(a) \times \ldots \times f_{k-1}(a) \times r_k(x) \times f_k(a+x) \times \ldots \times f_p(a+x) + \\ & + \sum_{k=1}^{p-1} g(a)\circ f_1(a) \times \ldots \times f_{k-1}(a) \times f_k'(a)\cdot x \times f_{k+1}(a+x) \times \ldots \times f_p(a+x) - \\ & - \sum_{k=1}^{p-1} g(a)\circ f_1(a) \times \ldots \times f_{k-1}(a) \times f_k'(a)\cdot x \times f_{k+1}(a) \times \ldots \times f_p(a). \end{aligned}$$

Soient $W \in \mathscr{V}(Z)$ et soit $M \in \mathscr{B}(X)$; nous devons trouver $U \in \mathscr{V}(X)$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ avec $q(tx)\cdot M \times \ldots \times M \subset \varepsilon t W$ pour $|t| < \delta$, $x \in U$ (la vérification serait analogue pour la M-dérivabilité).

Nous pouvons supposer, en réduisant O au besoin, que les ensembles $f_i(O)$ sont bornés pour $i = 1, \ldots, p$. Posons $N_i = f_i(O)M^{n_i}$ pour $i = 1, \ldots, p$.

Soit $W' \in \mathscr{V}(Z)$ tel que la somme de $2p+1$ termes de W' soit dans W. Choisissons $U \in \mathscr{V}(X)$ et $V \in \mathscr{V}(Y)$ tels que pour tous $x \in U$, $y_i \in V$, $r_k \in V$, $v_k \in V$, $b_i \in N_i$ et $|t| < 1$ on ait

$$g'(a)\cdot x(b_1 + ty_1, \ldots, b_p + ty_p) - g'(a)\cdot x(b_1, \ldots, b_p) \in tW',$$
$$g\,(a)(b_1, \ldots, b_{k-1}, r_k, b_{k+1} + ty_{k+1}, \ldots, b_p + ty_p) \in W' \quad \text{pour} \quad k = 1, \ldots, p$$

et

$$g\,(a)(b_1, \ldots, b_{k-1}, v_k, b_{k+1} + ty_{k+1}, \ldots, b_p + ty_p) -$$
$$- g(a)(b_1, \ldots, b_{k-1}, v_k, b_{k+1}, \ldots, b_p) \in tW' \qquad \text{pour } k = 1, \ldots, p-1.$$

Supposons U assez petit pour que $a + U \subset O$, $f_k'(a)\cdot U \subset V$ pour $k = 1, \ldots, p$, et que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ avec $s(tx)N_1 \times \ldots \times N_p \subset \varepsilon t W'$, $r_i(tx)M^{n_i} \subset \varepsilon t V$ pour $x \in U$, $|t| \leqslant \delta$. La dérivabilité de f_i, $i =$

$1, \ldots, p$ nous permet de supposer que si U est assez petit nous avons

$$[f_i(a+tx)-f_i(a)]\cdot M^{n_i} \subset tV \text{ pour } x \in U, \quad |t| \leqslant \alpha.$$

Il résulte de ces conditions que pour $|t| \leqslant \min(1, \alpha, \varepsilon, \delta)$ nous avons bien $q(tx) \in \varepsilon tW$ pour tout $x \in U$.

DÉFINITION 2.10. Une application $f\colon O \to Y$, $O \in \mathcal{O}(X)$ est dite de *classe* C^n_{ZC} avec $Z = B, M, H$ si

(1) f est n-fois dérivable;

(2) pour $k = 1, \ldots, n$, $f^{(k)}$ est une application continue de O dans $L^k(X; Y)$;

(3) L'application $T^n f$ définie par récurrence par

$$Tf(x, x') = \big(f(x), f'(x)\cdot x'\big), \; T^{k+1}f = T(T^k f) \quad \text{est continue.}$$

Cette définition est encore cohérente. Pour montrer qu'elle satisfait la condition de fonctorialité, nous procédons comme dans la preuve précédente dont nous gardons les notations. Nous supposons cette fois que les applications g, f_i $i = 1, \ldots, p$ sont continues et M-dérivables et que l'application $\bar{g}\colon O \times Y^p \to Z$ définie par $\bar{g}(x, y_1, \ldots, y_p) = g(x)(y_1, \ldots, y_p)$ est continue. La vérification pour la H-dérivabilité serait analogue et nous savons que la B-dérivabilité est transitive. Etant donnés $W \in \mathscr{V}(Z)$, $M \in \mathscr{B}(X)$, W convexe, nous devons trouver $U \in \mathscr{V}(X)$ et une application $\varepsilon \mapsto U_\varepsilon$ de $]0, 1[$ dans $\mathscr{V}(X)$ tels que $q(tx) \in \varepsilon t W$ pour $x \in U$, $tx \in U_\varepsilon$. Posons $W' = \dfrac{1}{3p} W$, $L_i = f_i(a) M^{n_i}$ pour $i = 1, \ldots, p$. La continuité de $\bar{g}$ nous permet de trouver $U \in \mathscr{V}(X)$ et $V \in \mathscr{V}(Y)$ tels que pour $tx \in U$, $b_i \in L_i$, $y_i \in V$, $v_k \in V$, $r_k \in V$ nous ayons

$$g(a+tx)(b_1, \ldots, b_{k-1}, v_k, b_{k+1}+ty_{k+1}, \ldots, b_p+ty_p) \in W \quad \text{pour } k = 1, \ldots, p$$

et

$$g(a+tx)(b_1, \ldots, b_{k-1}, v_k, b_{k+1}+ty_{k+1}, \ldots, b_p+ty_p) -$$
$$-g(a+tx)(b_1, \ldots, b_{k-1}, v_k, b_{k+1}, \ldots, b_p) \in tW \quad \text{pour } k = 1, \ldots, p-1;$$

Le théorème des accroissements finis appliqué à g nous assure que

$$[g(a+tx)-g(a)](b_1, \ldots, b_{k-1}, v_k, b_{k+1}, \ldots, b_p) \in$$
$$\in \Gamma\big(g'(a+tU)\cdot tU \cdot L_1 \times \ldots \times L_{k-1} \times V \times L_{k+1} \times \ldots \times L_p\big) \subset tW'$$

si U et V sont assez petits, grâce à la continuité de $\bar{g}$, pour $k = 1, \ldots, p$, $b_i \in L_i$, $v_k \in V$, $x \subset U$, ΓA désignant l'enveloppe convexe fermée d'un sous-ensemble A de Z. La dérivabilité de f_i nous assure que

$$[f_i(a+tx)-f_i(a)] M^{n_i} \in tV \quad \text{pour } x \in U, \; tx \in U,$$

et $r_i(tx) M^{n_i} \in \varepsilon t V$ pour $x \in U$, $tx \in U_\varepsilon$. Nous supposons aussi que U_ε est assez petit pour que $s(tx) L_1 \times \ldots \times L_p \subset \varepsilon t W'$ pour $x \in U$, $tx \in U_\varepsilon$ et que

$f_i'(a)\cdot U_\varepsilon(M^{n_i}) \subset \varepsilon V$. Le résultat découle alors de l'expression suivante de $q(x)$:

$$q(x) = \sum_{k=1}^{p} g(a+x)\circ f_1(a) \times \ldots \times f_{k-1}(a) \times r_k(x) \times f_{k+1}(a+x) \times \ldots \times f_p(a+x) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{p-1} g(a+x)\circ f_1(a) \times \ldots \times f_{k-1}(a) \times f_k'(a)x \times f_{k+1}(a+x) \times \ldots \times f_p(a+x) -$$
$$- \sum_{k=1}^{p-1} g(a+x)\circ f_1(a) \times \ldots \times f_{k-1}(a) \times f_k'(a)x \times f_{k+1}(a) \times \ldots \times f_p(a) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{p} [g(a+x)-g(a)]\circ f_1(a) \times \ldots \times f_{k-1}(a) \times f_k'(a)x \times f_{k+1}(a) \times \ldots \times f_p(a) +$$
$$+ s(x)\circ f_1(a) \times \ldots \times f_p(a).$$

Concluons.

THÉORÈME 2.11. *Pour $Z = B, M, H$ la définition d'une application de classe* C^n_{ZB} (resp. C^n_{ZC}, *resp.* C^n_{ZE}) *satisfait les conditions de cohérence et de fonctorialité.*

Une hypothèse de dérivabilité d'ordre supérieur améliore la nature de la dérivabilité à l'ordre 1, comme la proposition suivante l'indique à titre d'exemple.

PROPOSITION 2.12. *Soit $f\colon O \to Y$, $O \in \mathcal{O}(X)$, X et Y étant des e.v.t.l.c.s. une application 2 fois G-dérivable telle que $T^2 f$ soit continue (ou seulement $\bar{f}''$: $O \times X \times X \to Y$ donnée par $\bar{f}''(x, x_1, x_2) = f''(x)\cdot x_1 \cdot x_2$). Alors f est de classe C^1_{HC}.*

Preuve. f' est continue car pour $a \in O$ $V \in \mathscr{V}(Y)$ et $B \in \mathscr{B}(X)$ donnés nous pouvons trouver $U \in \mathscr{V}(X)$ et $\alpha \in]0, 1[$ tels que $f''(a+x)x_1x_2 \in V$ pour x, x_1, x_2 dans U et que $\alpha B \subset U$. Si nous prenons $x \in \alpha U$ et $b \in B$ nous avons $f'(a+x)\cdot b f'(a)\cdot b \in \Gamma\big(f''(a+U)\cdot \alpha U \cdot B\big) = \Gamma\big(f''(a+U)\cdot U \cdot \alpha B\big) \subset V$, ΓA désignant l'enveloppe convexe fermée de A.

De plus,

$$r(tx) \in t\Gamma\big(f'(a+stx)\cdot x - f'(a)\cdot x \mid s \in [0, 1]\big) \subset t\Gamma\big(f''(a+U)\cdot tU \cdot U\big) \subset t^2 V;$$

pour $0 < t < \min(1, \varepsilon)$ nous avons donc $r(tx) \in t\varepsilon V$ pour tout $x \in U$, ce qui établit la H-dérivabilité de f.

Terminons ce paragraphe par une allusion à la formule de Taylor. Nous disons qu'une application $r\colon X \to Y$ est un B-reste d'ordre n, et nous écrivons $r \in \mathscr{R}^n_B(X, Y)$ si pour tout $v \in \mathscr{V}(Y)$, $B \in \mathscr{B}(X)$ il existe $\delta > 0$ tel que $r(tB) \subset t^n V$ pour $t \leqslant \delta$. La partie directe de la proposition suivante est établie dans Averbukh et Smolyanov [2]; la partie réciproque s'établit comme dans le cas classique (voir R. Abraham et J. Robbin [1]), remarque dûe à D. Meeùs [34].

PROPOSITION 2.13. *Soit $f\colon O \to Y$, $O \in \mathcal{O}(X)$ une application de classe C^n_{BC}, X et Y étant des e.v.t.l.c.s. L'application r définie sur l'ouvert A des $(x, h) \in O \times X$ tels que $x+h \in O$ par*

$$(*) \qquad f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) h^{(k)} + r(x, h)$$

est continue et est un B-reste d'ordre n en sa seconde variable. Réciproquement, si Y est quasi-complet, et s'il existe des applications continues $f^{(k)}\colon O \to L^k(X; Y)$, $k = 1, \dots, n$, $r\colon A \to Y$ vérifiant $(*)$ et telles que $\bar{f}^{(k)}\colon O \times X^k \to Y$ définies par $\bar{f}^{(k)}(x, x_1, \dots, x_k) = f^{(k)}(x)(x_1, \dots, x_k)$ soient continues et que r soit un B-reste d'ordre n en sa seconde variable, alors f est de classe C^n_{BC}.

EXEMPLE 2.14. Soient X et Y les limites projectives de chaînes d'espaces normés et soit $f\colon O \to Y$, $O \in \mathcal{O}(X)$ une application de classe C^k au sens d'Omori [38]. Alors f est de classe C^k_{HC}.

§3. DERIVABILITE DANS LES ESPACES MUNIS D'UNE NOTION DE CONVERGENCE

A. Espaces vectoriels munis d'une convergence. On sait bien qu'il est souvent plus commode d'utiliser une notion de convergence qu'une topologie sur un espace vectoriel (par exemple en théorie des distributions, en théorie de la mesure). L'inconvénient d'un tel point de vue réside dans le fait que la topologie n'est pas caractérisée par la donnée des suites convergentes. On est donc amené à se restreindre à des classes particulières d'espaces vectoriels topologiques. Une théorie de la différentiabilité dans de tels espaces est donc de moins grande portée qu'une théorie placée dans le cadre des espaces vectoriels pseudo-topologiques. En contrepartie, le gain de simplicité est appréciable (il tient essentiellement au fait qu'une suite convergente est bornée, ce qui n'est pas le cas d'un filtre convergent). Il est inutile de faire des constructions d'espaces auxiliaires comme dans la théorie de Frölicher–Bucher [18] (espaces "equables"); de plus la notion d'application de classe C^n coïncide avec la notion usuelle dans les espaces normés, ce qui n'est pas le cas dans leur théorie.

Posons $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{N} \cup \{\infty\}$. Appelons suite pointée d'un ensemble X une application $\lambda\colon \boldsymbol{P} \to X$. Une application $\lambda'\colon \boldsymbol{P} \to X$ est une sous-suite pointée d'une suite pointée λ si $\lambda' = \lambda \circ \varphi$ où φ est une application strictement croissante de $\boldsymbol{P}$ dans $\boldsymbol{P}$ telle que $\varphi(\infty) = \infty$.

DÉFINITION 3.1. Un L-espace est un couple $\big(X, L(X)\big)$ (noté X par abus de notation) formé d'un ensemble X et d'un sous-ensemble $L(X)$ de $X^{\boldsymbol{P}}$ tel que:

1) si $\lambda \in L(X)$ et si λ' est une sous-suite pointée de λ, $\lambda' \in L(X)$,

2) si $\lambda(\boldsymbol{P})$ est réduit à un point, $\lambda \in L(X)$,

3) si λ et λ' sont deux éléments de $L(X)$ dont les restrictions à $\boldsymbol{N}$ coïncident, $\lambda = \lambda'$.

Un L^*-espace est un L-espace qui satisfait de plus

4) si $\lambda \in X^{\boldsymbol{P}}$ et si pour toute sous-suite pointée λ' de λ il existe une sous-suite pointée λ'' de λ' appartenant à $L(X)$, alors $\lambda \in L(X)$.

Nous écrivons $x_n \to x$ pour indiquer qu'une suite (x_n) converge vers x c'est-à-dire qu'il existe $\lambda \in L(X)$ (unique d'après 3)) avec $x_n = \lambda(n)$, $x = \lambda(\infty)$. Un L-morphisme $f\colon \big(X, L(X)\big) \to \big(X', L(X')\big)$ est une application $f\colon X \to X'$ telle que $f \circ \lambda \in L(X')$ pour tout $\lambda \in L(X)$; nous dirons aussi application L-continue ou séquentiellement continue.

Nous ne considèrerons que la catégorie $\mathscr{L}^*$ des L^*-espaces. On sait en effet (Kisyński [27]) que $\mathscr{L}^*$ est l'image de la catégorie $\mathscr{T}$ des espaces topologiques dans lesquels les suites ont au plus une limite par le foncteur d'oubli σ de $\mathscr{T}$ dans la catégorie $\mathscr{L}$ des L-espaces. Si notre intérêt provenait de la catégorie $\mathscr{P}$ des espaces vectoriels pseudotopologiques ou de la sous-catégorie $\mathscr{B}$ des espaces vectoriels bornologiques nous nous placerions dans l'image de ces catégories par le foncteur d'oubli de $\mathscr{P}$ (resp. $\mathscr{B}$) dans $\mathscr{L}$ (image que l'on pourrait chercher à caractériser).

Le foncteur σ de $\mathscr{T}$ dans $\mathscr{L}$ admet un adjoint $\tau\colon \mathscr{L} \to \mathscr{T}$. Si $\big(X, L(X)\big)$ est un L-espace, la topologie de $\tau\big(X, L(X)\big)$ est constituée des sous-ensembles séquentiellement ouverts. Nous obtenons bien un objet de $\mathscr{T}$ car une suite (x_n) de X qui converge vers x et y pour $\tau\big(X, L(X)\big)$ admet ([27]) une sous-suite qui converge vers x et y pour $L(X)$, donc $x = y$.

Un espace topologique X sera dit séquentiel ou *O-séquentiel* (par crainte de confusion avec la terminologie de Averbukh et Smolyanov [3]) si $X = \tau\big(\sigma(X)\big)$, ce qui revient à dire que tout sous-ensemble séquentiellement fermé de X est fermé. Un espace topologique X sera dit *N-séquentiel* si pour tout point x de X et pour tout voisinage séquentiel V de x (ce qui signifie que si $x_n \to x$ on a $x_n \in V$ pour n assez grand) V est voisinage de x. Tout espace N-séquentiel est O-séquentiel: dans un espace N-séquentiel la fermeture séquentielle de tout sous-ensemble coïncide avec son adhérence (A. Wilanski [49]).

DÉFINITION 3.2. Un e.v.l est un espace vectoriel réel muni d'une structure de L^*-espace pour laquelle l'addition et la multiplication par les scalaires sont L-continues

Une suite (b_n) dans un e.v.l. X est dite bornée si pour toute suite (t_n) de nombres réels tendant vers 0 on a $t_n b_n \to 0$. Si X et Y sont des e.v.l. nous désignons par $L^*(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires L-continues de X dans Y. Nous munissons $L^*(X, Y)$ de la structure d'e.v.l. ainsi définie: $u_n \to u$ si et seulement si pour toute suite bornée (b_n) de X on a $u_n(b_n) - u(b_n) \to 0$. Ce n'est pas la seule structure intéressante d'e.v.l. sur $L^*(X, Y)$, mais nous ne considèrerons que celle-là. Nous faisons de l'espace $L^*(X_1, \ldots, X_p; Y)$ des applications p-linéaires L-continues du produit $X_1 \times \ldots \times X_p$ d'e.v.l. dans un e.v.l. Y en procédant de manière analogue. L'espace $L^*(X_1, \ldots, L^*(X_p, Y) \ldots)$ s'identifie à un sous-espace $\tilde{L}^*(X_1, \ldots, X_p; Y)$ de $L^*(X_1, \ldots, X_p; Y)$: une condition nécessaire et suffisante pour que $u \in L^*(X_1, \ldots, X_p; Y)$ soit élément de $\tilde{L}^*(X_1, \ldots, X_p; Y)$ est que pour tout $k = 1, \ldots, p$, pour tout $x_i \in X_i$ $(i = 1, \ldots, k-1)$, pour toute suite bornée $(b_j^{(n)})$ de X_j $(j = k+1, \ldots, p)$, pour toute suite $x_k^{(n)}$ de X_k qui converge vers 0 on ait:

$$u(x_1, \ldots, x_{k-1}, x_k^{(n)}, b_{k+1}^{(n)}, \ldots, b_p^{(n)}) \to 0.$$

EXEMPLE 3.3. La multiplication scalaire μ: $\boldsymbol{R} \times X \to X$ d'un e.v.l. X appartient à $\tilde{L}^*(\boldsymbol{R}, X; X)$ d'après la définition des suites bornées; sa transposée μ' définie par $\mu'(x, t) = tx$ appartient à $\tilde{L}^*(X, \boldsymbol{R}; X)$ d'après la compacité locale de $\boldsymbol{R}$.

Soit X un e.v.t.l.c.s. Notons σZ l'e.v.l. sous-jacent à un e.v.t.l.c.s. Z. Nous avons l'égalité $L^*(\sigma X, \sigma Y) = L(X, Y)$ pour tout e.v.t.l.c.s. Y si et seulement si X est *C-séquentiel*, ce qui signifie que tout voisinage séquentiel convexe de 0 dans X est voisinage de 0. La condition est évidemment suffisante. Pour voir qu'elle est nécessaire nous introduisons le foncteur τ_c qui à tout e.v.l. X associe l'e.v.t.l.c. $\tau_c(X)$ de même espace sous-jacent, ayant pour base de voisinages de 0 les voisinages séquentiels équilibrés convexes de 0, et nous considérons

$$\mathrm{Id} \in L^*\big(\sigma X, \sigma(\tau_c(\sigma X))\big) = L\big(X, \tau_c(\sigma X)\big).$$

DÉFINITION 3.4. Un e.v.l. X vérifie la condition (m) (resp. (a)) si:
(m) Pour toute suite $x_n \to 0$ il existe une suite croissante

$$(t_n)_{n \geqslant 0}, \; t_n \in \boldsymbol{R}_+, \; t_n \to \infty \quad \text{avec } t_n x_n \to 0,$$

(a) Pour toute suite $x_n \to 0$ il existe une sous-suite $x'_k = x_{n_k}$ avec $k x'_k \to 0$.

La condition (m) implique évidemment la condition (a). Tout espace N-séquentiel vérifie la condition (a). (Averbukh et Smolyanov [3]). Tout espace métrisable vérifie la condition (m). La classe des espaces vérifiant la condition (a) (resp. (m)) est stable par quotient, passage à un sous-espace, produit fini ou dénombrable (resp. produit fini), limite inductive stricte. Il existe donc des espaces non N-séquentiels satisfaisant la condition (a) et la condition (m).

Le problème de caractériser les e.v.t. vérifiant la condition (a) ou la condition (m) est ouvert.

LEMME 3.5. *Si X, Y, Z sont des e.v.l. et si X vérifie la condition* (a), $\tilde{L}^*(X, Y; Z) = L^*(X, Y; Z)$.

En effet, si $u \in L^*(X, Y; Z)$, si $x_n \to 0$ dans X et si (b_n) est une suite bornée de Y, pour toute application croissante φ: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ nous pouvons trouver une application croissante φ': $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ telle que $k x_{\varphi\circ\varphi'(k)} \to 0$. Par conséquent la sous-suite $u(x_{\varphi(n)}, b_{\varphi(n)})$ de $u(x_n, b_n)$ admet une sous-suite convergente $u(x_{\varphi\circ\varphi'(n)}, b_{\varphi\circ\varphi'(n)}) = u\big(n x_{\varphi\circ\varphi'(n)}, n^{-1} b_{\varphi\circ\varphi'(n)}\big)$ donc $u(x_n, b_n) \to 0$.

PROPOSITION 3.6. *Si X, Y, Z sont des e.v.l. l'application de composition γ: $L^*(X, Y) \times L^*(Y, Z) \to L^*(X, Z)$ est bilinéaire L-continue et sa transposée γ' appartient à $\tilde{L}^*\big(L^*(Y, Z), (L^*(X, Y); L^*(X, Z))\big)$. Si Y vérifie la condition* (a), $\gamma \in \tilde{L}^*\big(L^*(X, Y), L^*(Y, Z); L^*(X, Z)\big)$.

Le lemme 3.5. et la proposition 3.6. admettent des généralisations évidentes pour les applications multilinéaires.

Remarque 3.7. Si σX et σY sont les e.v.l. sous-jacents à deux e.v.t. X et Y, l'e.v.l. $L^*(\sigma X, \sigma Y)$ est l'e.v.l. $\sigma L^*(X, Y)$ sous-jacent à $L^*(X, Y)$ muni de la topologie de la convergence bornée (fait qui ne se produit pas pour la structure d'espace pseudo-topologique définie par Frölicher et Bucher sur $L(X, Y)$).

B. Calcul différentiel dans les e.v.l. Etant donnés deux e.v.l. X et Y l'espace $\mathscr{R}_L(X, Y)$ des L-restes de X dans y est l'ensemble des applications r: $X \to Y$ telles que pour toute suite bornée (b_n) de X et pour toute suite (t_n) de nombres réels positifs convergeant vers 0 on ait $t_n^{-1} r(t_n b_n) \to 0$. On a $L^*(X, Y) \cap \mathscr{R}_L(X, Y) = (0)$.

On dit que f: $O \to Y$, où O est un ouvert de $\tau(X)$ est *L-dérivable* en $a \in O$ s'il existe $u \in L^*(X, Y)$ tel que l'application r: $X \to Y$ définie par $r(x) = 0$ si $a + x \notin O$, $r(x) = f(a+x) - f(a) - u(x)$ si $a + x \in O$ soit un L-reste. L'application f est dite n fois L-dérivable sur O si elle est dérivable sur O et si f': $O \to L^*(X, Y)$ est $(n-1)$ fois dérivable sur 0. Elle est dite de *classe* C_L^n si elle est n fois dérivable sur O et si $f^{(k)}$: $O \to \tilde{L}^{*k}(X; Y)$ est L-continue pour $k = 0, \ldots, n$ (avec $f^{(0)} = f$). Si X vérifie la condition (a) toute application L-dérivable en a est L-continue en a.

PROPOSITION 3.8. *La composée de deux applications n-fois L-dérivables (resp. de classe C_L^n) est n fois dérivable (resp. de classe C_L^n).*

Pour prouver ces assertions, on établit par récurrence sur n la formule de dérivation à l'ordre n d'une fonction composée. On utilise ensuite le fait que l'application

$$L^{*p}(Y, Z) \times L^{*n_1}(X; Y) \times \ldots \times L^{*n_p}(X, Y) \to L^{*n}(X; Z),$$
$$n = n_1 + \ldots + n_p$$

définie par $(v, u, \ldots, u_p) \to v \circ (u_1 \times \ldots \times u_p)$ est $(p+1)$-linéaire continue donc dérivable.

La L-continuité des dérivées de l'application composée est immédiate.

Remarque 3.9. Pour établir ce résultat par le raisonnement classique ne faisant intervenir que la dérivée première $h' = \gamma(g' \circ f, f')$ de l'application composée $h = g \circ f$, Frölicher et Bucher [18] considèrent f' comme à valeurs dans l'espace "equable" $L^{\#}(X, Y)$ associé à $L(X, Y)$, X et Y étant des espaces vectoriels pseudo-topologiques. Le raisonnement classique serait applicable ici aussi si nous nous limitions aux e.v.l. vérifiant la condition (a), restriction qui ne nous paraît pas souhaitable.

Remarquons que la dérivée $f^{(n)}(a)$, considérée comme élément de $\tilde{L}^{*n}(X; Y)$ est symétrique, si Y est séparé par son dual $L^*(Y, \boldsymbol{R})$. Cette observation est utile dans la preuve esquissée ci-dessus de la proposition 3.8. Enonçons un théorème des accroissements finis.

PROPOSITION 3.10. *Soient X un e.v.l., $a, b \in \boldsymbol{R}$, $f: [a, b] \to X$ une application L-continue, L-dérivable sur $]a, b[$. Si C est un convexe de X, fermé pour la topologie de l'e.v.t.l.c. $\tau_c(V)$ associé à X et si $f'(t) \in C$ pour tout $t \in]a, b[$ alors $f(b) - f(a) \in (b-a)C$.*

C. Relation avec les notions définies dans les e.v.t. Si X et Y sont des e.v.t.l.c.s., $\sigma X, \sigma Y$ les e.v.l. associés, nous avons $\mathcal{R}_L(\sigma X, \sigma Y) = \mathcal{R}_B(X, Y) = \mathcal{R}_A(X, Y)$. Par suite, si X est un e.v.t.l.c. C-séquentiel l'application $f: \sigma X \to \sigma Y$ est L-dérivable en $a \in X$ si et seulement si $f: X \to Y$ est B-dérivable en a (ou A-dérivable en a).

DÉFINITION 3.11. Soient X et Y deux e.v.t. (resp. deux e.v.l.), $f: O \to Y$ avec $O \in \mathcal{O}(X)$ (resp. $O \in \mathcal{O}(\tau X)$) est dite de classe C^1_A si f est continue (resp. L-continue), A-dérivable sur O et si pour toute application $\varphi: A \to O$ de classe C^1 définie sur un ouvert A d'un espace normé E l'application $f \circ \varphi$ est de classe C^1 et $(f \circ \varphi)'(a) = f'(\varphi(a)) \circ \varphi'(a)$ pour tout $a \in A$.

Cette définition est légitime car la notion d'application de classe C^1 ne souffre pas d'ambiguité pour les applications définies sur un ouvert d'un espace normé.

Convenons de dire qu'un e.v.l. X est *bornologiquement convexe* si la bornologie qui lui est associée canoniquement est convexe ($B \subset X$ est dit borné si toute suite de points de B est bornée; cette bornologie est convexe si l'enveloppe équilibrée convexe de toute partie bornée est bornée). L'e.v.l. associé à un e.v.t.l.c.s. est bornologiquement convexe.

PROPOSITION 3.12. *Soit $f: O \to Y$, $O \in \mathcal{O}(\tau(X))$ où X et Y sont des e.v.l. Si f est de classe C^1_L sur O, f est de classe C^1_A sur O. Inversement, si X est un e.v.l. bornologiquement convexe vérifiant la condition* (a) *et si f est de classe C^1_A sur O, f est de classe C^1_L sur O.*

La partie directe étant immédiate, prouvons la réciproque. Il suffit de prouver la L-continuité de f' en tout point x_0 de O. Soient (x_n) une suite convergeant vers x_0 dans O, (b_n) une suite bornée de X ; prouvons que $y_n = f'(x_n)b_n - f'(x_0)b_n \to 0$. Sans restreindre la généralité nous supposons que $x_0 = 0$. Soit (y'_n) une suite extraite de (y_n), $y'_n = y_{k(n)}$. Nous pouvons trouver une sous-suite (x''_n) de la suite $(x'_n) = x_{k(n)}$ telle que $nx''_n \to 0$; $x''_n = x'_{j(n)}$. Soit (b''_n) la sous-suite correspondante de (b_n): $b''_n = b_{k(j(n))}$. Soit $E = \boldsymbol{R}^{(N)}$ l'espace des suites $a = (a_0, a_1, \ldots)$ de nombres réels dont les termes sont presque tous nuls, normé par $\|a\| = \sum_{n \geq 0} |a_n|$. Soit $\varphi: E \to X$ l'application linéaire définie par

$$\varphi(a) = \sum_{p \geq 0} a_{2p} p x''_p + a_{2p+1} b''_p .$$

Puisque X est bornologiquement convexe, φ est L-continue (et même continue si X est un e.v.t.l.c.s.), donc de classe C^1. Si nous notons (e_n) la base canonique de E nous avons

$$y''_n = (f \circ \varphi)'(n^{-1} e_{2n}) \cdot e_{2n+1} \to (f \circ \varphi)'(0) \cdot e_{2n+1} \to 0 .$$

Il en résulte que la suite (y_n) elle-même converge vers 0, donc que f est de classe C^1_L. On peut se demander si le résultat obtenu subsiste si l'on ne suppose pas que X vérifie la condition (a).

COROLLAIRE 3.13. *Soit X un e.v.t.l.c.s. vérifiant la condition* (a) *et tel que X et $X \times X$ soient O-séquentiels; soient $O \in \mathcal{O}(X)$, Y un e.v.t.l.c.s. Une application $f: O \to Y$ est de classe C^1_A si et seulement si f est de classe C^1_{BC}.*

Preuve. Il suffit de montrer que si f est de classe C^1_A, f' et df sont continues. La proposition 3.11 nous assure que f' est séquentiellement continue, donc continue puisque X est O-séquentiel. L'application df est aussi séquentiellement continue donc continue.

Remarque. Il est possible de généraliser à l'ordre supérieur la notion d'application de classe C^1_A, soit en demandant que $f', \ldots, f^{(n-1)}$ soient de classe C^1_A, soit en demandant que $f \circ \varphi$ soit de classe C^k si $\varphi: E \to X$ est de classe C^k, la $k^{\text{ème}}$-dérivée étant donnée par la règle habituelle, pour $k = 1, \ldots, n$, E étant un espace normé arbitraire.

PROPOSITION 3.14. *Soient X et Y deux e.v.t., $O \in \mathcal{O}(X)$, $f: O \to Y$. Si f est B-dérivable et si $f': O \to L(X, Y)$ est continue f est de classe C^1_L. La réciproque a lieu si X est O-séquentiel.*

Preuve. Seule la partie réciproque mérite une preuve. Soit W un ouvert de $L(X, Y)$; montrons que $(f')^{-1}(W)$ est ouvert dans O ce qui suffira. Considérons une suite (x_n) convergeant vers $x \in (f')^{-1}(W)$. Nous pouvons trouver $B \in \mathcal{B}(X)$, $V \in \mathcal{V}(Y)$ tel que $f'(x) + T(B, V) \subset W$ où $T(B, V) = \{u \in L(X, Y), u(B) \subset V\}$. Comme f est de classe C^1_L nous pouvons trouver un rang n_0 tel que $f'(x_n)B - f'(x)B \subset V$ pour tout $n \geq n_0$. Ainsi $f'(x_n) \in f'(x) + T(B, V)$ pour $n \geq n_0$ et $(f')^{-1}(W)$ est ouvert puisque X est O-séquentiel.

Corollaire 3.15. *Soient X et Y deux e.v.t., $O \in \mathcal{O}(X)$, $f\colon O \to Y$. Si X et $X \times X$ sont* 0*-séquentiels f est de classe C^1_L si et seulement si f est de classe C^1_{BC}.*

Remarque. Le fait que la règle de composition soit vérifiée pour la classe C^1_L est à rapprocher du fait que l'on peut répondre affirmativement à la question formulée par S. Lang ([29], remarque suivant la proposition 6, p. 6).

D. Appendice. Liens entre les propriétés particulières introduites pour les e.v.t.l.c.s.

Le diagramme suivant résume les relations entre les propriétés dont il a été fait mention ci-dessus.

$$\begin{tikzcd}
\text{Fréchet} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dd, Rightarrow] & \text{métrisable} \arrow[r, Rightarrow] & N\text{-séquentiel} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & O\text{-séquentiel} \arrow[d, Rightarrow] \\
 & & \text{bornologique} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & C\text{-séquentiel} \arrow[l, Rightarrow, dashed, bend right, "(a)"'] \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{tonnelé} \arrow[rr, Rightarrow] & & \text{infratonnelé} \arrow[r, Rightarrow] & \text{Mazur}
\end{tikzcd}$$

Pour les définitions se reporter au § 3. A, à Bourbaki [7] et Wilansky [49] où l'on trouvera la preuve des implications qui ne sont pas établies dans ce qui suit.

N-séquentiel $\Rightarrow$ bornologique: Soit C une partie convexe bornivore d'un espace vectoriel N-séquentiel X et soit $A = X - C$. Si C n'est pas voisinage de 0 dans X il existe une suite (a_n) de A qui converge vers 0 puisque X est N-séquentiel. Comme X vérifie la condition (a) il existe une sous-suite (a_{n_p}) de (a_n) telle que $pa_{n_p} \to 0$. Puisque C absorbe toute suite convergeant vers 0 il existe $k \in \boldsymbol{N}$ tel que $pa_{n_p} \in kC$, ce qui contredit le fait que $a_{n_p} \in A$ pour $p \geqslant k$. Cette preuve montre aussi l'implication: C-séquentiel et condition (a) $\Rightarrow$ bornologique.

O-séquentiel $\Rightarrow$ C-séquentiel. Soit V un voisinage séquentiel convexe de O dans X. Posons $I = [0, 1[$ et $V' = I \cdot V$. Nous voyons que V' est séquentiellement ouvert et contenu dans V; ainsi V est voisinage de 0.

Conclusion. La notion d'application de classe C^n_{BC} peut être retenue comme la notion centrale. Elle est parfaitement adaptée au formalisme des variétés différentiables et au langage des jets. Par ailleurs elle coïncide avec la notion naturelle lorsque la source est un espace normé et le but un e.v.t., ce qui n'est pas le cas des autres notions. Ce serait pourtant peut être prématuré que d'écarter les autres notions, qui, plus précises, peuvent rendre quelque service. Du point de vue de la simplicité, la préférence doit aller à la classe C^n_L si l'on veut bien se limiter aux e.v.t. O-séquentiels.

Remarquons que pour les questions locales et non globales, la restriction aux e.v.t. N-séquentiels s'impose (il n'y a que dans ces espaces qu'une application B-dérivable en un point est continue en ce point). Observons aussi que si X et Y sont des e.v.t.l.c.s. et si X est O-séquentiel (et même C-séquentiel) une suite convergente de $L(X, Y)$ (et même convergente pour la topologie de la convergence compacte) forme une famille équicontinue. Ce fait peut être rapproché des raisons qui font que l'emploi des suites convergentes dispense de conditions supplémentaires.

§4. APPLICATION AUX VARIETES FONCTIONNELLES

Soient $\pi\colon V \to M$ un fibré vectoriel de dimension finie, de classe C^∞, de base une variété séparable M. Nous munissons M d'une structure riemannienne g_M, π d'une structure riemannienne g et d'une connexion compatible γ. Pour $k \in \boldsymbol{N}$ le fibré $J^k\pi$ des k-jets de sections de π, $J^k\pi\colon J^kV \to M$ est muni d'une structure riemannienne g^k associée à g_M, g et γ. Pour $r \in \boldsymbol{N} \cup \{\infty\}$ l'espace $E^r = C^r_c(\pi)$ des sections de π à support compact est topologisable d'une manière indépendante des choix de g_M, g et γ. Nous prenons sur E^r la topologie localement convexe limite inductive des topologies canoniques sur les espaces

$$E^r_K = C^r_K(\pi) = \{s \in C^r(\pi), \quad s(m) = \zeta(m) \ \forall m \in M - K\},$$

où ζ est la section nulle de π, pour K variant dans l'ensemble filtrant $\mathscr{C}(M)$ des compacts de M.

Une fois choisie une suite exhaustive de compacts de M ($M = \bigcup_{n \geqslant 0} K_n$, $K_0 = \Phi$ $K_{n+1} \supset K_n$) une famille $(p_\varkappa)$ de semi-normes de E^r définissant sa topologie est obtenue en associant à toute suite croissante non bornée $\varkappa = (k_n)_{n \geqslant 0}$ de nombres entiers positifs la semi-norme $p_\varkappa$ définie par

$$p_\varkappa(s) = \sup_{n \geqslant 0} \max_{x \notin K_n} \max_{k < k_n} k_n \big[g^k\big(j^k s(x)\big)\big]^{1/2}$$

si $r = +\infty$ (où $j^k s$ est le k-jet de la section $s \in C^r_c(\pi)$) ou

$$p_\varkappa(s) = \sup_{n \geqslant 0} \max_{x \notin K_n} k_n \big[g^r\big(j^r s(x), j^r s(x)\big)\big]^{1/2} \quad \text{si } r \in \boldsymbol{N}.$$

Soient $\pi = (V, \pi, M)$, $\pi' = (V', \pi', \dot{M})$ deux fibrés vectoriels au-dessus de M, munis comme précédemment d'une structure riemannienne et d'une connexion compatible et soit $\Phi\colon O \to V'$ une application fibrée ($\pi' \circ \Phi = \pi|O$), de classe C^∞, définie sur un voisinage ouvert O de la section nulle ζ de π. Supposons qu'il existe un compact K de M et un morphisme de fibrés vectoriels $\alpha\colon \pi|\ M - K \to \pi'|\ M - K$ tels que $\Phi|\ O \cap \pi^{-1}(M - K) = \alpha|\ O \cap \pi^{-1}(M - K)$. Posons $O^r = \{s \in C^r(\pi),\ s(M) \subset O\}$.

PROPOSITION 4.1. *Sous les hypothèses précédentes, l'application $C^r(\Phi)$: $O^r \to C_c^r(\pi')$ donnée par $C^r(\Phi)(s) = \Phi\circ s$ est de classe C_{HC}^∞ pour $r<\infty$ et de classe C_{MC}^∞ pour $r=\infty$.*

Preuve. a) L'application $C^r(\Phi)$ est continue. Etant donnés $s\in O^r$, une suite $\varkappa' = (k_n')$ nous pouvons trouver une suite $\varkappa = (k_n)$ d'entiers positifs tels que les inégalités

$$\sup_{x\notin K_n} k_n^2 g^k\big(j^k s(x) - j^k\bar{s}(x),\, j^k s(x) - j^k \bar{s}(x)\big) < 1$$

impliquent que $\sup_{x\notin K_n} k_n'^2 g^k\big(j^k\Phi\circ s(x) - j^k\Phi\circ\bar{s}(x),\, j^k\Phi\circ s(x) - j^k\Phi\circ\bar{s}(x)\big) < 1$ car $j^n(\Phi\circ s) = J^n\Phi\circ j^n s$ et $J^n\Phi$ est continue au voisinage du compact $j^n s(K_n)$. Ainsi $p_{\varkappa'}(\Phi\circ s - \Phi\circ\bar{s}) < 1$ pourvu que $p_\varkappa(s-\bar{s}) < 1$.

b) L'application $C^r(\Phi)$ est dérivable. Désignons par $\delta\Phi$: $O \underset{M}{\times} V \to V'$ la dérivée verticale de Φ définie par $\delta\Phi(a, v) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\Phi(a+tv) - \Phi(a)]$, et par $D\Phi$: $O \to L(V, V')$ l'application fibrée définie par $D\Phi(a)\cdot v = \delta\Phi(a, v)$. La relation

$$\Phi(a+v) - \Phi(a) - D\Phi(a)\cdot v = \int_0^1 [D\Phi(a+tv) - D\Phi(a)]\,dt\cdot v$$

pour $(a, v)\in O \underset{M}{\times} V$, v assez petit, nous permet d'écrire pour $s\in O^r$, $h\in E^r = C_c^r(\pi)$ assez petit

$$C^r(\Phi)(s+h) - C^r(\Phi)(s) - C^r(D\Phi)(s)\cdot h = \int_0^1 [D\Phi\cdot(s+th) - D\Phi\circ s]\,dt\cdot h.$$

Le second membre de cette relation s'annule hors de K car $D\Phi(a) = a|\,\pi^{-1}(\pi(a))$ pour $a\in\pi^{-1}(M-K)$. Il en résulte facilement que $C^r(\Phi)$ est H-dérivable pour r fini et M-dérivable pour r infini.

c) L'application $C^r(\Phi)$ est continûment dérivable. L'application $dC^r(\Phi)$: $O^r\times C_c^r(\pi)\to C_c^r(\pi')$ est donnée par

$$dC^r(\Phi)(s, h) = C^r(\delta\Phi)(s, h)$$

donc est continue d'après a). La dérivée $C^r(\Phi)'$ de $C^r(\Phi)$ est donnée par $C^r(\Phi)'(s)\cdot h = C^r(D\Phi)(s)\circ h$, où $C^r(D\Phi)(s)\in C_c^r\big(L(\pi, \pi')\big)$ est considéré comme un morphisme de π dans π'. En fait $C^r(D\Phi)(s)$ appartient au sous-espace affine $C_a^r\big(L(\pi, \pi')\big)$ de $C^r\big(L(\pi, \pi')\big)$ formé des C^r-morphismes de π dans π' qui coïncident avec a au-dessus de $M-K$. Nous munissons cet espace de la topologie transportée de celle de $C_K^r\big(L(\pi, \pi')\big)$ par la translation par le prolongement, noté encore a, $D\Phi\circ\zeta$ de a. Nous définissons une injection affine continue i de $C_K^r\big(L(\pi, \pi')\big)$ dans $L\big(C_c^r(\pi), C_c^r(\pi')\big)$ en posant $i(u)\cdot s = (u+D\Phi\circ\zeta)\circ s = (u+a)\circ s$.

L'application $C^r(\Phi)'$ est la composée de i et de l'application $C^r(D\Phi - D\Phi\circ\zeta\circ\pi)$ de $C_c^r(O)$ dans $C_K^r\big(L(\pi, \pi')\big)$, donc est continue. Puisque $D\Phi - D\Phi\circ\zeta\circ\pi$ coïncide avec le morphisme nul sur $O\cap\pi^{-1}(M-K)$ nous pouvons déduire de ce qui précède que $C^r(\Phi)$ est de classe C^∞ compte tenu du fait que $D^n C^r(\Phi)(s)\cdot h_1\cdots h_n = (D^n\Phi\circ s)\circ(h_1, \ldots, h_n)$, ce qui assure que $D^n\Phi(s)\in L^n\big(C_c^r(\pi); C_c^r(\pi')\big)$.

THÉORÈME 4.2. *L'ensemble $\mathscr{D}^r(M)$ des difféomorphismes de classe C^r à support compact d'une variété séparable de dimension finie de classe C^∞ M est une variété de classe C_{HC}^∞ si $r\in N$, C_{MC}^∞ si $r = +\infty$, modelée sur des e.v.t.l.c.s.*

Preuve. Munissons M de la gerbe associée à une métrique riemannienne, et désignons par θ: $U\subset TM\to M\times M$ le tube associé, $\theta = (\tau, \varepsilon)$ où τ: $TM\to M$ est la projection canonique, ε l'application exponentielle de la gerbe. Une carte φ de $\mathscr{D}^r(M)$ en un point $f\in\mathscr{D}^r(M)$ est donnée par $g\to\varphi(g)\in C_c^r(\pi)$ avec $\pi = f^*\tau$, où $\varphi(g)$ est donné par $\varphi(g)(m) = \big(f(m), \theta^{-1}\big(f(m), g(m)\big)\big)$ pour tout $m\in M$. Les changements de cartes sont donnés par des applications φ: $\pi\to\pi'$, $\pi = f^*\tau$, $\pi' = f'^*\tau$ du type considéré dans la proposition 4.1. (en dehors d'un compact de M f et f' coïncident avec l'application identique donc φ est le morphisme induit par l'application identique de τ dans τ hors de ce compact).

Les modèles locaux de $\mathscr{D}^\infty(M)$ sont donc des espaces analogues à l'espace $\mathscr{D}$ de Schwartz. On peut donner un résultat analogue en munissant ces modèles de la topologie $\varinjlim_k C_c^k(\pi)$.

Pour pouvoir obtenir un résultat semblable pour le groupe des difféomorphismes (à support non nécessairement compact) il faut avoir recours aux notions développées dans J.-P. Penot [39].

Bibliographie

[1] R. Abraham and J. Robbin, *Transversal mappings and flows*, New York 1967.

[2] V. I. Averbukh and O. G. Smolyanov, *The theory of differentiation in linear topological spaces*, Russian Math. Surveys 22 (6) (1967), p. 201–258.

[3] — — *The various definitions of the derivative in linear topological spaces*, Russian Math. Surveys 23 (4) (1968), p. 67–113.

[4] M. Balanzat, *La différentielle d'Hadamard–Fréchet dans les espaces vectoriels topologiques*, C.R.A.S. 251 (1960) p. 2459–2461.

[5] A. Bastiani, *Différentiabilité dans les espaces localement convexes; distructures* Thése, Paris 1962.

[6] — *Applications différentiables et variétés différentiables de dimension infinie*, J. Analyse Math. 13 (1964), p. 1–114.

[7] N. Bourbaki, *Eléments de mathématiques. Espaces vectoriels topologiques*, Paris 1955.

[8] W. Bucher, *Différentiabilité de la composition et complétitude de certains espaces fonctionnels*, Comment. Math. Helv. 43 (1968), p. 256–288.

[9] H. Cartan, *Calcul différentiel*, Paris 1967.
[10] J. F. Colombeau, *Calcul différentiel dans les espaces bornologiques*. Thèse doctorat 3ème cycle, Bordeaux 1970.
[11] S. F. Long de Foglio, *La différentielle au sens d'Hadamard dans les espaces L-vectoriels*. Port. Math. 19 (1960), p. 165–184.
[12] J. Dieudonné, *Fondements de l'analyse moderne*, Paris 1968.
[13] E. Dubinsky, *Differential equations and differential calculus in Montel spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 110 (1) (1964), p. 1–21.
[14] R. M. Dudley, *On sequential convergence*, Trans. Amer. Math. Soc. 112 (3) (1964), p. 483–507.
[15] P. L. Falb, M. Q. Jacobs, *On differentials in locally convex spaces*, J. Differential Equations. 4 (1968), p. 444–459.
[16] M. Fréchet, *Sur la notion de différentielle dans l'analyse générale*, J. Math. Pures Appl. 16 (1937), p. 233–250.
[17] — *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, Rend. Circ. Mat. Palermo, 22 (1906).
[18] A. Frolicher, W. Bucher, *Calculus in vector spaces without norm*, Lecture Notes in Math., 30, Berlin 1966.
[19] R. Gateaux, *Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analytiques*, C.R.A.S. 157 (1913), p. 325–327.
[20] J. Gil de Lamadrid, *Topology of mappings and differentiation processes*, Illinois J. Math 3 (1959), p. 408–420.
[21] D. H. Hyers, *A generalization of Fréchet's differential*, Proc. Nat. Acad. Sci: USA 27 (1941), p. 315–316.
[22] — *Linear topological spaces*, Bul. Amer. Math. Soc. 51 (1945), p. 1–21.
[23] K. Iseki, *Implicit functions on locally convex topological linear spaces*, Proc. Japan Acad. 41 (1965), p. 147–149.
[24] H. H. Keller, *Differenzierbarkeit in topologischen Vektorräumen*, Comment. Math. Helv. 38 (1964), p. 308–320.
[25] H. H. Keller, *Über Probleme die bei einer Differentialrechnung in topologischen Vektorräumen auftreten*, Festband zum 70 Geburtstag von Rolf Nevanlinna (1966), p. 49–57.
[26] J. Kijowski, W. Szczyrba, *On differentiability in an important class of locally convex spaces*, Studia Math. 30 (1968), p. 247–257.
[27] J. Kisyński, *Convergence du type L*, Colloq. Math (2) (1960), p. 205–211.
[28] K. Kuratowski, *Topologie*, Varsovie (1958).
[29] S. Lang, *Introduction aux variétés différentiables*, Paris 1967.
[30] J. Leslie, *On a differential structure for the group of diffeomorphism*, Topology 6 (1967), p. 263–271.
[31] — *Some Frobenius theorems in global analysis*, J. Differential Geometry 2 (1968), p. 279–297.
[32] G. Marinescu, *Différentielles de Gâteaux et Fréchet dans les espaces localement convexes*, Bull. Math. Soc. Sc. Math. Phys. R.P.R. 1 (1957), p. 77–86.
[33] — *Espaces vectoriels pseudotopologiques et théorie des distributions*, Berlin 1963.
[34] D. Meeus, *Sur la dérivée d'une fonction entre parties d'espaces localement convexes*, C. R. Acad. Sc. Paris 271 (1970), p. 1250–1253.
[35] — *Le calcul différentiel dans les espaces localement convexes* (thèse) Louvain 1970.
[36] T. S. Mc Dermott, *Implicit functions in locally convex spaces*, Ph. Thesis Univ. Southern California 1969.
[37] A. D. Michal, *Differential calculus in linear topological spaces*, Proc. Nat. Acad. Sc. USA 24 (1938), p. 340–342.

[38] H. Omori, *On the group of diffeomorphisms on a compact manifold*, Proc. Symp. Pure Math, Berkeley 1968, Amer. Math. Soc. 15 (1970).
[39] J. P. Penot, *The fine topology on functional spaces and functional manifolds* (à paraître).
[40] D. S. Sal'ko, *On the theory of implicit functions in locally convex spaces*, Uspehi Mat. Nauk 24 (1969) (2), p. 235–236 MR 39 4672.
[41] J. Sebastião e Silva, *Le calcul différentiel et intégral dans les espaces localement convexes, réels ou complexes*, Atti. Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) vol. 20 (1956), p. 743–750; 21 (1956) p. 40–46.
[42] — *Les espaces à bornés et la notion de fonction différentiable*, Colloque d'Analyse Fonctionnelle, Louvain 1960.
[43] B. Sjöberg, *Derivatives in topological vector spaces*, Nordisk Mat. Tidskr. 14 (1966), p. 87–96 (en danois)
[44] M. Sova, *General theory of differentiability in linear topological spaces*, Czech. Math. J. 14 (4) (1964), p. 485–508. (en russe).
[45] — *Conditions of differentiability in linear topological spaces*, Czech. Math. J. 16 (3) (1966), p. 339–362 (en russe).
[46] P. Urysohn, *Sur les classes ($\mathscr{L}$) de M. Fréchet*, Enseign. Math. 25 (1926), p. 77–83.
[47] P. Ver Eecke, *Sur le calcul différentiel dans les espaces non normés*, C.R.A.S. Paris 265 (1967), p. 720–723.
[48] — *Calcul différentiel*, cours multigraphié, C.D.U. Paris 1969.
[49] A. Wilański, *Topics in functional analysis*, Lecture Notes Nº 45, Berlin 1967.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES EXACTES
UNIVERSITÉ DE PAU

Received, December 29, 1971

(458)