STUDIA MATHEMATICA, T. XLVI. (1973)

Espaces et intersections d'espaces d'Orlicz non localement convexes

par

PHILIPPE TURPIN (Orsay, France)

Sommaire. Ayant défini, pour les espaces vectoriels topologiques une "échelle de convexités généralisées" plus fine que celle qui est donnée par les p-convexités, $0 < p \leqslant 1$ on situe sur cette échelle les espaces d'Orlicz et les intersections d'espaces d'Orlicz munies de la topologie borne supérieure.

On considère ici des espaces d'Orlicz [7] L^{φ}, $L^{*\varphi}$, sur un intervalle réel muni de la mesure de Lebesgue ou sur l'ensemble $\boldsymbol{N}$ des entiers muni de la mesure cardinale, relatifs à des fonctions φ croissantes, souvent concaves.

S. Mazur et W. Orlicz [8] ont déterminé à quelle condition un espace d'Orlicz est localement convexe, ou, ce qui revient au même, normable. S. Rolewicz [10] caractérise les espaces d'Orlicz localement bornés (cf. également [4]) ou, ce qui est équivalent, ceux dont la topologie peut être définie par une p-norme, pour quelque $p \in]0,1]$ ([6], [9]). Puis W. Matuszewska et W. Orlicz caractérisent les espaces d'Orlicz p-normables, p étant donné [7].

On considère dans ce travail des notions de convexités généralisées plus précises que celles de p-convexités. Le "degré" de convexité (généralisée) d'un espace vectoriel topologique E (on trouvera une définition plus générale dans [12]) est donné par son "galbe", noté $G(E)$, qui est un sous-espace vectoriel de l^1 (quand E est séparé) muni d'une structure à convergence vectorielle (au sens de [2], [3]). Plus $G(E)$ est petit (et plus sa convergence est fine), moins la topologie de E est "convexe".

Par exemple, si $0 < p \leqslant 1$, E est localement p-convexe (resp. localement pseudo-convexe) exactement quand l^p (resp. $\bigcap_{p>0} l^p$, avec la topologie borne supérieure) est contenu dans $G(E)$, avec injection canonique continue.

L'objet de cet article est d'évaluer le galbe d'un espace d'Orlicz, et même d'une intersection d'espaces d'Orlicz munie de la topologie borne supérieure, puis d'essayer de situer ces galbes entre l^1 et l'espace des suites à support fini.

Le Paragraphe 1 contient, outre divers préliminaires, la définition des galbes.

Dans le Paragraphe 2 on calcule exactement le galbe d'une intersection d'espaces d'Orlicz relatifs à des fonctions φ concaves et on en donne une estimation dans le cas général.

On applique ce calcul dans le Paragraphe 3 pour caractériser les intersections d'espaces d'Orlicz localement p-convexes, et celles qui sont localement pseudo-convexes, généralisant le résultat de W. Matuszewska et W. Orlicz cité plus haut [7].

Dans le Paragraphe 4 on caractérise les galbes des espaces d'Orlicz relatifs à une fonction φ concave: ce sont les espaces de suites l^ϱ, ϱ sous-additive et sous-multiplicative et (pour les espaces d'Orlicz non localement bornés) l'espace des suites à support fini. On en déduit que l^q, $0 < q \leqslant 1$, (par exemple) est la réunion des galbes d'espaces d'Orlicz strictement contenus dans l^q. Cela montre que les galbes donnent une classification des espaces vectoriels topologiques beaucoup plus fine que celle qui est donnée par les p-convexités: entre $\bigcup_{p<q} l^p$ et l^q on peut trouver une infinité de galbes $G(E_i)$ (E_i localement bornés) deux à deux distincts, tous ces E_i étant p-normables pour le même ensemble $]0, q[$ de valeurs de p. Par contre on constate que si le galbe d'un espace d'Orlicz n'est pas contenu dans l^q, il contient un $l^{q+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, et cela pour $0 \leqslant q < 1$, si l^0 est l'espace des suites à support fini.

On voit alors dans le Paragraphe 5 que les intersections (dénombrables) d'espaces d'Orlicz fournissent une plus grande variété de galbes: si $0 \leqslant q < 1$, $l^{q+} = \bigcap_{p>q} l^p$ (resp. l^p) est la réunion (resp. l'intersection) des galbes de tels espaces strictement contenus dans l^{q+} (resp. qui contiennent strictement l^q). Par exemple $E = \bigcap_{p<\infty} L_{(0,1)}^{\log^p(1+x)}$ n'est pas localement pseudo-convexe mais $G(E)$ contient la suite (2^{-n}). Cet exemple fournit une réponse à un problème de S. Rolewicz et C. Ryll-Nardzewski [11].

On a dit que les galbes sont munis d'une structure à convergence. La convergence du galbe d'une intersection dénombrable d'espaces d'Orlicz est déterminée par l'ensemble sous-jacent au galbe (Corollaire 2.3), mais cela est faux pour une intersection quelconque: outre la convergence associée à sa topologie usuelle, l^p $(0 < p < 1)$ admet au moins deux autres convergences de galbe (Paragraphe 6).

Dans le Paragraphe 7 on montre que s'il existe une application linéaire continue non nulle de L^φ (relatif à une mesure sans atome) dans un espace séparé E, φ étant par exemple concave, $G(E)$ ne peut être trop grand (on sait déjà que E ne peut être localement convexe si $\varphi(x) = o(x)$ quand $x \to \infty$: [10]). Cela est à rapprocher des résultats de [15].

§ 1. PRÉLIMINAIRES

1.1. On utilisera divers éléments de l'article [15], dont on reprend les notations et la terminologie. Rappelons que si φ et ψ sont des applications croissantes de $[0, \infty[$ dans $[0, \infty[$, nulles en 0 et seulement en 0, on pose pour $u > 0$

$$\varphi|_0\psi(u) = \sup_{0<x\leqslant 1} \frac{\varphi(ux)}{\psi(x)}, \quad \varphi|^\infty\psi(u) = \sup_{1\leqslant x} \frac{\varphi(x)}{\psi(x/u)} \text{ avec } \varphi|^\infty\psi(0) = 0,$$

$$\varphi|_0^\infty\psi(u) = \sup_{0<x<\infty} \frac{\varphi(ux)}{\psi(x)}, \quad \varphi_{(-1)}(x) = 1/\varphi(1/x) \text{ avec } \varphi_{(-1)}(0) = 0.$$

Une fonction d'Orlicz est une application croissante de $[0, \infty[$ dans $[0, \infty[$, nulle en 0 et seulement en 0, continue en 0.

T désignera un espace mesuré par une mesure positive dt, généralement l'ensemble $\boldsymbol{N}$ des entiers $n \geqslant 0$ muni de la mesure cardinale ou bien l'ensemble $\boldsymbol{R}$ des réels ou l'intervalle $(0, 1)$ munis de la mesure de Lebesgue. La mesure d'un ensemble mesurable S est notée $|S|$. On a rappelé dans [15] la définition des classes et espaces d'Orlicz L_T^φ et $L_T^{*\varphi}$, l^φ et $l^{*\varphi}$, φ fonction d'Orlicz, et on posait

$$B_T^\varphi(\varepsilon) = \left\{f \in L_T^\varphi \,\middle|\, \int \varphi(|f|) \leqslant \varepsilon\right\}. \tag{1.1}$$

φ étant une fonction coïncidant au voisinage de 0 (resp. de ∞) avec une fonction d'Orlicz $\bar{\varphi}$, on écrira souvent l^φ (resp. $L_{(0,1)}^\varphi$) au lieu de $l^{\bar{\varphi}}$ (resp. $L_{(0,1)}^{\bar{\varphi}}$). On écrira par exemple $L_{(0,1)}^{\log x}$.

1.2. Nous utiliserons la notion d'espace vectoriel à convergence ([2], [3]). Un tel objet est déterminé par la donnée d'un espace vectoriel, réel ou complexe, E et d'un ensemble de filtres de E, dont on dit qu'ils tendent, ou convergent, vers 0, tel que tendent vers 0: tout filtre plus fin qu'un filtre tendant vers 0; pour tout $x \in E$, le filtre engendré par l'ensemble des $D_\varepsilon x$, $\varepsilon > 0$, où D_ε est l'ensemble des scalaires u tels que $|u| \leqslant \varepsilon$; toute combinaison linéaire finie de filtres tendant vers 0; la base de filtre des $D_\varepsilon A$, $\varepsilon > 0$, $A \in \alpha$, si α est un filtre tendant vers 0. On dit qu'une base de filtre d'un espace vectoriel à convergence tend vers 0 quand elle engendre un filtre tendant vers 0. Si E et F sont des espaces vectoriels à convergence, on dit que $E \subset F$ continûment quand E est un sous-espace vectoriel de F et que tout filtre de E tend vers 0 dans F, et que $E = F$ bicontinûment quand on a, continûment, $E \subset F$ et $F \subset E$.

Par exemple un espace vectoriel topologique est canoniquement identifié à un espace vectoriel à convergence: un filtre tend vers 0 si et seulement s'il est plus fin que le filtre des voisinages de 0. Autre exemple:

étant donnée une famille de parties équilibrées B_i d'un espace vectoriel E recouvrant E et stable par combinaison linéaire finie, disons qu'un filtre de E tend vers 0 quand il est plus fin que le filtre engendré par l'ensemble des homothétiques non nuls de l'un des B_i: c'est la convergence associée à la bornologie définie par les B_i.

1.3. Si T est un espace mesuré et Φ un ensemble non vide de fonctions d'Orlicz, on munit l'espace $\bigcap_{\varphi\in\Phi} L_T^{*\varphi}$ de la topologie borne supérieure des topologies induites par les $L_T^{*\varphi}$, $\varphi\in\Phi$: on obtient un espace vectoriel topologique. On dit que Φ est filtrant quand il est non vide et filtrant à droite pour le préordre $\dashv$ où $\varphi\dashv\psi$ signifie $\varphi|_0^\infty\psi(0+)<\infty$. Si Φ est filtrant (ce qu'on peut toujours supposer, quitte à remplacer Φ par l'ensemble des $\sup_i \varphi_i$ où (φ_i) parcourt l'ensemble des suites finies de Φ) la topologie de $E=\bigcap_{\varphi\in\Phi} L_T^{*\varphi}$ admet pour système fondamental de voisinages de 0 l'ensemble des $E\cap\varepsilon B_T^\varphi(\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, $\varphi\in\Phi$ (cf. (1.1)). Notons que la borne supérieure d'un ensemble fini de fonctions d'Orlicz concaves équivaut à une fonction d'Orlicz concave: c'est une conséquence de [15] (Proposition 1).

PROPOSITION 1.1. *Si Φ est un ensemble filtrant de fonctions d'Orlicz, si pour tout $\varphi\in\Phi$ il existe $\psi\in\Phi$ tel que $\varphi|_0^\infty\psi$ soit partout fini et si T est un espace mesuré, alors $\bigcap_{\varphi\in\Phi} L_T^{*\varphi}=\bigcap_{\varphi\in\Phi} L_T^\varphi$, cet espace, soit E, admet pour système fondamental de voisinages de l'origine l'ensemble des $E\cap B_T^\varphi(\varepsilon)$, $\varepsilon>0$, $\varphi\in\Phi$, et l'ensemble des fonctions simples est dense dans E. C'est le cas, par exemple, quand Φ est un ensemble de fonctions concaves.*

C'est immédiat (cf. [15]; formule (8)). L'ensemble des fonctions simples est dense dans E car il est dense dans K_T^φ, le plus grand sous-espace vectoriel de L_T^φ, et que $E=\bigcap_\varphi K_T^\varphi$.

Quand l'hypothèse de la Proposition 1.1 est vérifiée on écrit généralement $\bigcap_{\varphi\in\Phi} L_T^\varphi$ au lieu de $\bigcap_{\varphi\in\Phi} L_T^{*\varphi}$.

On aura aussi à considérer des espaces de la forme $\bigcap_{i\in I}\bigcup_{\xi\in\chi_i} l^{*\xi}$, les χ_i étant des ensembles filtrants à gauche de fonctions $\xi\colon[0,\infty[\to[0,\infty]$ croissantes, nulles en 0 et seulement en 0 et continues en 0 (cf. Théorème 2.2 par exemple). Les $l^{*\xi}$ sont des espaces vectoriels topologique, et se définissent exactement comme quand ξ est partout finie. Chaque $\bigcup_{\xi\in\chi_i} l^{*\xi}$ sera muni, non d'une topologie, mais de la structure à convergence la plus fine rendant continues les inclusions $l^{*\xi}\subset\bigcup_\xi l^{*\xi}$: un filtre tend vers 0 dans $\bigcup_\xi l^{*\xi}$ si et seulement si il admet une base qui tend vers 0 dans l'un des $l^{*\xi}$. Et la convergence de l'intersection est la borne supérieure

des convergences induites: un filtre tend vers 0 dans $\bigcap_{i\in I}\bigcup_{\xi\in\chi_i} l^{*\xi}$ si et seulement si il tend vers 0 dans chaque $\bigcup_{\xi\in\chi_i} l^{*\xi}$.

Si $0\leqslant q<1$ on pose

$$l^{q+}=\bigcap_{p>q} l^p \tag{1.2}$$

et on pose

$$l_0^t=\bigcap_\varphi l^\varphi, \tag{1.3}$$

où φ parcourt l'ensemble de toutes les fonctions d'Orlicz concaves. l_t^0 est l'espace vectoriel des suites scalaires $\lambda=(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ à support $(\{n|\lambda_n\neq 0\})$ fini muni de la topologie vectorielle la plus fine rendant borné l'ensemble des suites $e_m=(\delta_n^m)_{n\geqslant 0}$, $m\geqslant 0$, δ_n^m symbole de Kronecker ([16], p. 20). On voit facilement que pour que $B\subset l_t^0$ soit borné dans l_t^0 il faut et il suffit que B soit borné dans l^∞ et que, quand λ parcourt B, le nombre d'éléments du support de λ soit uniformément borné. Autrement dit, si τ est une fonction numérique non bornée croissante sur $[0,\infty[$, avec $\tau(0)=0<\tau(0+)$, B est borné dans l_t^0 si et seulement si $B\subset B_N^\tau(a)$ pour quelque $a<\infty$. On note

$$l_b^0 \tag{1.4}$$

l'espace vectoriel des suites scalaires (sur N) à support fini, muni de la convergence vectorielle associée à la bornologie définie par les bornés de l_t^0 (§ 1.2): un filtre α de l_b^0 tend vers 0 si et seulement si on peut trouver un borné B de l_t^0 tel que $\varepsilon B\in\alpha$ pour tout $\varepsilon>0$. La convergence de l_b^0 est la convergence vectorielle la plus fine pour laquelle tende vers 0 la base de filtre des $\{ue_m|m\geqslant 0,\ |u|\leqslant\varepsilon\}$, $\varepsilon>0$.

1.4. On rappelle qu'on pose, comme dans [16],

$$\sum_{n\geqslant 0}{}' A_n=\bigcup_{N\geqslant 0}\sum_0^N A_n$$

si les A_n sont contenus dans un espace vectoriel.

DÉFINITION 1.1. (cf. [12], [13]). Soit E un espace vectoriel topologique, réel ou complexe. Le galbe de E est l'espace vectoriel à convergence $G(E)$ des suites scalaires $\lambda=(\lambda_n)_{n\geqslant 0}$ telles que pour tout voisinage U de 0 dans E on puisse trouver un voisinage V de 0 dans E tel que

$$\sum_{n\geqslant 0}{}'\lambda_n V\subset U, \tag{1.5}$$

un filtre α de $G(E)$ tendant vers 0 si et seulement s'il existe un filtre α_0 moins fin que α, invariant par homothétie non nulle et tel que pour tout voisinage U de 0 dans E on puisse trouver $A \in \alpha_0$ et un voisinage V de 0 dans E vérifiant

$$\bigcup_{\lambda \in A} \sum_{n \geqslant 0}' \lambda_n V \subset U. \tag{1.6}$$

On a établi dans [12] que si E est métrisable $\lambda \in G(E)$ si et seulement si la suite des sommes partielles $\sum_0^N \lambda_n x_n$ est bornée pour toute suite bornée (x_n) de E.

On a pour tout E, c'est évident (cf. (1.4)),

$$l_b^0 \subset G(E) \quad \text{continûment.} \tag{1.7}$$

Proposition 1.2. *Soient E et F des espaces vectoriels topologiques.*

a) *Si F est un sous-espace vectoriel de E muni de la topologie induite ou si F est le quotient de E par un sous-espace vectoriel muni de la topologie quotient, on a*

$$G(E) \subset G(F) \quad \textit{continûment.}$$

b) *Si la topologie de F est l'image réciproque de celle de E par une application linéaire $f\colon F \to E$ d'image dense, alors*

$$G(E) = G(F) \quad \textit{bicontinûment.}$$

c) *Si la topologie de E est la borne supérieure d'une famille de topologies vectorielles $\mathcal{T}_i$, alors*

$$\bigcap_i G(E, \mathcal{T}_i) \subset G(E) \quad \textit{continûment,}$$

un filtre tendant vers 0 dans l'intersection des $G(E, \mathcal{T}_i)$ quand il tend vers 0 dans chaque $G(E, \mathcal{T}_i)$.

Cela se vérifie immédiatement. En appliquant a) à un sous-espace séparé de E de dimension 1, dont le galbe est évidemment l^1, on voit que, si la topologie de E n'est pas grossière,

$$G(E) \subset l^1 \quad \text{continûment.} \tag{1.8}$$

Définition 1.2. Si $0 \leqslant q < p \leqslant 1$ on dit qu'un espace vectoriel topologique E est *localement p-convexe* (resp. *localement q_+-convexe*) quand sa topologie peut être définie par une famille de p-semi-normes (resp. par une famille (ν_i), chaque ν_i étant une p_i-semi-norme de E pour quelque $p_i > q$), une p-semi-norme de E étant une fonction numérique sous-additive ν définie sur E, vérifiant $\nu(ux) = |u|^p \nu(x)$, u scalaire, $x \in E$. Les espaces localement 0_+-convexes sont aussi appelés localement pseudo-convexes.

Par exemple, l^p (resp. l^{q+}) est localement p-convexe (resp. q_+-convexe).

Proposition 1.3. a) *Si $0 \leqslant q < p \leqslant 1$ un espace vectoriel topologique E est localement p-convexe (resp. localement q_+-convexe) si et seulement si $l^p \subset G(E)$ continûment (resp. $l^{q+} \subset G(E)$ continûment (cf. (1.2.)))*

b) *Dire que $l_l^0 \subset G(E)$ continûment (cf. (1.3)), c'est dire que pour tout voisinage U de 0 dans E il existe un voisinage V de 0 dans E et une suite $\lambda_n > 0$, $n \geqslant 0$, tels que*

$$\sum{}' \lambda_n V \subset U. \tag{*}$$

c) *Dire que $l_b^0 = G(E)$ bicontinûment ((1,4)), c'est dire qu'il existe dans E un voisinage U de 0 tel que pour tout voisinage V de 0 dans E on puisse trouver un entier $N_V \geqslant 1$ tel que U n'absorbe pas $V + \ldots + V$ (N_V termes).*

Démonstration. Dire, par exemple, que $l^{q+} \subset G(E)$ continûment, c'est dire que tout voisinage U de 0 dans E contient, pour quelque $p > q$, l'enveloppe p-convexe $C_p(V) = \bigcup \{\sum' \lambda_n V \mid \sum |\lambda_n|^p \leqslant 1\}$ d'un voisinage V de 0, ce qui signifie que E est localement q_+-convexe (considérer la puissance $p_{-\text{ème}}$ de la jauge de $C_p(V)$).

Dire que $l_l^0 \subset G(E)$ continûment, c'est dire que si U est un voisinage de 0 dans E il existe $\varepsilon > 0$, une fonction d'Orlicz concave φ et un voisinage V de 0 dans E tels que $\sum' \mu_n V \subset U$ dès que $\sum_0^\infty \varphi(|\mu_n|) \leqslant \varepsilon$. Or, si U, V (équilibré) et $\lambda_n > 0$ vérifient (*), il existe une fonction d'Orlicz concave φ telle que $\varphi(\lambda_n) > \dfrac{1}{1+n}$ pour tout n; si alors $\sum_0^\infty \varphi(|\mu_n|) \leqslant 1$, on voit que le réarrangement décroissant $(\mu_n^\times)$ des $|\mu_n|$ vérifie $\mu_n^\times < \lambda_n$, et par suite $\sum' \mu_n V \subset U$. Réciproquement pour tous φ et ε il existe une suite $\mu_n > 0$ telle que $\sum_0^\infty \varphi(\mu_n) \leqslant \varepsilon$. Donc b) est démontré.

Supposons qu'il existe un voisinage U de 0 dans E vérifiant la condition énoncée dans c). Soit α un filtre de $G(E)$ tendant vers 0. Soient $A \in \alpha$ et V un voisinage de 0 dans E équilibré tels que $\sum' \lambda_n V \subset U$ pour tout $\lambda \in A$. Pour tout $\lambda \in A$, $\lambda_n \neq 0$ pour au plus N_V indices n. D'autre part $\alpha \to 0$ dans l^1 ((1,8)). Donc $\alpha \to 0$ dans l_b^0. Comme, pour tout $\lambda \in G(E)$, $\varepsilon\lambda \to 0$ dans $G(E)$ quand $\varepsilon \to 0$, on a démontré que $G(E) \subset l_b^0$ continûment et donc ((1,7)) $G(E) = l_b^0$ bicontinûment.

Supposons au contraire que pour tout voisinage U de 0 dans E il existe un voisinage V de 0 dans E et, pour tout entier $N \geqslant 1$, $c_N > 0$ tels que U contienne $c_N(V + \ldots + V)$ (N termes). Pour toute suite $c_N > 0$, $N \geqslant 0$, soit

$$A_c = \{\lambda \in l_b^0 \mid \sup_n |\lambda_n| \leqslant C_{N(\lambda)}\}$$

où $N(\lambda)$ est le nombre d'éléments du support de λ. L'ensemble des A_c, c variant, est une base de filtre qui tend vers 0 dans $G(E)$ mais pas dans l_b^0. Donc b) est démontré.

Exemples. Si $0 < p \leqslant 1$ on vérifie immédiatement que $G(l^p) = l^p$ bicontinûment. On en déduit que si T est un espace mesuré non nul et non réduit à un nombre fini d'atomes, $G(L_T^p) = l^p$ bicontinûment. En effet, L_T^p est localement p-convexe et, d'autre part, l^p est isomorphe à un sous-espace de L_T^p, donc (Proposition 1.2) $G(L_T^p) \subset l^p$ continûment.

On vérifie sans peine que si $0 \leqslant q < 1$, $G(l^{q+}) = l^{q+}$ bicontinûment et on verra (Théorème 6.2) que $G(l_t^0) = l_t^0$ bicontinûment et (Corollaire 2.2) que $G(M_{(0,1)}) = l_b^0$ bicontinûment si $M_{(0,1)}$ est l'espace des fonctions mesurables sur $(0,1)$ muni de la topologie de la convergence en mesure.

§ 2. LE GALBE D'UNE INTERSECTION D'ESPACES D'ORLICZ

THÉORÈME 2.1. *Soit Φ un ensemble filtrant de fonctions d'Orlicz, soit T l'un des espaces mesurés $\boldsymbol{N}$, $(0,1)$, $\boldsymbol{R}$; $|_T$ désigne respectivement $|_0$, $|^\infty$, $|_0^\infty$. Alors*

a) *Pour que $l_t^0 \subset G\big(\bigcap_{\varphi\in\Phi} L_T^{*\varphi}\big)$ continûment il faut et il suffit que pour tout $\varphi \in \Phi$ il existe $\psi \in \Phi$ tel que $\varphi|_T\psi(0+) = 0$. Si Φ admet un système cofinal dénombrable cette condition équivaut à l'existence d'une suite $\lambda \in G\big(\bigcap_{\varphi\in\Phi} L_T^{*\varphi}\big)$ telle que $\lambda_n > 0$ pour tout n.*

b) *Pour que $G\big(\bigcap_{\varphi\in\Phi} L_T^{*\varphi}\big) = l_b^0$ bicontinûment il faut et il suffit que la condition précédente ne soit pas vérifiée, c'est à dire qu'il existe $\varphi \in \Phi$ tel que $\varphi|_T\psi(0+) > 0$ pour tout $\psi \in \Phi$.*

Démonstration. Supposons que pour tout $\varphi\in\Phi$ il existe $\psi\in\Phi$ tel que $\psi|_T\psi(0+) = 0$. On peut supposer que $\varphi|_0^\infty\psi(0+) = 0$ ([15] (Remarque 1)). Soit alors dans $E = \bigcap_{\varphi\in\Phi} L_T^{*\varphi}$ un voisinage de l'origine $U \supset \varepsilon B_T^\varphi(\varepsilon) \cap E$, $\varepsilon > 0$, et soit $\psi \in \Phi$ tel que $\varphi|_0^\infty\psi(0+) = 0$. Il existe des suites $\mu_n > 0$ et $\nu_n > 0$, $n \geqslant 0$, telles que $\sum_0^\infty \varphi|_0^\infty\psi(\mu_n) \leqslant 1$ et $\sum_0^\infty \nu_n \leqslant 1$. Alors, si $f_n \in \varepsilon B_T^\psi(\varepsilon)$,

$$\int_T \varphi\Big(\frac{1}{\varepsilon}\sum_0^N \nu_n\mu_n|f_n|\Big) \leqslant \int_T \sup_{n\leqslant N} \varphi\Big(\mu_n\frac{|f_n|}{\varepsilon}\Big) \leqslant \sum_0^N \int_T \varphi\Big(\mu_n\frac{|f_n|}{\varepsilon}\Big)$$
$$\leqslant \sum_0^N \varphi|_0^\infty\psi(\mu_n)\int_T \psi\Big(\frac{|f_n|}{\varepsilon}\Big) \leqslant \varepsilon.$$

Donc $\sum' \lambda_n V \subset U$ si $V = \varepsilon B_T^\psi(\varepsilon) \cap E$ et $\lambda_n = \nu_n\mu_n$. En vertu de la Proposition 1.3 cela démontre que $l_t^0 \subset G(E)$ continûment. Si Φ admet un système cofinal dénombrable E est métrisable et par conséquent on construit immédiatement par une "diagonale" une suite $\lambda_n > 0$, $n \geqslant 0$, telle que pour tout U il existe V vérifiant (1.5).

D'autre part il résulte du Théorème 4.a) de [15] que si $0 < \varepsilon < |T|\varphi(1)$, si $\eta > 0$ et si $\varepsilon B_T^\varphi(\varepsilon)$ absorbe $\eta B_T^\psi(\eta) + \ldots + \eta B_T^\psi(\eta)$ (N termes), alors $N\varphi|_T\psi(0+) \leqslant 2\varepsilon/\eta$. Donc b) se déduit de la Proposition 1.3.

COROLLAIRE 2.1. *Pour que $l_t^0 \subset G\big(\bigcap_{\varphi\in\Phi} L_T^{*\varphi}\big)$ continûment il suffit que pour tout $\varphi\in\Phi$ il existe $\psi\in\Phi$ tel que $\varphi(x) = o(\psi(x))$ au voisinage de 0, de ∞ ou de 0 et ∞ selon que $T = \boldsymbol{N}$, $(0,1)$ ou $\boldsymbol{R}$.*

COROLLAIRE 2.2. *Pour que $G(L_T^{*\varphi}) = l_b^0$ bicontinûment il faut et il suffit que $L_T^{*\varphi}$ ne soit pas localement borné.*

Car pour que $L_T^{*\varphi}$ ne soit pas localement borné il faut et il suffit que $\varphi|_T\varphi(0+) > 0$ ([15] (corollaire 2), ou [4], [10]).

Par exemple si φ est bornée $G(L_{(0,1)}^\varphi) = G(L_{\boldsymbol{R}}^\varphi) = l_b^0$ bicontinûment car $\varphi|^\infty\varphi(0+) = \varphi|_0^\infty\varphi(0+) = 1$. Donc $G(M_{(0,1)}) = l_b^0$ bicontinûment si $M_{(0,1)}$ est l'espace des fonctions mesurables sur $(0,1)$ muni de la topologie de la convergence en mesure. Autre exemple: $G(L_{(0,1)}^{\log x}) = G(l^{1/|\log x|}) = l_b^0$ bicontinûment.

Le Corollaire 2.2 renforce un résultat de [10], selon lequel $L_T^{*\varphi}$ est localement borné s'il est localement pseudo-convexe.

COROLLAIRE 2.3. *Soit, pour $i = 1, 2$, Φ_i un ensemble de fonctions d'Orlicz admettant un système cofinal dénombrable, T_i l'un des espaces mesurés $\boldsymbol{N}$, $(0,1)$, $\boldsymbol{R}$, et soit $E_i = \bigcap_{\varphi\in\Phi_i} L_{T_i}^{*\varphi}$. Supposons que $G(E_1) \subset G(E_2)$. Alors cette inclusion est continue.*

En effet, ou bien (cas trivial) $G(E_1) = l_b^0$ bicontinûment ou bien il existe dans $G(E_1)$ une suite $\lambda_n > 0$, $n \geqslant 0$. D'autre part chaque E_i est métrisable. Appliquons alors le Corollaire 3 de [13].

Le Corollaire 2.3 dit en particulier que la convergence du galbe d'un espace métrisable $\bigcap_{\varphi\in\Phi} L_T^{*\varphi}$ $(T \in \{\boldsymbol{N}, (0,1), \boldsymbol{R}\})$ est déterminée par l'ensemble sous-jacent à ce galbe. On verra que cela est faux sans l'hypothèse de métrisabilité (théorèmes 6.1 et 6.2). Signalons en outre qu'on a construit dans [14] un espace métrisable dont le galbe est égal à l_b^0 comme ensemble, mais pas bicontinûment.

THÉORÈME 2.2. *Φ est un ensemble filtrant de fonctions d'Orlicz équivalentes à des fonctions concaves (resp. de fonctions d'Orlicz arbitraires), T est l'un des espaces mesurés $\boldsymbol{N}$, $(0,1)$, $\boldsymbol{R}$, $|_T$ a le même sens que dans le Théorème 2.1. On suppose que pour tout $\varphi\in\Phi$ l'ensemble Φ_φ des $\psi\in\Phi$ tels que $\varphi|_T\psi(0+) = 0$ soit non vide. Alors*

$$G\Big(\bigcap_{\varphi\in\Phi} L_T^\varphi\Big) = \bigcap_{\varphi\in\Phi}\bigcup_{\psi\in\Phi_\varphi} l^{\varphi|_T\psi} \quad \textit{bicontinûment}$$

$$\Big[\textit{resp. } G\Big(\bigcap_{\varphi\in\Phi} L_T^{*\varphi}\Big) \subset \bigcap_{\varphi\in\Phi}\bigcup_{\psi\in\Phi_\varphi} l^{*\varphi|_T\psi} \quad \textit{continûment}\Big].$$

Autrement dit (§ 1.3) *pour qu'un filtre a tende vers* 0 *dans* $G(\bigcap_{\varphi\in\Phi} L_T^{\varphi})$ [*resp. dans* $G(\bigcap_{\varphi\in\Phi} L_T^{*\varphi})$] *il faut et il suffit* [*resp. il faut*] *que pour tout* $\varphi\in\Phi$ *il existe* $\psi\in\Phi_\varphi$ *tel que a admette une base qui tende vers* 0 *dans* $l^{\varphi|_T\psi}$ [*resp.* $l^{*\varphi|_T\psi}$].

En particulier, si $\varphi|_T\varphi(0+) = 0$,

$$G(L_T^{\varphi}) = l^{\varphi|_T\varphi} \quad \textit{bicontinûment}$$

quand φ équivaut à une fonction concave, et, en général,

$$G(L_T^{*\varphi}) \subset l^{*\varphi|_T\varphi} \quad \textit{continûment}.$$

Démonstration. Supposons les fonctions de Φ concaves (à une équivalence près), soit a un filtre de $X = \bigcap_{\varphi\in\Phi}\bigcup_{\psi\in\Phi_\varphi} l^{\varphi|_T\psi}$ tendant vers 0 dans X (cf. § 1.3). On voit facilement que le filtre invariant par homothétie non nulle le plus fin qui soit moins fin que a, soit a_0, tend encore vers 0 dans X. Soit alors U un voisinage de l'origine dans $E = \bigcap_{\varphi\in\Phi} L_T^{\varphi}$. $U \supset E\cap\cap B_T^{\varphi}(\varepsilon)$, $\varphi\in\Phi$, $\varepsilon>0$. Il existe $\psi\in\Phi_\varphi$ tel que $A = X\cap B_N^{\varphi|_T\psi}(1)\in a_0$, puis ([15]: Théorème 4. b)) il existe $\eta>0$ tel que si $V = E\cap B_T^{\psi}(\eta)$ on ait, pour tout $\lambda\in A$, $\sum'\lambda_n V\subset U$. Cela montre que a tend vers 0 dans $G(E)$. Donc $X\subset G(E)$ continûment.

Φ est maintenant un ensemble filtrant de fonctions d'Orlicz quelconques et soit a un filtre invariant par homothétie non nulle tendant vers 0 dans $G(E_*)$ où $E_* = \bigcap_{\varphi\in\Phi} L_T^{*\varphi}$. Etant donné $\varphi\in\Phi$ et $\varepsilon>0$, $\varepsilon<|T|\varphi(1)$, il existe $A\in a$, $\psi_0\in\Phi$ et $\eta>0$ tels que

$$\bigcup_{\lambda\in A}\sum{}'\lambda_n\eta\big(B_T^{\psi_0}(\eta)\cap E_*\big)\subset\varepsilon B_T^{\varphi}(\varepsilon).$$

A est absorbé par $B_N^{\varphi|_T\psi_0}\left(2\dfrac{\varepsilon}{\eta}\right)$ ([15]: Théorème 4. a)). Il existe $\psi\in\Phi_\varphi\cap\Phi_{\psi_0}$. Montrons que $B_N^{\varphi|_T\psi_0}\left(2\dfrac{\varepsilon}{\eta}\right)$ est borné dans $l^{*\varphi|_T\psi}$. C'est évident si $\varphi|_T\psi_0(0+) > 0$ (car $\varphi|_T\psi_0$ n'est pas bornée). Si $\varphi|_T\psi_0(0+) = 0$ cela résulte de [15] (Théorème 2 et formule (8)), car on peut supposer les fonctions $\varphi|_T\psi$ et $\varphi|_T\psi_0$ partout finies (quitte à les tronquer par 1) et les relations (4) et (3) de [15] montrent alors que

$$(\varphi|_T\psi)|_0(\varphi|_T\psi_0)\,(0+)\leqslant\psi_0|_T\psi(0+) = 0.$$

Comme a est invariant par homothétie non nulle la trace de a sur $l^{*\varphi|_T\psi}$ tend vers 0 dans cet espace. Donc $G(E_*)\subset\bigcap_{\varphi\in\Phi}\bigcup_{\psi\in\Phi_\varphi} l^{*\varphi|_T\psi}$ continûment.

Corollaire 2.4. *Si Φ est un ensemble filtrant de fonctions d'Orlicz, on a*

$$G\Big(\bigcap_{\varphi\in\Phi} l^{*\varphi}\Big)\subset\bigcap_{\varphi\in\Phi} l^{*\varphi} \quad \textit{continûment}$$

et, si les $\varphi\in\Phi$ ne sont pas bornées

$$G\Big(\bigcap_{\varphi\in\Phi} L_{(0,1)}^{*\varphi}\Big)\subset\bigcup_{\varphi\in\Phi} l^{*\varphi(-1)} \quad \textit{continûment},$$

en rappelant que $\varphi_{(-1)}(x) = 1/\varphi(1/x)$ *et* $\varphi_{(-1)}(0) = 0$.

Démonstration. C'est évident si ces galbes sont l_0^0. Sinon (Théorème 2.1) on peut appliquer le Théorème 2.2. On remarque alors que si $\varphi\in\Phi$ et $\psi\in\Phi_\varphi$, $l^{*\varphi|_0\psi}\subset l^{*\varphi}$ continûment car $\varphi|_0\psi(u)\geqslant\varphi(u)/\psi(1)$ et $l^{*\varphi|^\infty\psi}\subset l^{*\psi(-1)}$ continûment car $\varphi|^\infty\psi(u)\geqslant\varphi(1)\psi_{(-1)}(u)$.

Corollaire 2.5. *Si φ est une fonction d'Orlicz non bornée équivalente à une fonction concave, on a, bicontinûment,*

$$G(L_{(0,1)}^{\varphi}) = G(l^{\varphi(-1)}),\qquad G(L_{R}^{\varphi}) = G(L_{R}^{\varphi(-1)}).$$

Démonstration. C'est une conséquence des Théorèmes 2.1 et 2.2 et de [15] (formule (2)).

Donnons ci-dessous un exemple simple de calcul de galbe. On trouvera d'autres calculs de galbes dans les Paragraphes 5 et 6. Précisons que φ est dite sous-multiplicative (resp. sur-multiplicative) sur $X\subset[0,\infty[$ quand $\varphi(x)\varphi(y)$ majore (resp. minore) $\varphi(xy)$ pour tous x et y dans X.

Proposition 2.1. *Soit Φ un ensemble filtrant de fonctions d'Orlicz équivalentes à des fonctions concaves. Si les $\varphi\in\Phi$ sont sous-multiplicatives au voisinage de* 0 (*resp. sur-multiplicatives au voisinage de ∞ et non bornées*), *on a*

$$G\Big(\bigcap_{\varphi\in\Phi} l^{\varphi}\Big) = \bigcap_{\varphi\in\Phi} l^{\varphi}\quad\Big[\textit{resp. } G\Big(\bigcap_{\varphi\in\Phi} L_{(0,1)}^{\varphi}\Big) = \bigcup_{\varphi\in\Phi} l^{\varphi(-1)}\Big]\quad\textit{bicontinûment}. \tag{2.1}$$

Si les $\varphi\in\Phi$ sont sous-multiplicatives (*resp. sur-multiplicatives et non bornées*) *sur* $[0,\infty[$ *on a*

$$G\Big(\bigcap_{\varphi\in\Phi} L_{R}^{\varphi}\Big) = \bigcap_{\varphi\in\Phi} l^{\varphi}\quad\Big[\text{resp. }\bigcup_{\varphi\in\Phi} l^{\varphi(-1)}\Big]\quad\textit{bicontinûment}. \tag{2.2}$$

Il est entendu qu'un filtre tend vers 0 *dans* $\bigcup_{\varphi\in\Phi} l^{\varphi(-1)}$ *exactement quand il admet une base tendant vers* 0 *pour la topologie de l'un des* $l^{\varphi(-1)}$.

Démonstration. Si $\varphi\in\Phi$ est sous-multiplicative au voisinage de 0 ou, plus généralement, si $\sup_{x,y\leqslant\varepsilon}\dfrac{\varphi(xy)}{\varphi(x)\varphi(y)}<\infty$ pour un $\varepsilon>0$, φ équivaut à la fonction $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon^2 x)$ qui vérifie, sur $[0,1]$, $\varphi_\varepsilon(xy)\leqslant M\varphi_\varepsilon(x)\varphi_\varepsilon(y)$ pour un $M<\infty$: au voisinage de 0, $\varphi_\varepsilon|_0\varphi_\varepsilon$ équivaut à φ_ε, donc $\varphi|_0\varphi$ équivaut à φ, d'où (Théorème 2.2) $G(l^{\varphi}) = l^{\varphi}$. La Proposition 1.2 et le Corollaire 2.4 donnent alors la première partie de (2.1).

Supposons les $\varphi\in\Phi$ non bornées et sur-multiplicatives au voisinage de ∞. Si $\psi\in\Phi$ on voit comme ci-dessus (ou en utilisant la formule (2) de [15]) que $\psi|^\infty\psi$ équivaut à $\psi_{(-1)}$ au voisinage de ∞. Etant données ϱ

et φ dans Φ, il existe $\psi \in \Phi$ telle que $\varrho(x)+\varphi(x) = O(\psi(x))$ quand $x \to \infty$. On a

$$l^{\varrho}(-1) \subset l^{\psi}(-1) = l^{\psi|^{\infty}\psi} \subset l^{\varphi|^{\infty}\varphi}.$$

Selon la notation du Théorème 2.2, $\psi \in \Phi_\varphi$ puisque ψ n'est pas bornée. Donc, d'aprés le Théorème 2.2,

$$\bigcup_{\varrho \in \Phi} l^{\varrho}(-1) \subset G\big(\bigcap_{\varphi \in \Phi} L^{\varphi}_{(0,1)}\big) \quad \text{continûment}.$$

L'inclusion inverse vient du Corollaire 2.4.

La formule (2.2) se démontre de la même manière.

Exemples. Si $0 < p \leqslant 1$, $G(l^p) = l^p$ (et on en a déduit plus haut que $G(L^p_T) = l^p$ pour tout espace mesuré T excepté un cas trivial) bicontinûment, et

$$G(L^{x^p/\log x}_{(0,1)}) = G(l^{x^p|\log x|}) = l^{x^p|\log x|} \quad \text{bicontinûment}.$$

Si $0 \leqslant q < 1$, $G(l^{q+}) = l^{q+}$ bicontinûment $\big($avec $l^{q+} = \bigcap_{p>q} l^p\big)$ et quand $0 < q \leqslant 1$,

$$G\big(\bigcap_{p<q} L^p_{(0,1)}\big) = \bigcup_{p<q} l^p \quad \text{bicontinûment}.$$

On peut calculer directement à partir du Théorème 2.2 et du Corollaire 2.5, ou déduire des Théorèmes 3.1 et 4.2 (voir plus loin) que si $0 < p \leqslant 1$ on a

$$G(L^{x^p \log x}_{(0,1)}) = G(l^{x^p/|\log x|}) = l^p \quad \text{bicontinûment}.$$

§ 3. GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE W. MATUSZEWSKA ET W. ORLICZ

Proposition 3.1. *Soit T l'un espaces mesurés $\boldsymbol{N}$, $(0,1)$, $\boldsymbol{R}$, soient φ et ψ des fonctions d'Orlicz; on suppose que $x \to \dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ est croissante et que φ est concave. Alors on a*

$$G(L^{\varphi}_T) \subset G(L^{*\psi}_T) \quad \textit{continûment}.$$

Démonstration. La proposition est immédiate si $\varphi|_T\varphi(0+) > 0$ (Théorème 2.1); le signe $|_T$ est défini dans le Théorème 2.1. Supposons donc que $\varphi|_T\varphi(0+) = 0$. Supposons aussi, quitte à modifier φ et ψ en conservant les espaces correspondants et la croissance de $\dfrac{\psi}{\varphi}$, que φ n'est pas bornée et que $\varphi|_T\varphi = \varphi|_0^\infty\varphi$ ([15] (Remarque 1)). Alors $\psi(x)$ équivaut à $g(\varphi(x))$ pour une fonction convexe g. En effet φ est une bijection de

$[0, \infty[$, soit φ^{-1} son inverse et soit

$$g(x) = \int_0^x \frac{\psi(\varphi^{-1}(t))}{t}\,dt.$$

g est convexe et

$$\psi\left(\varphi^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \leqslant g(x) \leqslant \psi(\varphi^{-1}(x))$$

d'où, si $\varphi|_0^\infty\varphi(u) \leqslant \frac{1}{2}$ et $u > 0$,

$$\psi(ux) \leqslant g(\varphi(x)) \leqslant \psi(x).$$

Si alors $\lambda \in B_{\boldsymbol{N}}^{\varphi|_0^\infty\varphi}(1)$ et $f_n \in B_T^{g\circ\varphi}(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $\sum_0^N \lambda_n f_n \in B_T^{g\circ\varphi}(\varepsilon)$ pour tout N (ce qui achève la démonstration). En effet

$$\int_T g\circ\varphi\left(\sum_0^N |\lambda_n f_n|\right) \leqslant \int_T g\left(\sum_0^N \varphi|_0^\infty\varphi(|\lambda_n|)\varphi(|f_n|)\right)$$
$$\leqslant \sum_0^N \varphi|_0^\infty\varphi(|\lambda_n|) \int_T g\circ\varphi(|f_n|) \leqslant \varepsilon.$$

La réciproque est évidemment fausse en général, puisque tous les espaces $L^{*\varphi}$ non localement bornés ont même galbe (Corollaire 2.2). W. Matuszewska et W. Orlicz ([7]) ont cependant démontré une réciproque partielle: si $0 < p \leqslant 1$, $L^{*\varphi}_T$ est localement p-convexe (c'est à dire $l^p \subset G(L^{*\varphi}_T)$) si et seulement si $x \to \varphi(x^{1/p})$ équivaut à une fonction convexes Pour $p = 1$ ceci était déjà démontré dans [8]. Voir aussi [5]. Généralison. (cf. Définition 1.2).

Théorème 3.1. *Soit Φ un ensemble filtrant de fonctions d'Orlicz, soit T l'un des espaces mesurés $\boldsymbol{N}$, $(0,1)$, $\boldsymbol{R}$. Alors, si $0 \leqslant q < p \leqslant 1$, $\bigcap_{\varphi\in\Phi} L^{*\varphi}_T$ est localement p-convexe (resp. localement q_+-convexe) si et seulement si il existe un ensemble Γ de fonctions d'Orlicz convexes (resp. et des $p(g) > q$, $g \in \Gamma$) vérifiant*

$$\bigcap_{\varphi\in\Phi} L^{*\varphi}_T = \bigcap_{g\in\Gamma} L^{*g(x^p)}_T \quad \Big[\textit{resp.} \bigcap_{\varphi\in\Phi} L^{*\varphi}_T = \bigcap_{g\in\Gamma} L^{*g(x^{p(g)})}_T\Big]$$

avec mêmes topologies.

Démonstration. La suffisance de cette condition se déduit des Propositions 3.1, 1.3 et 1.2 c); démontrons sa nécessité. Supposons $\bigcap_{\varphi\in\Phi} L^{*\varphi}_T$ localement p-convexe (resp. q_+-convexe). Alors (Théorèmes 2.1 et 2.2 et Proposition 1.3) $\Phi_\varphi \neq \emptyset$ pour tout $\varphi \in \Phi$ (notation du Théorème 2.2) et

$$l^p \,(\text{resp. } l^{q+}) \subset \bigcap_{\varphi\in\Phi} \bigcup_{\psi\in\Phi_\varphi} l^{*\varphi|_T\psi} \quad \text{continûment}.$$

Donc pour tout $\varphi\in\Phi$ il existe $\psi\in\Phi_\varphi$ (resp. et $p>q$) avec
$$l^p\subset l^{*\varphi|_T\psi}.$$
Cela entraîne qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que $M=\sup_{0<u\leqslant 1}\dfrac{\varphi|_T\psi(\varepsilon u)}{u^p}<\infty$. On pose alors quand $T=\boldsymbol{R}$ (resp. $\boldsymbol{N}$).
$$g_0(x)=\sup_{0<u\leqslant 1}\frac{\varphi(\varepsilon ux)}{u^p}\qquad \text{si } 0\leqslant x$$
(resp. si $0\leqslant x\leqslant 1$ et $g_0(x)=g_0(1)x^p$ si $x>1$) et quand $T=(0,1)$
$$g_0(x)=\inf_{0<u\leqslant 1}u^p\psi\left(\frac{x}{\varepsilon u}\right)\qquad \text{si } x\geqslant 1,$$
$$g_0(x)=g_0(1)x^p\qquad \text{si } 0\leqslant x<1.$$
Alors g_0 est une fonction d'Orlicz, $g_0(x)/x^p$ est une fonction croissante de x sur $]0,\infty[$; quand $T=\boldsymbol{R}$ (resp. $\boldsymbol{N}$)
$$\varphi(\varepsilon x)\leqslant g_0(x)\leqslant M\psi(x)\qquad \text{pour } 0\leqslant x \text{ (resp. } 0\leqslant x\leqslant 1)$$
et quand $T=(0,1)$
$$\frac{1}{M}\varphi(x)\leqslant g_0(x)\leqslant\psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\qquad \text{pour } 1\leqslant x.$$
$g_0(x)$ équivaut à une fonction $g(x^p)$, g fonction d'Orlicz convexe (démonstration de la Proposition 3.1) et on peut prendre pour Γ l'ensemble des fonctions convexes ainsi obtenues.

§ 4. ESPACES D'ORLICZ LOCALEMENT BORNÉS

Caractérisons les galbes des espaces d'Orlicz L_T^φ, φ concave, $T\in\{\boldsymbol{N},(0,1),\boldsymbol{R}\}$. On sait déjà que l_b^0 est le galbe des L_T^φ non localement bornés (Corollaire 2.2).

PROPOSITION 4.1. *Soit T l'un des espaces mesurés $\boldsymbol{N}$, $(0,1)$, $\boldsymbol{R}$. Soit un espace d'Orlicz localement borné L_T^φ, φ concave. Alors $G(L_T^\varphi)=l^\varrho$, où ϱ est une fonction d'Orlicz sous-multiplicative sur $[0,1]$, $\varrho(1)=1$ et $u\to\dfrac{\varrho(u)}{u}$ est décroissante. Réciproquement, si une fonction d'Orlicz ϱ vérifie ces propriétés ou, plus généralement, si, au voisinage de 0, ϱ équivaut à une fonction concave* ([15]; (*Proposition* 1)) *et vérifie, pour un $M<\infty$, $\varrho(uv)\leqslant M\varrho(u)\varrho(v)$, alors il existe un espace d'Orlicz localement borné L_T^φ, φ concave, tel que $G(L_T^\varphi)=l^\varrho$ bicontinûment.*

Démonstration. L_T^φ donné, on sait (§ 2) que $G(L_T^\varphi)=l^{\varphi|_T\varphi}$ et on peut prendre $\varrho=\varphi|_T\varphi$, car ϱ est sous-multiplicative ([15]; formule (4)), $\varrho(1)=1$, $\varrho(u)/u$ est décroissante parce que c'est vrai pour $\varphi(x)/x$, et ϱ est continue en 0 ([15]; Corollaire 2). Réciproquement, si ϱ est donnée avec les hypothèses de la proposition l^ϱ et $L_{(0,1)}^{\varrho(-1)}$ sont localement bornés ([15]; Corollaire 2) et (Proposition 2.1) $l^\varrho=G(l^\varrho)=G(L_{(0,1)}^{\varrho(-1)})$. Reste à considérer le cas où $T=\boldsymbol{R}$. On peut supposer que ϱ vérifie les propriétés plus fortes ci-dessus, quitte à remplacer ϱ par $\hat\varrho|_0\hat\varrho$ où $\hat\varrho$ est une fonction d'Orlicz concave équivalente au voisinage de 0 à ϱ, car ϱ équivaut au voisinage de 0 à $\varrho|_0\varrho$, donc à $\hat\varrho|_0\hat\varrho$. Définissons alors une fonction $\bar\varrho$ par $\bar\varrho(u)=\varrho(u)$ pour $0\leqslant u\leqslant 1$ et
$$\bar\varrho(u)=\sup_{x\leqslant 1}\frac{\varrho(x)}{\varrho\left(\dfrac{x}{u}\right)}$$
pour $u>1$. On va voir que $\bar\varrho$ est une fonction d'Orlicz sous-multiplicative sur $[0,\infty[$ et équivalente à une fonction concave φ: on aura $l^\varrho=G(L_{\boldsymbol{R}}^\varphi)$. $\bar\varrho$ est croissante puisque $\varrho(1)=1$. $\bar\varrho(u)/u$ décroît sur $]0,\infty[$ puisqu'il en est ainsi de $\varrho(u)/u$ et que $\varrho(1)=1$. Enfin $\bar\varrho$ est sous-multiplicative: $\bar\varrho$ l'est déjà sur $[0,1]$; si $u>1$ et $v>1$,
$$\bar\varrho(uv)\leqslant\sup_{x\leqslant 1}\frac{\varrho(x)}{\varrho\left(\dfrac{x}{u}\right)}\sup_{x\leqslant 1}\frac{\varrho\left(\dfrac{x}{u}\right)}{\varrho\left(\dfrac{x}{uv}\right)}\leqslant\bar\varrho(u)\bar\varrho(v);$$
de même si $\dfrac{1}{u}\leqslant v\leqslant 1$ car alors, pour $x\leqslant 1$, $\varrho\left(\dfrac{x}{u}\right)\leqslant\varrho\left(\dfrac{x}{uv}\right)\varrho(v)$; et enfin si $0<v\leqslant\dfrac{1}{u}<1$, $\varrho(u)\geqslant\dfrac{\varrho(uv)}{\varrho(v)}$ par définition de $\varrho(u)$.

Nous allons appliquer la Proposition 4.1 en utilisant le lemme suivant.

LEMME 4.1. *Soit σ une fonction d'Orlicz sous-multiplicative au voisinage de 0 (resp. sur-multiplicative au voisinage de ∞) et équivalente à une fonction concave (par exemple, $\sigma(x)=x^p$, $0<p\leqslant 1$); soit φ une fonction d'Orlicz telle que $\sigma(x)=o(\varphi(x))$ au voisinage de 0 (resp. $\varphi(x)=o(\sigma(x))$ au voisinage de ∞). Alors il existe une fonction d'Orlicz ϱ sous-multiplicative (resp. sur-multiplicative) et équivalente à une fonction concave telle que, au voisinage de 0 (resp. de ∞), $\sigma(x)=o(\varrho(x))$ et $\varrho(x)=o(\varphi(x))$ [resp. $\varphi(x)=o(\varrho(x))$ et $\varrho(x)=o(\sigma(x))$].*

Démonstration. Les transformations de φ et σ en $\varphi_{(-1)}$ et $\sigma_{(-1)}$ permettent de ne traîter le problème qu'au voisinage de 0. On peut supposer σ sous-multiplicative sur $[0,1]$ (démonstration de la Proposition 2.1). Soit ψ une fonction d'Orlicz telle que $\sigma(x) = o(\psi(x))$ et $\psi(x) = o(\varphi(x))$ au voisinage de 0. Posons

$$\tilde{\sigma}(y) = \log(\sigma(e^y)), \quad \tilde{\psi}(y) = \log(\psi(e^y)),$$

puis

$$c_0(y) = \sup\{1, \inf_{z\leqslant y}(\tilde{\psi}(z)-\tilde{\sigma}(z))\}, \quad y \leqslant 0.$$

c_0 est décroissante, $c_0(y) \to +\infty$ quand $y \to -\infty$, $c_0(y) \leqslant \tilde{\psi}(y)-\tilde{\sigma}(y)$ au voisinage de $-\infty$. Posons, pour $y \leqslant 0$,

$$c_1(y) = \inf_{0<u\leqslant 1} \frac{c_0(uy)}{u}, \quad g_1(y) = \tilde{\sigma}(y)+c_1(y).$$

$\tilde{\sigma} \leqslant g_1 \leqslant \tilde{\psi}$ au voisinage de $-\infty$. $\tilde{\sigma}$ est croissante, c_1 décroissante. Posons

$$g(y) = \inf_{y\leqslant z\leqslant 0} g_1(z).$$

g est croissante, $g \leqslant g_1$. $\tilde{\sigma}$ est sous-additive, c_1 est sous-additive car $c_1(y)/y$ est décroissante, donc g_1 est sous-additive, et donc g est sous-additive:

$$g(y_0)+g(y_1) = \inf_{z_i\geqslant y_i} (g_1(z_0)+g_1(z_1)) \geqslant \inf g_1(z_0+z_1) = g(y_0+y_1).$$

$g-\tilde{\sigma}$ est décroissante car si $g(y') > g(y)$ on a

$$g(y)-\tilde{\sigma}(y) = \inf_{y\leqslant z<y'} [g_1(z)-\tilde{\sigma}(y)] \geqslant \inf c_1(z) \geqslant c_1(y') \geqslant g(y')-\tilde{\sigma}(y').$$

Comme $g_1(y)-\tilde{\sigma}(y) \to +\infty$ quand $y \to -\infty$ (car $c_1(y) \geqslant \min\{\sqrt{|y|}, c_0(-\sqrt{|y|})\}$), on voit facilement qu'il en est de même de $g(y)-\tilde{\sigma}(y)$. Revenons à la variable $x \geqslant 0$. Posons

$$\varrho_0(x) = e^{g(\log x)} \quad \text{si } 0 < x \leqslant 1, \ \varrho_0(0) = 0.$$

ϱ_0 est croissante et sous-multiplicative sur $[0,1]$. Au voisinage de 0, $\varrho_0(x) \leqslant e^{\tilde{\psi}(\log x)} = \psi(x)$. Donc ϱ_0 est continue en 0. Comme $g(y)-\tilde{\sigma}(y)$ tend vers $+\infty$ au voisinage de $-\infty$, $\sigma(x) = o(\varrho_0(x))$ quand $x \to 0$. Enfin ϱ_0/σ est décroissante sur $]0,1]$ puisque $g-\tilde{\sigma}$ est décroissante; donc ϱ_0 équivaut au voisinage de 0 à une fonction concave puisqu'il en est ainsi de σ (cf. [15]; Proposition 1). Donc (démonstration de la Proposition 4.1) ϱ_0 équivaut au voisinage de 0 à une fonction d'Orlicz ϱ sous-multiplicative sur $[0,\infty[$ et équivalente à une fonction concave: ϱ vérifie les propriétés demandées.

THÉORÈME 4.1. *Soit σ une fonction d'Orlicz sous-multiplicative au voisinage de 0 et équivalente à une fonction concave (par exemple $\sigma(x) = x^p$, $0 < p \leqslant 1$), soit T l'un des espaces mesurés $\boldsymbol{N}$, $(0,1)$, $\boldsymbol{R}$. Alors, pour tout $\lambda \in l^\sigma$ il existe un espace d'Orlicz (localement borné) L_T^ψ, ψ concave, tel que*

$$\lambda \in G(L_T^\psi) \subsetneqq l^\sigma.$$

Démonstration. Il existe une fonction d'Orlicz φ telle que $\lambda \in l^\varphi$ et $\sigma(x) = o(\varphi(x))$ au voisinage de 0. Soit alors ϱ une fonction d'Orlicz telle que celle construite dans le lemme: $\lambda \in l^\varrho \subsetneqq l^\sigma$ et (Proposition 4.1) il existe une fonction d'Orlicz concave ψ telle que $l^\varrho = G(L_T^\psi)$.

Le théorème ci-dessus montre que le galbe d'un espace d'Orlicz ne peut être le plus petit galbe d'espace localement borné contenant une suite $\lambda \in l^1$ donnée (on verra ailleurs que pour certaines suites λ ce plus petit galbe existe).

COROLLAIRE 4.1. *Pour tout $\lambda \in l^p$, $0 < p \leqslant 1$, il existe un espace localement borné séparé E non p-normable et un voisinage de l'origine U dans E tel que $\sum_{n\geqslant 0}' \lambda_n U$ soit borné.*

S. Rolewicz donne déjà dans [9] un espace r-normable pour tout $r < p$ et non p-normable. Le Corollaire 4.1 est plus précis. Notons qu'on peut y remplacer l'élément λ de l^p par un ensemble B uniformément p-sommable [15], compact par exemple, la réunion des $\sum' \lambda_n U$, $\lambda \in B$, étant alors bornée. On donnera à la fin de ce paragraphe des espaces non p-normables ($p < 1$) encore plus "près" en un certain sens d'être p-normables que ceux donnès par le Théorème 4.1. Le Théorème 4.2 ci-dessous montre que la situation est différente pour les espaces d'Orlicz qui sont "un peu plus" que p-normables. La démonstration de ce théorème vaut encore si on y fait $p = 0$ et $l^p = l_b^0$: si le galbe d'un $L_T^{*\varphi}$ n'est pas l_b^0 il contient un l^q, $q > 0$. Mais cela résulte déjà du Corollaire 2.2 et d'un résultat connu ([9] ou [6] p. 161).

THÉORÈME 4.2. *Soit T l'un des espaces mesurés $\boldsymbol{N}$, $(0,1)$ ou $\boldsymbol{R}$, φ une fonction d'Orlicz, $0 < p < 1$. Alors, ou bien $G(L_T^{*\varphi}) \subset l^p$ ou bien il existe $q > p$ tel que $l^q \subset G(L_T^{*\varphi})$. Par conséquent $G(L_T^{*\varphi}) \subset l^p$ si $L_T^{*\varphi}$ n'est pas p-normable et $G(L_T^{*\varphi}) = l^p$ si (et seulement si) $L_T^{*\varphi}$ est strictement p-normable (c'est à dire est p-normable mais n'est q-normable pour aucun $q > p$). En vertu du Corollaire 2.3 toutes les inclusions ci-dessus sont continues.*

Démonstration. Supposons que $G(L_T^{*\varphi}) \not\subset l^p$. Alors (§ 2) $l^{*\varphi|_T\varphi} \not\subset l^p$. Donc, si $\varrho(u) = u^{-p}\varphi|_T\varphi(u)$ pour $0 < u \leqslant 1$, $\liminf_{u\to 0} \varrho(u) = 0$, $\varrho(u) \leqslant u^{-p}$, ϱ est sous multiplicative ([15]; formule (4)). Donc $\varrho(u) = O(u^\varepsilon)$ au voisinage de 0 pour un $\varepsilon > 0$. En effet il existe $a \in]0,1[$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\varrho(a) = a^\varepsilon$. Soit alors $n \in \boldsymbol{N}$ et $u \in]a^{n+1}, a^n]$.

$$\varrho(u) \leqslant \varrho(a^{-n}u)\,\varrho(a^n) \leqslant a^{-p}a^{n\varepsilon} \leqslant a^{-p-\varepsilon}u^\varepsilon.$$

Donc $\varphi|_T\varphi(u) = O(u^{p+\varepsilon})$ au voisinage de 0. On en déduit comme dans la démonstration du Théorème 3.1 que $\varphi(u)$ équivaut au voisinage de 0 à une fonction convexe de $u^{p+\varepsilon}$, et donc que $L_T^{*\varphi}$ est localement $(p+\varepsilon)$-

convexe (Théorème 3.1) et par conséquent $(p+\varepsilon)$-normable (puisque localement borné).

Je ne connais pas d'espace strictement p-normable dont le galbe ne soit pas l^p.

Le Théorème 4.2 montre que, pour la relation d'ordre de l'inclusion continue $\subset$, les l^p, $0<p\leqslant 1$, sont comparables à tous les galbes d'espaces d'Orlicz. Néanmoins l'ensemble de ces galbes n'est pas totalement ordonné. En effet on peut construire deux fonctions d'Orlicz φ_0 et φ_1 équivalentes à des fonctions concaves et sous-multiplicatives telles que les l^{φ_i} (qui sont des galbes d'espaces d'Orlicz localement bornés: Proposition 4.1) ne soient pas comparables. En effet, soit $0<p<1$ et, pour tout entier $n\geqslant 1/p$,

$$c_n(y) = \inf\left\{-\frac{y}{n!},\, 1+(1-p)\big(y+(n+1)!\big)\right\};$$

pour $i=0,1$ posons

$$\tilde{\varphi}_i(y) = py + c_{2n-i}(y) \text{ sur } [-(2n+1-i)!,\ -(2n-i)!],$$

$$\tilde{\varphi}_i(y) = 1+py \text{ ailleurs}, \quad \text{et } \varphi_i(x) = e^{\tilde{\varphi}_i(\log x)}.$$

φ_i est croissante et continue en 0, φ_i équivaut à une fonction concave car $\tilde{\varphi}_i(y)-y$ est décroissante, φ_i est sous-multiplicative car $\tilde{\varphi}_i(y)/y$ étant décroissante $\tilde{\varphi}_i$ est sous-additive. Et on peut vérifier que ni φ_0/φ_1 ni φ_1/φ_0 n'est bornée au voisinage de 0. Remarquons en outre que $l^{\varphi_i} \subsetneqq l^p$ continûment et que $l^p = l^{\varphi_0}+l^{\varphi_1}$, l'addition $l^{\varphi_0}\times l^{\varphi_1}\to l^p$ étant ouverte, car $\inf_i \varphi_i(x) = ex^p$. Donc, dans l'ensemble des galbes d'espaces vectoriels topologiques muni de la relation d'ordre d'inclusion continue, l^p est la borne supérieure des deux galbes — strictement plus petits que $l^p - l^{\varphi_0}$ et l^{φ_1}.

§ 5. INTERSECTIONS DÉNOMBRABLES D'ESPACES D'ORLICZ

5.1. Etant donnés une fonction d'Orlicz φ et un nombre réel $r\neq 0$, posons

$$\varphi_{(r)}(x) = [\varphi(x^{1/r})]^r, \quad \varphi_{(r)}(0) = 0. \tag{5.1}$$

$\varphi_{(r)}$ est une fonction d'Orlicz, si φ n'est pas bornée quand $r<0$; $\varphi_{(r)(s)} = \varphi_{(rs)}$; si φ équivaut à une fonction concave au voisinage de ∞ (resp. de 0), $\varphi_{(r)}$ équivaut à une fonction concave au voisinage de ∞ (resp. de 0) si $r>0$ et au voisinage de 0 (resp. de ∞) si $r<0$ (appliquer [15]; Proposition 1).

Supposons $\tilde{\varphi}(y) = \log\big(\varphi(e^y)\big)$ concave au voisinage de ∞. Alors, au voisinage de ∞, ou bien $\varphi(x)$, et donc $\varphi_{(r)}(x)$ pour $r>0$, équivalent à x^p

pour un $p\geqslant 0$, ou bien $\varphi_{(r)}(x) = o\big(\varphi_{(s)}(x)\big)$ dès que $0<r<s$. De plus, pour que (au voisinage de ∞) φ soit équivalente à une fonction concave il suffit (et il faut) que $\varphi(x) = O(x)$. En effet, en prenant par exemple $r=1$, il existe y_1 tel que pour $y\geqslant y_1$, $\tilde{\varphi}(y) = \tilde{\varphi}(y_1)+p(y-y_1)+\int_{y_1}^{y} f(t)\,dt$ où $p\geqslant 0$, f est localement intégrable et décroissante sur $[y_1, \infty[$ et $f(t)\to 0$ quand $t\to\infty$. Soit $s>1$. A une constante additive près, $s\tilde{\varphi}(y)-\tilde{\varphi}(sy)$ est égal à

$$(s-1)\int_{y_1}^{y} f(t)\,dt - \int_{y}^{sy} f(t)\,dt \geqslant (s-1)\int_{y_1}^{y}\big(f(t)-f(y)\big)\,dt - y_1 f(y).$$

Si $\varphi(x)$ n'équivaut pas à x^p l'intégrale du second membre tend (quand $y\to\infty$) vers $\int_{y_1}^{\infty} f(t)\,dt = \infty$, donc $s\tilde{\varphi}(y)-\tilde{\varphi}(sy)\to\infty$, d'où $\varphi(x) = o\big(\varphi_{(s)}(x)\big)$ quand $x\to\infty$. Si alors, pour $x\to\infty$, $\varphi(x) = O(x)$, ou bien $\varphi(x)$ équivaut à une fonction (concave) x_p, $0\leqslant p\leqslant 1$, ou bien $\varphi(x) = o(x)$ puisque $\varphi_{(2)}(x) = O(x)$. Dans ce dernier cas $y-\tilde{\varphi}(y)\to\infty$ quand $y\to\infty$ et donc $y-\tilde{\varphi}(y)$ est croissante au voisinage de ∞ (parce que $f(y)\to 0$); cela entraîne que $\varphi(x)/x$ décroît et donc que φ équivaut à une fonction concave au voisinage de ∞.

De même, supposons $\tilde{\varphi}$ convexe au voisinage de $-\infty$. Alors, au voisinage de 0, ou bien $\varphi(x)$ équivaut à un x^p, $p>0$, ou bien $\varphi_{(r)}(x) = o\big(\varphi_{(s)}(x)\big)$ dès que $0<s<r$, et pour que φ équivaille (au voisinage de 0) à une fonction concave il suffit (et il faut) que $x = O\big(\varphi(x)\big)$. En effet $\log\big(\varphi_{(-1)}(e^y)\big) = -\tilde{\varphi}(-y)$ sera concave (et non bornée) au voisinage de $+\infty$: il suffit d'appliquer ce qui précède à $\varphi_{(-1)}$.

Proposition 5.1. *Soit φ une fonction d'Orlicz telle que $\log\big(\varphi(e^y)\big)$ soit une fonction de y convexe (resp. concave et non bornée) au voisinage de $-\infty$ (resp. $+\infty$), et que $x = O\big(\varphi(x)\big)$ au voisinage de 0 (resp. $\varphi(x) = O(x)$ au voisinage de ∞). Alors, pour tout $r>0$, $\varphi_{(r)}$ équivaut au voisinage de 0 (resp. de ∞) à une fonction concave et*

$$G\Big(\bigcap_{r>0} l^{\varphi(r)}\Big) = \bigcap_{r>0} l^{\varphi(r)} \quad \textit{bicontinûment}$$

$$\Big(\textit{resp. } G\Big(\bigcap_{0<r<\infty} L^{\varphi(r)}_{(0,1)}\Big) = \bigcup_{0<r<\infty} l^{\varphi(-r)} \quad \textit{bicontinûment.}\Big)$$

Autrement dit un filtre tend vers 0 dans le galbe si et seulement s'il tend vers 0 dans chaque $l^{\varphi(r)}$ [resp. si et seulement s'il admet une base tendant vers 0 dans l'un des $l^{\varphi(-r)}$].

Démonstration. La concavité (à une équivalence près) des $\varphi_{(r)}$ est déjà établie.

Supposons d'abord $\varphi^{\sim}(y) = \log(\varphi(e^y))$ convexe sur un intervalle $]-\infty, \log a]$ $0 < a \leqslant 1$, et évaluons les fonctions $\varphi_{(r)}|_0\varphi_{(s)}$, avec $0 < s < r$. Soit u et x dans $]0, a^r]$.

$$\begin{aligned}\varphi_{(r)}(ux) &= \exp[r\tilde{\varphi}(\log u^{1/r} + \log x^{1/r})]\\ &= \exp\left[r\tilde{\varphi}\left(\left(1-\frac{s}{r}\right)\log u^{1/(r-s)} + \frac{s}{r}\log x^{1/s}\right)\right]\\ &\leqslant \exp[(r-s)\tilde{\varphi}(\log u^{1/(r-s)}) + s\tilde{\varphi}(\log x^{1/s})] = \varphi_{(r-s)}(u)\varphi_{(s)}(x).\end{aligned}$$

Donc $\sup\limits_{0<x\leqslant 1}\dfrac{\varphi_{(r)}(ua^r x)}{\varphi_{(s)}(x)} \leqslant \varphi^{(r-s)}(u)$ si $0 \leqslant u \leqslant a^r$. D'autre part $\varphi_{(r-s)}(u) = \dfrac{\varphi_{(r)}(ux)}{\varphi_{(s)}(x)}$ si $x = u^{s/(r-s)}$. Donc, on a

$$\varphi_{(r)}|_0\varphi_{(s)}(a^r u) \leqslant \varphi_{(r-s)}(u) \leqslant \varphi_{(r)}|_0\varphi_{(s)}(u) \tag{5.2}$$

si $0 < s < r$ et pour tout $u \in [0, a^r]$, où $a > 0$. Donc si $0 < r' < r$, $l^{\varphi(r')} = l^{\varphi(r)|_0\varphi(r-r')}$ et par conséquent

$$l^{\varphi(r')} \subset \bigcup_{0<s<r} l^{\varphi(r)|_0\varphi(s)} \quad \text{continûment.} \tag{1}$$

En appliquant le Théorème 2.2 on tire de (1) que

$$\bigcap_{r'>0} l^{\varphi(r')} \subset G\big(\bigcap_{r>0} l^{\varphi(r)}\big) \quad \text{continûment.}$$

D'autre part l'inclusion inverse a lieu et est continue en vertu du Corollaire 2.4.

Supposons maintenant que $\log(\varphi(e^y))$ soit concave et non bornée au voisinage de $+\infty$. φ n'étant pas bornée, $\varphi_{(-1)}$ est une fonction d'Orlicz et

$$\log(\varphi_{(-1)}(e^y)) = -\log(\varphi(e^{-y}))$$

est convexe au voisinage de $-\infty$. D'après (5.2) $\varphi_{(-s)}|_0\varphi_{(-r)}$ équivaut à $\varphi_{(r-s)}$ au voisinage de 0 si $0 < r < s$ puisque $\varphi_{(-1)(r)} = \varphi_{(-r)}$. Donc ([15]; formule (2)) $\varphi_{(r)}|^\infty\varphi(s)$ équivaut à $\varphi_{(r-s)}$ si $0 < r < s$. Par suite $l^{\varphi(-r')} = l^{\varphi(r)|^\infty\varphi(s)}$ si $s = r + r'$ et $r' > 0$; $l^{\varphi(-r')} \subset \bigcup_{s>r} l^{\varphi(r)|^\infty\varphi(s)}$ continûment; cela étant vrai pour tous $r > 0$ et $r' > 0$, on passe à la réunion en r' et à l'intersection en r et on trouve (Théorème 2.2)

$$\bigcup_{0<r<\infty} l^{\varphi(-r)} \subset G\big(\bigcap_{0<r<\infty} L^{\varphi(r)}_{(0,1)}\big) \quad \text{continûment.}$$

Et, en vertu du Corollaire 2.4, l'inclusion inverse a lieu et est continue.

Notons que si $\log(\varphi(e^y))$ est concave au voisinage de $+\infty$ un filtre tend vers 0 dans le galbe de $\bigcap\limits_{0<r<\infty} L^{\varphi(r)}_{(0,1)}$ (égal à $\bigcup\limits_{0<r<\infty} l^{\varphi(-r)}$) si et seulement si, pour un $r \in]0, \infty[$, il contient la base de filtre des $\varepsilon B_N^{\varphi(-r)}(1)$, $\varepsilon > 0$

(§ 1.1 pour la notation). La convergence de ce galbe est donc associée à une bornologie (§ 1.2). Cela résulte de la démonstration du Théorème 2.2 (on peut aussi appliquer [15]; Théorème 2, a)).

5.2

EXEMPLE. Etant donné $q \in [0, 1[$, soit φ une fonction d'Orlicz telle que $\varphi(x) = x^q \log x$ au voisinage de ∞. Si $r > 0$, $\varphi_{(r)}(x) = r^{-r}x^q\log^r x$ au voisinage de ∞ et $\varphi_{(-1)(r)}(x) = \varphi_{(-r)}(x) = r^r x^q|\log x|^{-r}$ pour x voisin de 0. Au voisinage de ∞, $\log(\varphi(e^y)) = qy + \log y$ est concave et donc $\log(\varphi_{(-1)}(e^y))$ est convexe au voisinage de $-\infty$. Donc (Proposition 5.1)

$$G\Big[\bigcap_{r>0} l^{x^q|\log x|^{-r}}\Big] = \bigcap_{r>0} l^{x^q|\log x|^{-r}} \quad \text{bicontinûment,} \tag{5.3}$$

$$G\Big[\bigcap_{r<\infty} L^{x^q\log^r x}_{(0,1)}\Big] = \bigcup_{r<\infty} l^{x^q|\log x|^{-r}} \quad \text{bicontinûment.} \tag{5.4}$$

Etant donnée une suite scalaire λ, notons $\lambda^\times$ le réarrangement décroissant de la suite des $|\lambda_n|$, $n \geqslant 0$. Alors, si $0 < q < 1$, on tire de (5.4)

$$\lambda \in G\Big[\bigcap_{r<\infty} L^{x^q\log^r x}_{(0,1)}\Big] \Leftrightarrow \exists s < \infty,\ \lambda_n^\times = O(n^{-1/q}\log^s n), \tag{5.5}$$

$$\lambda \in G\Big[\bigcap_{r<\infty} L^{\log^r x}_{(0,1)}\Big] \Leftrightarrow \exists s > 0,\ \lambda_n^\times = O(e^{-n^s}). \tag{5.6}$$

En effet si $q > 0$, $r \geqslant 1/q$ et si $\lambda \in l^{\varphi(-r)}$($\varphi_{(-r)}(x)$ vaut $r^r x^q|\log x|^{-r}$ pour x petit) on a pour n assez grand et pour $\varepsilon > 0$ convenable

$$\varphi_{(-r)}(\varepsilon\lambda_n^\times) \leqslant n^{-1} \leqslant \varphi_{(-r)}(n^{-1/q}\log^{r/q} n).$$

Donc $\lambda_n^\times = O(n^{-1/q}\log^{r/q} n)$. Inversement il est clair que $\lambda \in l^{\varphi(-r)}$ si $\lambda_n^\times = O(n^{-1/q}\log^s n)$ et si $r > sq + 1$.

Si $\lambda \in l^{|\log x|^{-r}}$ on a pour n assez grand et $\varepsilon > 0$ assez petit $|\log \varepsilon\lambda_n^\times|^{-r} \leqslant n^{-1}$, d'où $\varepsilon\lambda_n^\times \leqslant e^{-n^{1/r}}$ et évidemment $\lambda \in l^{|\log x|^{-r}}$ si $r > s$ et $\lambda_n^\times = O(e^{-n^{1/s}})$.

On verra ailleurs que, si $q > 0$, $\bigcup\limits_{r<\infty} l^{x^q|\log x|^{-r}}$ est le "plus petit galbe" qui contienne la suite $(1+n)^{-1/q}$ en ce sens que si E est un espace vectoriel topologique dont le galbe contient cette suite, alors $\bigcup\limits_{r<\infty} l^{x^q|\log x|^{-r}} \subset G(E)$ continûment. On verra aussi que $\bigcup\limits_{r<\infty} l^{|\log x|^{-r}}$ est le plus petit galbe contenant la suite (2^{-n}) (ou même une suite donnée (2^{-n^s}), $s < \infty$).

On verra aussi que les espaces dont le galbe contient la suite (2^{-n}) jouissent de quelques propriétés intéressantes. Par exemple, la méthode de [11] montre que si E est un espace vectoriel topologique complet tel que $(2^{-n}) \in G(E)$ et si (x_n) est une suite de E telle que la série $\sum\limits_0^\infty \varepsilon_n x_n$ converge dès que $\varepsilon_n = 0$ ou 1 pour tout n, alors la serie $\sum\limits_0^\infty t_n x_n$ converge pour toute suite $(t_n) \in l^\infty$. Or S. Rolewicz et C. Ryll-Nardzewski posent dans [11] le problème de savoir s'il existe des espaces métrisables non localement pseudo-convexes ayant cette propriété. La réponse est affirmative: l'espace (métrisable) $\bigcap_{r<\infty} L^{\log^r x}_{(0,1)}$ fournit un exemple puisque son galbe (formule (5.6)) contient (2^{-n}) et ne contient pas l^{0+}. Notons qu'on a donné un autre exemple dans [14].

PROPOSITION 5.2. *Il existe un espace vectoriel topologique E métrisable et non localement pseudo-convexe dans lequel une série $\sum t_n x_n$, t_n scalaire, $x_n \in E$, converge pour tout $(t_n) \in l^\infty$ si on suppose qu'elle converge quand $t_n = 0$ ou 1.*

5.3.

THÉORÈME 5.1. *Soit $0 \leqslant q < 1$ et soit T l'un des espaces mesurés $\mathbf{N}$, $(0,1)$. Alors, pour tout $\lambda \in l^{q+}$ $(=\bigcap_{p>q} l^p)$, il existe un espace métrisable $E = \bigcap_{\varphi\in\Phi} L^\varphi_T$, Φ ensemble dénombrable de fonctions d'Orlicz concaves, non localement q_+-convexe (Définition 1.2) mais tel que $\lambda \in G(E)$.*

Démonstration. Il suffit de trouver une fonction d'Orlicz φ qui satisfasse aux hypothèses de la Proposition 5.1 au voisinage de 0 et telle que

$$\lambda \in \bigcap_{r>0} l^{\varphi(r)} \quad \text{et} \quad \bigcup_{0<r<\infty} l^{\varphi(r)} \subsetneqq l^{q+}.$$

On prendra alors $E = \bigcap_{r>0} l^{\varphi(r)}$ ou $E = \bigcap_{0<r<\infty} L^{\varphi(-r)}_{(0,1)}$, quitte à remplacer les $\varphi_{(r)}$ et $\varphi_{(-r)}$ par des fonctions concaves équivalentes (on peut prendre les r dans un ensemble dénombrable convenable).

On peut supposer que, pour tout n, $0 < \lambda_{1+n} \leqslant \lambda_n$. Il existe $\varepsilon_n > 0$, $\varepsilon_n \to 0$, tel que $\sum \lambda_n^{q+\varepsilon_n} < \infty$. Puis il est à peu près évident qu'il existe une fonction convexe g définie sur $]-\infty, \log\lambda_0]$ telle que, quand $y \to -\infty$, on ait

$$g(y) \to -\infty \quad \text{et} \quad \frac{g(y)}{y} \to 0, \tag{2}$$

$$g(\log\lambda_n) \leqslant \sqrt{\varepsilon_n}\log\lambda_n \tag{3}$$

(prendre une fonction g_0 croissante vérifiant (2) et (3) puis prendre pour g la plus grande fonction convexe minorant g_0). Soit alors

$$\varphi(x) = x^q e^{g(\log x)} \quad \text{pour } 0 < x \leqslant \lambda_0, \ \varphi(0) = 0.$$

D'après (2) φ est croissante et continue en 0 (donc prolongeable en une fonction d'Orlicz), $x = o(\varphi(x))$ quand $x \to 0$, et $\log(\varphi(e^y)) = qy + g(y)$ est convexe au voisinage de $-\infty$: φ vérifie les hypothèses de la Proposition 5.1. $r > 0$ donné, (3) entraîne $rg\left(\frac{1}{r}\log\lambda_n\right) \leqslant \min\{1, r\}\sqrt{\varepsilon_n}\log\lambda_n$, et

donc pour n assez grand $\varphi_{(r)}(\lambda_n) \leqslant \lambda_n^{q+\varepsilon_n}$, d'où $\lambda \in \bigcap_{0<r<\infty} l^{\varphi(r)}$ Grace à (2), $\frac{1}{y}\log(\varphi_{(r)}(e^y)) = q + \frac{r}{y} g\left(\frac{y}{r}\right)$ tend vers q quand $y \to -\infty$ et donc $x^p = o(\varphi_{(r)}(x))$ au voisinage de 0 si $p > q$ et $r > 0$. Donc les $B^{\varphi(r)}_{\mathbf{N}}(M)$, $0 < r < \infty$, $M < \infty$ (§ 1.1), sont des fermés de l^{q+} d'intérieur vide (car sinon la somme de deux d'entre eux serait un voisinage de 0 dans l^{q+}) et leur réunion $\bigcup_{0<r<\infty} l^{\varphi(r)}$ est strictement contenue dans l^{q+}, puisque l^{q+} est métrisable et complet. Cela achève la démonstration.

5.4. Démontrons le lemme suivant.

LEMME 5.1. *Soit $0 \leqslant q < 1$ et soit φ une fonction d'Orlicz telle que $\varphi(x) = o(x^q)$ quand $x \to 0$. Alors il existe une fonction d'Orlicz ψ équivalente à une fonction concave telle que $\log(\psi(e^y))$ soit convexe (resp. concave) au voisinage de $-\infty$ (resp. de $+\infty$) et telle que pour tout $r > 0$ (resp. $r < 0$)*

$$\varphi(x) = o(\psi_{(r)}(x)) \quad \text{et} \quad \psi_{(r)}(x) = o(x^q) \quad \text{quand } x \to 0. \tag{4}$$

Démonstration. Quitte à majorer φ, supposons que $x \leqslant \varphi(x)$. $\log(\varphi(e^y)) - qy \to -\infty$ avec y. Il est alors à peu près évident qu'il existe une fonction convexe $g(y)$, $y \leqslant 0$, telle que, quand $y \to -\infty$, on ait

$$g(y) \to -\infty \quad \text{et} \quad g(y) = o[\log(\varphi(e^y)) - qy]. \tag{5}$$

Prendre en effet une fonction $g_0(y) \leqslant -1$ croissante et vérifiant (5), puis majorer $g_0(y)$ par $g_1(y) = \sup_{0<u\leqslant 1} \frac{[g_0(uy)]}{u}$: $g_1(y) \to -\infty$ avec y car $g_1(y) \leqslant \sup\{-\sqrt{|y|}, g_0(-\sqrt{|y|})\}$, donc g_1 vérifie (5) et équivaut à une fonction convexe g puisque $g_1(y)/y$ croît avec y. Posons alors

$$\psi(x) = x^q e^{g(\log x)} \text{ pour } 0 < x \leqslant 1, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi(x) = xe^{g(0)} \text{ pour } x > 1.$$

$\log(\psi(e^y)) = qy + g(y)$ est convexe pour $y \leqslant 0$; d'après (5) ψ est croissante et continue en 0. Si $r > 0$, $\psi_{(r)}(x) = x^q e^{rg\left(\frac{1}{r}\log x\right)}$ est, pour $x \to 0$, infiniment petit par rapport à x^q et infiniment grand par rapport à $\varphi(x)$ puisque, quand $x \to 0$, $\log\psi_{(r)}(x)/\varphi(x)$ est de l'ordre de $q\log x - \log(\varphi(x))$ ((5) et convexité de g) et donc tend vers $+\infty$. Puisque $\varphi(x) \geqslant x$, ψ équivaut à une fonction concave au voisinage de 0 (Proposition 5.1) et en fait partout.

$\psi_{(-1)}$ est une fonction d'Orlicz parce que ψ n'est pas bornée, et satisfait à la partie du lemme relative aux y voisins de $+\infty$.

THÉORÈME 5.2. *Soit T l'un des espaces mesurés $\mathbf{N}$, $(0,1)$. Soit $0 \leqslant q < 1$. l^0 désigne l'espace vectoriel des suites à support fini. Alors, pour tout $\lambda \notin l^q$, il existe un espace métrisable $E = \bigcap_{\varphi\in\Phi} L^\varphi_T$, φ fonctions d'Orlicz concaves, tel que $\lambda \notin G(E) \supsetneqq l^q$.*

Démonstration. Il existe une fonction d'Orlicz φ telle que $\varphi(x) = o(x^q)$ quand $x \to 0$ et $\lambda \notin l^\varphi$. En effet, si $\varepsilon_k > \varepsilon_{k+1} \to 0$, avec $\varepsilon_1 = \infty$, si la somme des $|\lambda_n|^q \in [\varepsilon_{k+1}, \varepsilon_k]$ majore k^2 pour tout $k \geqslant 1$, il suffit de poser $\varphi(x) = x^q/k$ quand $\varepsilon_{k+1} \leqslant x < \varepsilon_k$. Soit alors ψ une fonction d'Orlicz vérifiant avec φ les conditions du Lemme 5.1 et posons

$$E = \bigcap_{r>0} l^{\psi(r)} \quad [\text{resp. } E = \bigcap_{0<r<\infty} L^{\psi(-r)}_{(0,1)}].$$

D'après la Proposition 5.1, on a

$$G(E) = \bigcap_{r>0} l^{\psi(r)} \quad [\text{resp. } G(E) = \bigcup_{0<r<\infty} l^{\psi(r)}].$$

Comme $l^q \subset l^{\psi(r)}$ (continûment) pour tout r et que cette inclusion est stricte (par (4)), $l^q \subset G(E)$ continûment et $l^q \neq G(E)$ (appliquer par exemple le théorème du graphe fermé). Et $\lambda \notin G(E)$ puisque, d'après (4), $G(E) \subset l^\varphi$ et $\lambda \notin l^\varphi$.

§ 6. INTERSECTIONS NON DÉNOMBRABLES D'ESPACES D'ORLICZ

On rappelle ([15]; Définition 3) qu'un ensemble B de suites scalaires sur $\boldsymbol{N}$ est dit uniformément φ-sommable quand il est borné dans l^∞ et que $\sum_{|\lambda_n| \leqslant \varepsilon} \varphi(|\lambda_n|) \to 0$ avec $\varepsilon > 0$ uniformément pour $\lambda \in B$.

Théorème 6.1. *Soit σ une fonction d'Orlicz non bornée équivalente à une fonction concave et surmultiplicative au voisinage de ∞ (par exemple, $\sigma(x) = x^p$, $0 < p \leqslant 1$). Soit Φ l'ensemble des fonctions d'Orlicz concaves φ telles que $\varphi(x) = o(\sigma(x))$ quand $x \to \infty$. Alors $\bigcap_{\varphi \in \Phi} L^\varphi_{(0,1)} = L^\sigma_{(0,1)}$ (comme ensembles, mais avec des topologies différentes),*

$$G\Big(\bigcap_{\varphi \in \Phi} L^\varphi_{(0,1)}\Big) = l^{\sigma(-1)}$$

où $\sigma_{(-1)}(x) = 1/\sigma(1/x)$, et un filtre invariant par homothétie non nulle tend vers 0 dans ce galbe si et seulement s'il est porté par un ensemble uniformément $\sigma_{(-1)}$-sommable.

Démonstration. Soit Φ_0 (resp. Ω) l'ensemble des fonctions de Φ non bornées (resp. non bornées et équivalentes à des fonctions sur-multiplicatives au voisinage de ∞). Ω est cofinal dans Φ (Lemme 4.1), donc $\bigcap_{\varphi \in \Phi} L^\varphi_{(0,1)}$ et $\bigcap_{\omega \in \Omega} L^\omega_{(0,1)}$ (resp. $\bigcup_{\varphi \in \Phi_0} l^{\varphi(-1)}$ et $\bigcup_{\omega \in \Omega} l^{\omega(-1)}$) sont égaux avec même topologie (resp. avec même structure à convergence). Par suite (Proposition 2.1), $G\big(\bigcap_{\varphi \in \Phi} L^\varphi_{(0,1)}\big) = \bigcup_{\varphi \in \Phi_0} l^{\varphi(-1)}$ bicontinûment, ce qu'il fallait démontrer (cf. Proposition 3 de [15]; que L^σ soit l'intersection des L^φ se vérifie facilement).

Corollaire 6.1. *Si $0 < p \leqslant 1$, il existe un espace vectoriel topologique E non localement p-convexe dont le galbe, en tant qu'ensemble, est égal à l^p (autrement dit, pour tout U et pour tout $\lambda \in l^p$ il existe V tel que $\sum' \lambda_n V \subset U$, U et V voisinages de 0 dans E).*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition à $\sigma(x) = x^p$.

Le fait que $L^p_{(0,1)}$, muni de la topologie donnée par le théorème (quand $\sigma(x) = x^p$) possède la propriété du corollaire a été conjecturé par L. Waelbroeck (communication orale).

Théorème 6.2. *Soit $0 \leqslant p < 1$ et soit Φ^p l'ensemble de toutes les fonctions d'Orlicz concaves φ telles que $\varphi(x) = o(x^p)$ quand $x \to 0$. Alors*

$$G\Big(\bigcap_{\varphi \in \Phi^p} l^\varphi\Big) = \bigcap_{\varphi \in \Phi^p} l^\varphi \quad \text{bicontinûment.}$$

Quand $p = 0$ cela signifie ((1.3)) que $G(l_t^0) = l_t^0$ bicontinûment. Notons que, quand $p > 0$, $\bigcap_{\varphi \in \Phi^p} l^\varphi$ est l'espace l^p muni d'une topologie strictement moins fine que sa topologie usuelle.

Démonstration. Pour tout $\varphi \in \Phi^p$, il existe une fonction d'Orlicz ψ telle que $\log(\psi(e^y))$ soit convexe au voisinage de $-\infty$, équivalente à une fonction appartenant à Φ^p et telle que $\varphi(x) = O(\psi(x))$ quand $x \to 0$ (Lemme 5.1). Alors (formule (5.2)),

$$l^{\psi(1/2)} = l^{\psi|0\psi(1/2)} \subset l^{\varphi|0\psi(1/2)} \quad \text{continûment,}$$

or, évidemment, $\psi_{(1/2)}$ équivaut à une fonction de Φ^p et $\psi_{(1/2)} \in \Phi^p_\varphi$ (notation du Théorème 2.2). Donc

$$E = \bigcap_{\varphi \in \Phi^p} l^\varphi \subset \bigcap_{\varphi \in \Phi^p} \bigcup_{\psi \in \Phi^p_\varphi} l^{\varphi|0\psi} \quad \text{continûment.}$$

Autrement dit (Théorème 2.2) $E \subset G(E)$ continûment, et l'inclusion inverse résulte du Corollaire 2.4.

Conclusion. On voit que, contrairement au cas des espaces métrisables dont le galbe contient une suite $\lambda_n > 0$ ([13]; Corollaire 3), la structure à convergence du galbe d'un espace vectoriel topologique quelconque n'est pas déterminée par l'ensemble sousjacent au galbe: si ϱ est une fonction d'Orlicz sous-multiplicative et sous-additive au voisinage de 0, l^ϱ muni de sa topologie usuelle est un galbe (Proposition 4.2); il existe sur l^ϱ une convergence de galbe (associée à une bornologie) strictement plus fine que la topologie usuelle de l^ϱ (Théorème 6.1) et, si $\varrho(x) = x^p$ avec $p < 1$, une convergence de galbe (associée à une topologie) strictement moins fine (Théorème 6.2). On a donné d'autres exemples dans [12] et [13].

§ 7. APPLICATIONS LINÉAIRES D'UN ESPACE D'ORLICZ DANS UN ESPACE VECTORIEL TOPOLOGIQUE

7.1.

THÉORÈME 7.1. *Soit T un espace mesuré sans atome et soit φ une fonction d'Orlicz telle que $\varphi|_0^\infty\varphi(2)<\infty$ (φ concave, par exemple). Supposons qu'il existe une application linéaire continue non nulle de L_T^φ dans un espace vectoriel topologique séparé E. Alors, si φ est bornée*

$$G(E)=l_b^0 \quad \textit{bicontinûment},$$

et si φ n'est pas bornée

$$G(E)\subset l^{\varphi(-1)} \quad \textit{continûment}$$

où $\varphi_{(-1)}(x)=1/\varphi(1/x)$.

Démonstration. Soit α un filtre de $G(E)$ invariant par homothétie non nulle et tendant vers 0 dans $G(E)$. Il existe une fonction caractéristique $I_{S_0}\in L_T^\varphi$ telle que $f(I_{S_0})\neq 0$ puisque l'ensemble des I_S est total dans L_T^φ. Puis il existe $A\in\alpha$ et $\varepsilon_0>0$ tels que (B_T^φ est défini dans le § 1.1)

$$I_{S_0}\notin\bigcup_{\lambda\in A}\sum{}'\lambda_n B_T^\varphi(\varepsilon_0)$$

ce qui ([15]; formule (6)) implique

$$A\subset B_N^{\varphi(-1)}(|S_0|/\varepsilon_0), \tag{6}$$

$|S_0|$ mesure de S_0. Cela entraîne que α tend vers 0 dans l_b^0 si φ est bornée et donc dans ce cas $G(F)=l_b^0$ bicontinûment.

Supposons φ non bornée et terminons la démonstration (ce qui n'est pas trivial quand $l^{\varphi(-1)}$ n'est pas localement borné).

Observons (cf. Définition 1.1) que si $\tilde A$ est l'ensemble des suites scalaires de la forme $(t_n\mu_{i(n)})_{n\geqslant 0}$, $(\mu_n)\in A$, i injection $N\to N$, $|t_n|\leqslant 1$, la base de filtre des $\tilde A$, $A\in\alpha$, tend vers 0 dans $G(E)$. Il s'ensuit que la base de filtre des $C_A=\bigcup_{\lambda\in\tilde A}\sum{}'\lambda_n A^{\sim}$, $A\in\alpha$, tend vers 0 dans $G(E)$. En effet si U, V, W sont des voisinages de 0 de E tels que, pour tout $\lambda\in\tilde A$, $\sum{}'\lambda_n\ V\subset U$ et $\sum{}'\lambda_n W\subset V$ on voit que $\sum{}'\lambda_n W\subset U$ pour tout $\lambda\in C_A$.

Supposons alors qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que $B_N^{\varphi(-1)}(\varepsilon)$ n'absorbe aucun $A\in\alpha$. Soit $A\in\alpha$ et soit un entier $K<\infty$. Il existe $(\lambda_k)\in\tilde A$ tel que $\lambda_k>0$ pour tout $k<K$. Il existe, pour $k<K$, des $\mu^k\in\tilde A$ à supports finis et deux à deux disjoints tels que $\lambda_k\mu^k\notin B_N^{\varphi(-1)}(\varepsilon)$. Alors $\sum_{k<K}\lambda_k\mu^k\notin B_N^{\varphi(-1)}(K\varepsilon)$, donc $C_A\not\subset B_N^{\varphi(-1)}(K\varepsilon)$. Comme K et $A\in\alpha$ sont arbitraires, cela, d'après (6), contredit la convergence des C_A. Donc α, étant invariant par homothétie non nulle, tend vers 0 pour la topologie de $l^{\varphi(-1)}$.

COROLLAIRE 7.1. Soit T un espace mesuré sans atome, soit Φ un ensemble filtrant de fonctions d'Orlicz non bornées tel que pour tout $\varphi\in\Phi$

il existe $\psi\in\Phi$ rendant $\varphi|_0^\infty\psi$ partout finie (par exemple un ensemble de fonctions concaves). Alors, s'il existe une application linéaire non nulle f de $\bigcap_{\varphi\in\Phi}L_T^\varphi$ dans un espace vectoriel topologique E séparé, $G(E)\subset\bigcup_{\varphi\in\Phi}l^{\varphi(-1)}$ et si un filtre tend vers 0 dans $G(E)$, il admet une base tendant vers 0 dans l'un des $l^{\varphi(-1)}$ (pour la topologie induite par $l^{*\varphi(-1)}$).

Démonstration. Si K_T^φ est le plus grand sous-espace vectoriel de L_T^φ, $\bigcap_{\varphi\in\Phi}L_T^\varphi=\bigcap_{\varphi\in\Phi}K_T^\varphi$ et f se prolonge en une application linéaire non nulle de l'un des K_T^φ dans E. La démonstration du théorème montre alors que $G(E)\subset l^{*\varphi(-1)}$ continûment. Et on termine en remarquant que $\bigcup_\varphi l^{*\varphi(-1)}=\bigcup_\varphi l^{\varphi(-1)}$.

7.2. S. Rolewicz [10] a déterminé à quelle condition $L_{(0,1)}^\varphi$ admet une forme linéaire continue non nulle (autres références dans [15]; voir aussi dans [1] une étude du dual de L_R^φ). Plus généralement, étant donné un ensemble Ω de fonctions d'Orlicz équivalentes à des fonctions concaves, supposons l'ensemble Φ du Corollaire 7.1 fini ou dénombrable et cherchons à quelle condition il existe une application linéaire continue non nulle de $\bigcap_{\varphi\in\Phi}L_{(0,1)}^\varphi$ dans un espace séparé E tel que $\bigcup_{\omega\in\Omega}l^\omega\subset G(E)$.

S'il en est ainsi, chaque l^ω est contenu dans $\bigcup_\varphi l^{\varphi(-1)}$. Les $B_N^{\varphi(-1)}(M)\cap l^\omega$, $\varphi\in\Phi$, $M<\infty$, sont des fermés de l^ω et recouvrent l^ω: il existe $\varphi\in\Phi$ tel que $l^\omega\subset l^{*\varphi(-1)}$, donc tel que $L_{(0,1)}^{*\varphi}\subset L_{(0,1)}^{\omega(-1)}$. Par suite

$$\bigcap_{\varphi\in\Phi}L_{(0,1)}^\varphi\subset\bigcap_{\omega\in\Omega}L_{(0,1)}^{\omega(-1)}. \tag{7.1}$$

Réciproquement, si cette inclusion a lieu elle est continue (théorème du graphe fermé) et donc la réciproque est vraie si le galbe de $\bigcap_{\omega\in\Omega}L_{(0,1)}^{\omega(-1)}$ est $\bigcup_\omega l^\omega$: par exemple quand Ω est un ensemble filtrant de fonctions sous-multiplicatives (Proposition 2.1), ou quand $\Omega=\{\omega(x^{1/r})^r|0<r<\infty\}$ où $\log(\omega(e^y))$ est convexe au voisinage de $-\infty$ (Proposition 5.1). On obtient en particulier le corollaire suivant.

COROLLAIRE 7.2. *Supposons l'ensemble Φ du Corollaire 7.1 fini ou dénombrable. Alors il existe une application linéaire continue non nulle de $\bigcap_{\varphi\in\Phi}L_{(0,1)}^\varphi$ dans un espace séparé localement p-convexe, $0<p\leqslant 1$ [resp. dont le galbe contient le "galbe exponentiel" $\bigcup_{r<\infty}l^{|\log x|^{-r}}$ (formules (5.4) et (5.6))] si et seulement si*

$$\bigcap_{\varphi\in\Phi}L_{(0,1)}^\varphi\subset L_{(0,1)}^p \quad [\textit{resp.}\ \bigcap_{\varphi\in\Phi}L_{(0,1)}^\varphi\subset\bigcap_{r<\infty}L_{(0,1)}^{\log^r x}].$$

7.3. Quand F est un quotient de L_T^φ par un sous-espace fermé strict on déduit du Théorème 7.1 et de la Proposition 1.2 que $G(F)$ est l_b^0 si φ

est bornée et sinon que

$$G(L_T^\varphi) \subset G(F) \subset l^{\varphi(-1)} \quad \text{continûment.} \tag{7.2}$$

De même si F est un quotient de $\bigcap_\varphi L_T^\varphi$ (Corollaire 7.1). Donc, si φ, non bornée, équivaut à une fonction concave et est sur-multiplicative au voisinage de ∞ [resp. et si $\log(\varphi(e^y))$ est concave au voisinage de ∞], si N est un sous-espace fermé strict de $L_{(0,1)}^\varphi$ (resp. de $\bigcap_{0<r<\infty} L_{(0,1)}^{\varphi(r)}$ où $\varphi_{(r)}(x) = \varphi(x^{1/r})^r$ pour $r \neq 0$), alors (Propositions 4.1 et 5.1) on a, bicontinûment,

$$G(L_{(0,1)}^\varphi/N) = l^{\varphi(-1)} \quad \Big(\text{resp. } G\big[\bigcap_{0<r<\infty} L_{(0,1)}^{\varphi(r)}/N\big] = \bigcup_{0<r<\infty} l^{\varphi(-r)}\Big). \tag{7.3}$$

Par exemple, si $0 < p \leqslant 1$, on a, bicontinûment,

$$G(L_{(0,1)}^p/N) = l^p, \qquad G\big[\bigcap_{r<\infty} L_{(0,1)}^{\log^r x}/N\big] = \bigcup_{r<\infty} l^{|\log x|^{-r}}. \tag{7.4}$$

7.4. La partie du Théorème 7.1 relative au cas où φ est bornée peut être améliorée par la remarque suivante.

PROPOSITION 7.1. *Soient T un espace mesuré sans atome, φ une fonction d'Orlicz bornée telle que $\varphi|_0\varphi(2) < \infty$, f une application linéaire continue de L_T^φ dans un espace vectoriel topologique E. Alors pour tout voisinage V de 0 dans L_T^φ l'espace vectoriel engendré par $\bigcap_{a>0} af(V)$ est dense dans $f(L_T^\varphi)$.*

Démonstration. Si U est un voisinage de 0 dans L_T^φ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f\big(\bigcap_{a>0} aB_T^\varphi(\varepsilon)\big) \subset \bigcap_{a>0} af(V)$. Or $\bigcap_{a>0} aB_T^\varphi(\varepsilon)$ est l'ensemble des fonctions de L_T^φ nulles en dehors d'un ensemble de mesure au plus égale à $\varepsilon/\sup_x \varphi(x)$. Donc l'espace vectoriel engendré par $\bigcap_{a>0} aB_T^\varphi(\varepsilon)$ est l'ensemble des fonctions nulles en dehors d'un ensemble de mesure finie (car T est sans atome) et est donc dense dans L_T^φ. Cela achève la démonstration.

La Proposition 7.1 montre par exemple qu'une application linéaire continue f de L_T^φ dans un espace vectoriel topologique séparé E est nulle si E admet un système fondamental de voisinages de l'origine U_i tels que, pour tout i, $\bigcap_{a>0} aU_i$ soit un espace vectoriel. E a cette propriété si $G(E)$ n'est pas l_0^0, ou encore si E est un $L_T^{*\psi}$, ψ non bornée. f sera nulle, également, si elle envoie un voisinage de 0 de L_T^φ sur un ensemble (d'un espace E quelconque) ne contenant aucun sous-espace vectoriel non nul.

Références

[1] S. Cater, *On a class of metric linear spaces which are not locally convex*, Math. Ann. 157 (1964), p. 210–214.

[2] H. R. Fischer *Limes Räume* Math. Ann. 137 (1959), p. 269–303.

[3] A. Frölicher et W. Bucher *Calculus in vector spaces without norm*, Berlin Heidelberg New York, 1966.

[4] B. Gramsch, *Die Klasse metrischer linearer Räume $\mathscr{L}_\Phi$*, Math. Ann. 171 (1967), p. 61–78.

[5] T. Itô, *A generalization of Mazur–Orlicz theorem on function spaces*, J. Fac. Sci Hokkaïdo Univ. Ser I 15 (1961), p. 221–232.

[6] G. Köthe, *Topological vector spaces I*, Berlin Heidelberg New York 1969.

[7] W. Matuszewska et W. Orlicz, *A note on the theory of s-normed spaces of φ-integrable functions*, Studia Math. 21 (1961), p. 107–115.

[8] S. Mazur et W. Orlicz, *On some classes of linear spaces*, Studia Math. 17 (1958), p. 97–119.

[9] S. Rolewicz, *On a certain class of linear metric spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. 5 (1957), p. 471–473.

[10] — *Some remarks on the spaces $N(L)$ and $N(l)$*, Studia Math. 18 (1959), p. 1–9.

[11] — et C. Ryll-Nardzewski, *On unconditional convergence in linear metric spaces*, Colloq. Math. 17 (1967), p. 327–331.

[12] P. Turpin, *Généralisation d'un théorème de S. Mazur et W. Orlicz*, C. R. Acad. Sci. Paris 273 (1971), p. 457–460.

[13] — *Variantes de résultats de S. Mazur et W. Orlicz et convexités généralisées*, C. R. Acad. Sci. Paris 273 (1971), p. 506–509.

[14] — *Sur un problème de S. Simons concernant les bornés des espaces vectoriels topologiques*, Colloque d'analyse fonctionnelle de Bordeaux, à paraître dans Bull. Soc. Math. France (Mémoires).

[15] — *Opérateurs linéaires entre espaces d'Orlicz non localement convexes*, Studia Math., ce volume, p. 153-165.

[16] L. Waelbroeck, *Topological vector spaces and algebras*, Berlin Heidelberg New York, 1971.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

Received April 7, 1972 (512)