STUDIA MATHEMATICA, T. XLVI. (1973)

Opérateurs linéaires entre espaces d'Orlicz non localement convexes

par

PHILIPPE TURPIN (Orsay, France)

Sommaire. Etant donnés deux espaces d'Orlicz L^φ et L^ψ relatifs à une mesure sans atome, avec φ concave et $\psi(2x)/\psi(x)$ borné, on détermine à quelle condition il existe une application linéaire continue non nulle de L^ψ dans L^φ. On examine aussi les cas des applications envoyant un voisinage de 0 de L^ψ sur un ensemble borné, ou relativement compact, de L^φ. On trouve par exemple que (quand la mesure est bornée) il n'existe un opérateur linéaire non nul de L^φ dans L^φ envoyant un voisinage de 0 sur un ensemble borné (resp. relativement compact) que si L^φ est localement borné (resp. que si $L^\varphi = L^1$).

Les principaux résultats de cet article concernent les applications linéaires d'un espace d'Orlicz ([8]) L^ψ dans un espace d'Orlicz L^φ, ces espaces étant relatifs à une mesure μ positive sans atome. On suppose que φ est concave et que $\psi(2x)/\psi(x)$ est bornée. Précisons d'abord que nous disons qu'un borné K de L^φ est uniformément φ-sommable (Définition 3) quand l'intégrale $\int \varphi(|f(t)|)\,d\mu$ étendue à l'ensemble des t tels que $|f(t)| \notin]\varepsilon, 1/\varepsilon[$ tend vers 0 avec ε uniformément quand $f \in K$. Tout ensemble relativement compact de L^φ est uniformément φ-sommable (Proposition 3).

On démontre alors que pour qu'il existe une application linéaire non nulle de L^ψ dans L^φ qui (respectivement) a) soit continue, b) envoie l'un des voisinages de 0 de L^ψ sur un borné de L^φ, c) envoie l'un des voisinages de 0 de L^ψ sur un ensemble uniformément φ-sommable, il faut et il suffit que (respectivement) a') $\varphi(x) = O(\psi(x))$ quand $x \to \infty$, b') $\limsup_{x\to\infty} \frac{\varphi(ux)}{\psi(x)} \to 0$ quand $u \to 0$, c') $\varphi(x) = o(\psi(x))$ quand $x \to \infty$ en supposant $\varphi(x) = o(x)$ (Théorèmes 1, 2, 3 et relation (3)). Si μ est bornée ces conditions équivalent à ce que $L^\psi \subset L^\varphi$, l'injection canonique vérifiant respectivement a), b), c).

Si $L^\varphi = L^1$, a) revient à dire que L^ψ admet une forme linéaire continue non nulle: l'équivalence de a) et a') est donc bien connue dans ce cas ([10], puis [7] où on donne un résultat plus général, puis [2] et [3]).

En faisant $\varphi = \psi$ et en supposant μ bornée on voit que L^φ n'admet un opérateur linéaire non nul $L^\varphi \to L^\varphi$ envoyant un voisinage de 0 sur un borné (resp. sur un ensemble relativement compact, ou même uniformément φ-sommable) que si L^φ est localement borné (resp. que si $L^\varphi = L^1$).

On améliore ainsi un résultat de [3], à savoir que tout opérateur linéaire compact de L^φ est quasi-nilpotent si $L^\varphi \neq L^1$, et de [9], où l'on démontre que, sous une hypothèse impliquant que L^φ n'est pas localement borné, tout opérateur linéaire compact de L^φ est nul.

Ces résultats reposent sur l'examen du comportement de la base de filtre des $\bigcup_{N\geqslant 0} \sum_0^N \lambda_n U$, U voisinage de 0 de L^φ, (λ_n) suite scalaire donnée, notamment pour la topologie de L^θ, $\theta(x) = \inf\{x, 1\}$ (proposition 2). On termine l'article en étudiant le comportement de cette base de filtre dans un L^φ arbitraire contenant L^ψ, ce qui constitue en fait une introduction à [11] (théorème 4).

Les résultats ci-dessus sont donnés dans le paragraphe 2. Le paragraphe 1 contient divers préliminaires, que l'on utilisera encore dans [11].

§ 1

1.1 Soient φ et ψ des fonctions d'une variable $x \geqslant 0$, à valeurs dans $[0, \infty]$, croissantes, définies au voisinage de 0 et nulles en 0 (resp. définies au voisinage de ∞).

On dit que φ et ψ sont équivalentes (ou que φ équivaut à ψ) au voisinage de 0 (resp de ∞) quand il existe des constantes finies $m > 0$ et $u > 0$ telles qu'on ait, au voisinage de 0 (resp de ∞),

$$m\varphi(ux) \leqslant \psi(x) \leqslant \frac{1}{m}\varphi\left(\frac{x}{u}\right). \tag{1}$$

Quand φ et ψ sont définies sur $[0, \infty[$ on dit qu'elles sont équivalentes quand elles le sont au voisinage de 0 et de ∞. Si φ équivaut à ψ au voisinage de 0 (resp de ∞) et si $\psi(2x) = O(\psi(x))$ au voisinage de 0 (resp de ∞) (par exemple si ψ est concave), alors il en est de même de φ, et (1) est vérifié (pour m convenable) avec $u = 1$. La proposition suivante est bien connue.

Proposition 1. *Supposons φ partout finie. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(i) *φ équivaut au voisinage de 0 (resp de ∞) à une fonction concave g définie sur $[0, \infty[$, nulle en 0 (et partout finie).*

(ii) *Il existe $M < \infty$ tel que pour tous x, y voisins de 0 (resp. de ∞) on ait*

$$0 < x \leqslant y \Rightarrow \frac{\varphi(y)}{y} \leqslant M\frac{\varphi(x)}{x}.$$

(iii) *Il existe $M' < \infty$ tel que pour toute suite finie de nombres $x_i \geqslant 0$ appartenant ainsi que leur somme à un voisinage X de 0 (resp. de ∞) on ait*

$$\varphi\Big(\sum_i x_i\Big) \leqslant M' \sum_i \varphi(x_i)$$

Démonstration. (i) implique (ii) car (ii) est vérifié par g (avec $M = 1$). (ii) implique (iii), avec $M' = M$. En effet, on se ramène au cas (facile) où $M = 1$ en posant $\varphi_1(x) = \inf_{0<u\leqslant 1} \frac{\varphi(ux)}{u}$ (resp. $\sup_{u\geqslant 1} \frac{\varphi(ux)}{u}$): au voisinage de 0 (resp. de ∞) $\varphi \geqslant \varphi_1 \geqslant \frac{\varphi}{M}$ (resp. $\varphi_1 \geqslant \varphi \geqslant \frac{\varphi_1}{M}$) et $\frac{\varphi_1(x)}{x}$ est décroissant. Enfin si φ vérifie (iii) la plus petite fonction concave majorant φ sur X, soit g_0, vérifie sur X $\varphi(x) \leqslant g_0(x) \leqslant 2M'\varphi(x)$ car, suivant [1], on voit que $g_0(x) = \sup_h \int_0^1 \varphi(h(t))\,dt$, où h parcourt l'ensemble des fonctions mesurables $(0, 1) \to X$ telles que $\int_0^1 h(t)\,dt = x$. En effet, étant donnés x_1, x_2 dans X et $\lambda \in]0, 1[$, si $\int_0^1 h_i(t)\,dt = x_i$, $i = 1, 2$, et si $h_3(t)$ vaut $h_1\left(\frac{t}{\lambda}\right)$ pour $0 \leqslant t < \lambda$ et $h_2\left(\frac{t-\lambda}{1-\lambda}\right)$ pour $\lambda \leqslant t \leqslant 1$, on a

$$\int_0^1 h_3(t)\,dt = \lambda x + (1-\lambda)y$$

$$\int_0^1 \varphi(h_3(t))\,dt = \lambda\int_0^1 \varphi(h_1(t))\,dt + (1-\lambda)\int_0^1 \varphi(h_2(t))\,dt.$$

Donc g_0 est concave sur X et si $0 < x \in X$ et $\int_0^1 h(t)\,dt = x$,

$$\varphi(h(t)) \leqslant M'\left(1 + \frac{h(t)}{x}\right)\varphi(x),$$

d'où $g_0(x) \leqslant 2M'\varphi(x)$. g_0 est la restriction (resp. équivaut au voisinage de ∞) à une fonction g concave sur $[0, \infty[$, nulle en 0.

Définition 1. Soient φ et ψ des applications croissantes de $[0, \infty[$ dans $[0, \infty[$ nulles en 0 et seulement en 0. On pose pour $0 \leqslant u < \infty$

$$\varphi|_0\psi(u) = \sup_{0<x\leqslant 1} \frac{\varphi(ux)}{\psi(x)},$$

$$\varphi|^\infty\psi(u) = \sup_{1\leqslant x<\infty} \frac{\varphi(x)}{\psi\left(\frac{x}{u}\right)} \quad \text{si } u > 0, \quad \varphi|^\infty\psi(0) = 0,$$

$$\varphi|_0^\infty\psi(u) = \sup_{0<x<\infty} \frac{\varphi(ux)}{\psi(x)},$$

$$\varphi_{(-1)}(x) = \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{x}\right)} \quad \text{si } x > 0, \quad \varphi_{(-1)}(0) = 0.$$

Ces fonctions de u sont des applications croissantes de $[0, \infty[$ dans $[0, \infty]$ (dans $[0, \infty[$ en ce qui concerne $\varphi_{(-1)}$) nulles en 0 et seulement en 0. Remarquons que $\varphi_{(-1)} = \theta|^\infty\varphi$ si $\theta(x) = \inf\{x, 1\}$, que $\varphi_{(-1)(-1)} = \varphi$. On a

(2) $$\varphi|^\infty\psi = \psi_{(-1)}|_0\varphi_{(-1)}, \qquad \varphi|_0^\infty\psi = \psi_{(-1)}|_0^\infty\varphi_{(-1)}.$$

Notons $|$ le signe $|_0^\infty$ (resp. $|_0$, $|^\infty$). Pour que $\varphi|\psi(u) < \infty$, u donné, il faut et il suffit que $\varphi(ux) = O(\psi(x))$ au voisinage de 0 et de ∞ (resp. de 0 de ∞). Par exemple dire que $\varphi|\varphi(2) < \infty$ (ce qui implique $\varphi|\varphi$ fini partout) c'est dire que φ vérifie la condition Δ_2 (resp. au voisinage de 0, de ∞). $\varphi|\varphi(2) < \infty$ si φ est concave. En posant $h(0+) = \lim\limits_{\substack{u\to 0\\ u>0}} h(u)$, φ équivaut à ψ (resp. au voisinage de 0, de ∞) si et seulement si $\varphi|\psi(0+) < \infty$ et $\psi|\varphi(0+) < \infty$. Si φ et ψ équivalent respectivement à φ_1 et ψ_1 (resp. au voisinage de 0, de ∞), alors $\varphi|\psi$ équivaut à $\varphi_1|\psi_1$ (resp. au voisinage de 0). Si $\varphi|\varphi(2) < \infty$ et $\psi|\psi(2) < \infty$, ou bien $\varphi|\psi(0+) = \infty$, ou bien $\varphi|\psi$ est partout fini et vérifie la condition Δ_2 (resp. et vérifie la condition Δ_2 au voisinage de 0). Si φ et ψ sont concaves (resp. au voisinage de 0, de ∞) alors $\varphi|\psi$ équivaut à une fonction concave (resp. au voisinage de 0) (observer que $\varphi|\psi$ vérifie la condition (ii) de la Proposition 1).

Pour que φ vérifie la condition Δ_2 (resp. équivaille à une fonction concave) au voisinage de ∞ il faut et il suffit qu'il en soit ainsi de $\varphi_{(-1)}$ au voisinage de 0.

Si, comme ci-dessus, $|$ signifie $|_0^\infty$ (resp. $|_0$, $|^\infty$) on a

(3) $$\varphi|\psi(0+) = \inf_{u>0}\lim_{x}\sup \frac{\varphi(ux)}{\psi(x)},$$

la limite supérieure étant prise au voisinage de 0 et de ∞ (resp. de 0, de ∞).

En effet si, par exemple, $a > b = \inf\limits_{u>0}\limsup\limits_{x\to 0} \frac{\varphi(ux)}{\psi(x)}$, il existe $u_0 > 0$ et $x_0 \in]0, 1]$ tels que $a \geqslant \sup\limits_{0<x\leqslant x_0} \frac{\varphi(u_0 x)}{\psi(x)}$. Alors si

$$u \leqslant u_0 x_0 \text{ et } x \leqslant 1, \qquad \frac{\varphi(ux)}{\psi(x)} \leqslant \frac{\varphi(u_0 x x_0)}{\psi(x x_0)} \leqslant a$$

et donc

$$\varphi|_0\psi(u) \leqslant a \text{ et } \varphi|_0\psi(0+) \leqslant b.$$

L'inégalité inverse est évidente.

Enfin, si $\sup\{u, v\} \leqslant 1$ quand $|$ signifie $|_0$ ou $|^\infty$, et pour tous u, v quand $|$ signifie $|_0^\infty$, on a

(4) $$\varphi_1|\varphi_3(uv) \leqslant \varphi_1|\varphi_2(u)\varphi_2|\varphi_3(v).$$

En effet on se ramène par (2) au cas où $|$ signifie $|_0$ ou $|_0^\infty$ et, si $v > 0$,

$$\frac{\varphi_1(uvx)}{\varphi_3(x)} = \frac{\varphi_1(uvx)}{\varphi_2(vx)}\,\frac{\varphi_2(vx)}{\varphi_3(x)} \leqslant \varphi_1|\varphi_2(u)\varphi_2|\varphi_3(v).$$

DÉFINITION 2. Une fonction d'Orlicz est une *application croissante* de $[0, \infty[$ dans $[0, \infty[$, nulle en 0 et seulement en 0, continue en 0.

Par exemple les fonctions $\varphi|\psi$ sont des fonctions d'Orlicz quand elles sont finies partout et continues en $0 \cdot \varphi_{(-1)}$ est une fonction d'Orlicz si et seulement si φ n'est pas bornée.

Toute fonction d'Orlicz φ équivaut à une fonction d'Orlicz continue, par exemple à une fonction continue croissante égale à φ sur les points 2^n, $-\infty < n < \infty$, n entier.

1.2. T désigne dans la suite un espace mesuré par une mesure positive dt définie sur une tribu de parties de T. $\boldsymbol{N}$ désignera l'ensemble des entiers positifs ou nuls muni de la mesure cardinale. Si $S \subset T$ est mesurable, $|S|$ désignera la mesure de S, I_S la fonction caractéristique de S. Une fonction simple est une combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables et de mesures finies. Soit M_T l'espace vectoriel de toutes les fonctions scalaires mesurables sur T "définies à une fonction nulle presque partout près", presque partout finies. Si φ est une application croissante de $[0, \infty[$ dans $[0, \infty]$ posons, pour $0 < a \leqslant \infty$, en écrivant $\varphi(|f|)$ au lieu de $\varphi\circ|f|$,

(5) $$B_T^\varphi(a) = \{f \in M_T |\int_T \varphi(|f|) \leqslant a\}$$

et soit L_T^φ l'ensemble, convexe et équilibré, des $f \in M_T$ tels que $\int_T \varphi(|f|) < \infty$ et $L_T^{*\varphi}$ le sous-espace vectoriel de M_T engendré par L_T^φ. Si φ est une fonction d'Orlicz $L_T^{*\varphi}$ est muni de la topologie vectorielle (métrisable) admettant pour système fondamental de voisinages de 0 l'ensemble des $\varepsilon B_T^\varphi(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. L_T^φ est muni de la topologie induite par $L_T^{*\varphi}$. Quand $T = \boldsymbol{N}$ on écrit aussi l^φ, $l^{*\varphi}$. Se reporter aux références [4]–[8]. Si $|_T$ signifie $|_0$, $|^\infty$ ou $|_0^\infty$ selon que $T = \boldsymbol{N}$, que T est de mesure sans atome finie ou infinie, on sait que les quatre assertions suivantes sont équivalentes. a) $L_T^{*\varphi} = L_T^\varphi$; b) $\varphi|_T\varphi(2) < \infty$; c) $L_T^{*\varphi}$ admet pour système fondamental de voisinages de 0 l'ensemble des $B_T^\varphi(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$; d) L'ensemble des fonctions simples est dense dans $L_T^{*\varphi}$. Quand ces conditions sont vérifiées, par exemple quand φ équivaut à une fonction concave, on écrit L_T^φ plutôt que $L_T^{*\varphi}$. On sait aussi que $L_T^{*\varphi_2} \subset L_T^{*\varphi_1}$ si et seulement si $\varphi_1|_T\varphi_2(0+) < \infty$, donc que $L_T^{*\varphi_1} = L_T^{*\varphi_2}$ si et seulement si φ_1 et φ_2 sont équivalentes au voisinage de 0, de ∞ ou partout selon que $T = \boldsymbol{N}$, que T est sans atome, de mesure finie ou infinie. Si φ et ψ sont des fonctions d'Orlicz concaves, il existe une fonction d'Orlicz concave ψ_1 (resp. φ_1) équivalente à ψ (resp. φ) au voisinage de 0 (resp. ∞) et telle que $\varphi_0|\psi_1 = \varphi|_0^\infty\psi_1$ (resp. $\varphi_1|^\infty\psi = \varphi_1|_0^\infty\psi$): il suffit de prendre $\psi_1(x)$ (resp. $\varphi_1(x)$) proportionnel à x pour $x \geqslant 1$ (resp. $\leqslant 1$) car $\dfrac{\varphi(ux)}{\psi_1(x)}$ (resp. $\dfrac{\varphi_1(x)}{\psi(x/u)}$) est alors décroissant (resp. croissant) en x pour $x \geqslant 1$ (resp. $\leqslant 1$). D'où la remarque suivante, en utilisant de manière analogue la relation (3).

Remarque 1. Etant donnés deux espaces $L_T^{*\varphi}$ et $L_T^{*\psi}$, où T est sans atome et $|T| < \infty$ ou bien $T = \boldsymbol{N}$ (resp. et où φ et ψ sont concaves) on peut supposer, quitte à modifier φ et ψ sans changer les espaces correspondants, que

$$\varphi|_T\psi(0+) = \varphi|_0^\infty\psi(0+) \qquad (\text{resp. } \varphi|_T\psi = \varphi|_0^\infty\psi)$$

$|_T$ signifiant $|_0$ ou $|^\infty$ selon que $T = \boldsymbol{N}$ ou que T est sans atome avec $|T| < \infty$.

1.3. Etant donnée une suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ de parties d'un espace vectoriel, on posera

$$\sum_{n\geqslant m}{}' A_n = \bigcup_{N\geqslant m}\sum_{n=m}^{N} A_n, \qquad \sum{}' = \sum_n{}' = \sum_{n\geqslant 0}{}'$$

§ 2

2.1.

Proposition 2. *Soient T un espace mesuré sans atome, φ une fonction d'Orlicz, λ une suite scalaire.*

a) *Si $\varphi|_0^\infty\varphi(2) < \infty$ et si $\lambda \notin l^{\varphi(-1)}$ (Définition 1), alors, pour tout $\varepsilon > 0$, ($B_T^\varphi(\varepsilon)$ étant défini par (5)) on a*

$$\sum_{n\geqslant 0}{}' \lambda_n B_T^\varphi(\varepsilon) = L_T^\varphi$$

b) *Si φ est concave, si $\theta(x) = \inf\{x, 1\}$ et si $\lambda \in l^{\varphi(-1)}$, alors la base de filtre des $\sum_n{}'\lambda_n B_T^\varphi(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, tend vers 0 dans L_T^θ (c'est à dire pour la topologie de la convergence en mesure si $|T| < \infty$).*

Démonstration de a). Etablissons d'abord ceci: si $S \subset T$ est mesurable et si $\varepsilon > 0$, on a

$$\sum_0^N \varphi_{(-1)}(\lambda_n) \geqslant \frac{|S|}{\varepsilon} \Rightarrow I_S \in \sum_0^N \lambda_n B_T^\varphi(\varepsilon). \tag{6}$$

En effet le premier membre de (6) implique qu'il existe une partition finie de S en ensembles mesurables S_n, avec $|S_n| \leqslant \varepsilon\varphi_{(-1)}(\lambda_n)$. Si $f_n = \dfrac{1}{\lambda_n} I_{S_n}$ pour $\lambda_n \neq 0$ et $f_n = 0$ quand $\lambda_n = 0$, $f_n \in B_T^\varphi(\varepsilon)$ et $I_S = \sum_0^N \lambda_n f_n$, ce qui démontre (6).

Comme $\varphi|_0^\infty\varphi(2) < \infty$, l'ensemble des $\sum{}'\lambda_n B_T^\varphi(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, constitue si $\lambda \neq 0$ un système fondamental de voisinages de 0 pour une topologie vectorielle $\mathcal{T}_\lambda$ moins fine que celle de L_T^φ. Si alors $\sum_0^\infty \varphi_{(-1)}(\lambda_n) = \infty$, (6) montre que l'adhérence de 0 pour $\mathcal{T}_\lambda$ contient l'ensemble, total dans L_T^φ, des fonctions caractéristiques intégrables, donc $\mathcal{T}_\lambda$ est grossière, ce qu'il fallait démontrer.

Démonstration de b). θ est une fonction d'Orlicz concave, et $\varphi_{(-1)} = \theta|_0^\infty\varphi$ puisque φ est concave. Donc si $f_n \in B_T^\varphi(\varepsilon)$,

$$\int_T \theta\Big(\Big|\sum_0^N \lambda_n f_n\Big|\Big) \leqslant \sum_0^N \int_T \theta(|\lambda_n f_n|) \leqslant \varepsilon \sum_0^\infty \varphi_{(-1)}(|\lambda_n|),$$

autrement dit

$$\sum{}' \lambda_n B_T^\varphi(\varepsilon) \subset B_T^\theta\Big(\varepsilon\sum_0^\infty \varphi_{(-1)}(|\lambda_n|)\Big). \tag{7}$$

Corollaire 1. ([2], [3], [7], [10]). *Si T est un espace mesuré sans atome et si φ est une fonction d'Orlicz telle que $\varphi|_0^\infty\varphi(2) < \infty$, il n'existe une forme linéaire continue non nulle sur L_T^φ que si $x = O(\varphi(x))$ pour $x \to \infty$.*

En effet si $\limsup\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\varphi(x)} = \limsup\limits_{x\to 0} \dfrac{\varphi_{(-1)}(x)}{x} = \infty$, $l^{\varphi(-1)}$ ne contient pas l^1 et donc, d'après la Proposition 2, l'enveloppe convexe de tout voisinage de 0 dans L_T^φ est l'espace L_T^φ entier.

Le Corollaire 1 sera généralisé dans [11], Théorème 7.1.

2.2.

Théorème 1. *Soit T un espace mesuré sans atome (de mesure non nulle), soient φ et ψ des fonctions d'Orlicz, φ concave, $\psi|_0^\infty\psi(2) < \infty$. Alors, pour qu'il existe une application linéaire continue non nulle de L_T^ψ dans L_T^φ il faut et il suffit que*

$$\varphi(x) = O(\psi(x)), \qquad x \to \infty,$$

(c'est à dire que $L_T^\psi \subset L_T^\varphi$ si $|T| < \infty$).

Démonstration. Supposons qu'existe une application linéaire continue non nulle w de L_T^ψ dans L_T^φ. Appliquons la Proposition 2. Si $\lambda \in l^{\varphi(-1)}$ la base de filtre des $\sum{}'\lambda_n w(B_T^\psi(\varepsilon))$, $\varepsilon > 0$, tend vers 0 dans L_T^θ. Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\sum{}'\lambda_n B_T^\psi(\varepsilon) \neq L_T^\psi$ et donc $\lambda \in l^{\psi(-1)}$. On a démontré que $l^{\varphi(-1)} \subset l^{\psi(-1)}$; on en déduit que $\psi_{(-1)}(x) = O(\varphi_{(-1)}(x))$ quand $x \to 0$, donc que $\varphi(x) = O(\psi(x))$ quand $x \to \infty$.

Réciproquement si $\varphi(x) = O(\psi(x))$ au voisinage de ∞ et si $|T| < \infty$, l'injection canonique de L_T^ψ dans L_T^φ est continue. Dans le cas général on projette L_T^ψ sur un L_S^ψ, $S \subset T$ mesurable et de mesure finie et non nulle, et L_S^ψ s'injecte continûment dans L_T^φ.

2.3. On dit qu'un sous-ensemble d'un espace vectoriel topologique est borné quand il est absorbé par tout voisinage de l'origine. Un sous-ensemble de $L_T^{*\varphi}$ est borné quand il est absorbé par $B_T^{\varphi}(\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$.

THÉORÈME 2. *Soit T l'espace mesuré $\boldsymbol{N}$, ou un espace mesuré sans atome (de mesure non nulle), soient φ et ψ des fonctions d'Orlicz.*

a) *Pour que $L_T^{*\psi} \subset L_T^{*\varphi}$ et qu'il existe dans $L_T^{*\psi}$ un voisinage de l'origine borné dans $L_T^{*\varphi}$ il faut et il suffit que $\varphi|_T\psi(0+) = 0$, où $|_T$ signifie $|_0$, $|_\infty$ ou $|_0^\infty$ selon que $T = \boldsymbol{N}$ ou que T est sans atome avec $|T|$ fini ou infini.*

b) *Supposons T sans atome, φ concave, $\psi|_0^\infty\psi(2) < \infty$. Alors, pour qu'il existe une application linéaire non nulle de L_T^{ψ} dans L_T^{φ} envoyant un voisinage de l'origine de L_T^{ψ} sur un borné de L_T^{φ} il faut et il suffit que $\varphi|^\infty\psi(0+) = 0$.*

Démonstration. On vérifie immédiatement la relation

$$uB_T^{\psi}(\eta) \subset B_T^{\varphi}(\eta\varphi|_0^\infty\psi(u)), \qquad u > 0,\ \eta > 0 \tag{8}$$

d'où l'on déduit que $B_T^{\psi}(\eta)$ est borné dans $L_T^{*\varphi}$ si $\varphi|_T\psi(0+) = 0$ (Remarque 1).

Réciproquement supposons $\varphi|_T\psi(0+) > 0$. Soit $0 < a < \varphi|_T\psi(0+)$ et soit $0 < \varepsilon < |T| \lim\limits_{x\to\infty} \psi(x)$. D'après (3) il existe, pour tout entier $n \geqslant 1$, $x_n > 0$ tel que $\varphi\left(\frac{1}{n}x_n\right) > a\psi(x_n)$, $\psi(x_n) > \frac{\varepsilon}{|T|}$ et, quand $T = \boldsymbol{N}$, $\psi(x_n) \leqslant \varepsilon$. Il existe alors $S_n \subset T$ mesurable, avec $|S_n| = \frac{\varepsilon}{\psi(x_n)}$ si T est sans atome et $|S_n| = \left[\frac{\varepsilon}{\psi(x_n)}\right]$ si $T = \boldsymbol{N}$. $x_n I_{S_n} \in B_T^{\psi}(\varepsilon)$, mais $\frac{1}{n}x_n I_{S_n} \notin B_T^{\varphi}\left(\frac{a\varepsilon}{2}\right)$ car $\varphi\left(\frac{x_n}{n}\right)|S_n| > a\psi(x_n)|S_n| > a\frac{\varepsilon}{2}$. Donc $B_T^{\psi}(\varepsilon)$ et donc $\varepsilon B_T^{\psi}(\varepsilon)$ ne sont pas bornés dans $L_T^{*\varphi}$, ce qui démontre a).

Supposons, sous les hypothèses de b), qu'il existe $b > 0$ et une application linéaire non nulle w de L_T^{ψ} dans L_T^{φ} telle que $w\,B(_T^{\psi}(b))$ soit borné dans L_T^{φ}. Soit $\varphi_{(-1)}(0+) < r < \infty$. D'après (7) la réunion des $\sum' \lambda_n w(B_T^{\psi}(b))$, $\lambda \in B_{\boldsymbol{N}}^{\varphi(-1)}(r)$, est bornée dans L_T^{θ} si $\theta(x) = \inf\{x, 1\}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme T est sans atome et que l'ensemble des fonctions simples est dense dans L_T^{ψ}, il existe un ensemble mesurable $S \subset T$ tel que $|S| \leqslant \varepsilon$ et $w(I_S) \neq 0$. Puis il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $\lambda \in B_{\boldsymbol{N}}^{\varphi(-1)}(r)$, $I_S \notin \eta\sum'\lambda_n B_T^{\psi}(b)$, donc, en vertu de (6), tel que

$$\eta B_{\boldsymbol{N}}^{\varphi(-1)}(r) \subset B_{\boldsymbol{N}}^{\psi(-1)}(\varepsilon/b).$$

A cause du choix de r, $B_{\boldsymbol{N}}^{\varphi(-1)}(r) \neq \{0\}$ donc $B_{\boldsymbol{N}}^{\psi(-1)}(\varepsilon/b) \neq \{0\}$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc $\psi_{(-1)}(0+) = 0$. On a démontré que $B_{\boldsymbol{N}}^{\varphi(-1)}(r)$ est borné dans $l^{\psi(-1)}$. Par conséquent $\varphi|^\infty\psi(0+) = \psi_{(-1)}|_0\varphi_{(-1)}(0+) = 0$, en vertu de la partie a) du théorème si $\varphi_{(-1)}(0+) = 0$, et sinon parce que $\psi_{(-1)}(0+) = 0$.

Réciproquement, si $\varphi|^\infty\psi(0+) = 0$, a) montre comme dans le théorème 1 qu'il existe une application linéaire non nulle de L_T^{ψ} dans L_T^{φ} bornée sur un voisinage de 0. Donc b) est démontré.

COROLLAIRE 2. (cf. [3], [10]). *Si $T = \boldsymbol{N}$ (resp. si T est un espace mesuré sans atome), si φ est une fonction d'Orlicz et si $|_T$ signifie $|_0$ (resp. $|^\infty$ ou $|_0^\infty$ selon que $|T| < \infty$ ou que $|T| = \infty$), $L_T^{*\varphi}$ est localement borné si et seulement si $\varphi|_T\varphi(0+) = 0$.*

COROLLAIRE 3. *Si T est un espace mesuré sans atome tel que $|T| < \infty$ et si φ est une fonction d'Orlicz concave, il n'existe un opérateur linéaire non nul $L_T^{\varphi} \to L_T^{\varphi}$ borné sur un voisinage de 0 que si L_T^{φ} est localement borné.*

2.4.

DÉFINITION 3. Soit T un espace mesuré, φ une fonction d'Orlicz. Un sous-ensemble K de M_T (l'ensemble des (classes de) fonctions mesurables sur T) est dit *uniformément φ-sommable* si et seulement si $\sup\limits_{f\in K}\int\limits_{A(f,x)}\varphi(|f|)$ tend vers 0 quand $x \to \infty$ et es tfini pour tout $x \geqslant 1$, avec $A(f,x) = \{t \in T|\ |f(t)| \notin]1/x, x[\}$.

PROPOSITION 3. *Soient T un espace mesuré, φ une fonction d'Orlicz, $K \subset M_T$. Alors*

a) *K est uniformément φ-sommable si et seulement si il existe $a < \infty$ et une fonction d'Orlicz ψ telle que $\varphi(x) = o(\psi(x))$ au voisinage de 0 et de ∞, et telle que $K \subset B_T^{\psi}(a)$. ψ peut être prise concave si φ est concave et $\varphi(x) = o(x)$ quand $x \to \infty$.*

b) *Tout ensemble absorbé par un ensemble uniformément φ-sommable est borné dans $L_T^{*\varphi}$, la réciproque est vraie si* $\inf\limits_{u>0}\liminf\limits_{x\to{}^\infty_0}\dfrac{\varphi(ux)}{\varphi(x)} > 0$.

c) *Tout compact de $L_T^{*\varphi}$ est absorbé par un ensemble uniformément φ-sommable.*

Démonstration. Il est clair que $B_T^{\psi}(a)$ est uniformément φ-sommable si $a < \infty$ et si $\varphi(x) = o(\psi(x))$ quand $x \to {}^\infty_0$. Réciproquement, soit K uniformément φ-sommable, construisons ψ.

Il existe une suite $(x_k)_{k\geqslant 1}$ strictement croissante, avec $x_1 = 1$, telle que $k\varphi\left(\frac{1}{x_k}\right) \to 0$ et, pour tout $f \in K$ et $k \geqslant 2$, $\int\limits_{A(f,x_k)}\varphi(|f|) \leqslant 2^{-k}$. On pose $\psi_0(0) = 0$, $\psi_0(x) = k\varphi(x)$ pour $x_k < x \leqslant x_{k+1}$ et pour $\frac{1}{x_{k+1}} \leqslant x < \frac{1}{x_k}$ et $\psi_1(x) = \inf\limits_{y\geqslant x}\psi_0(y)$ pour $x \geqslant 0$: il est clair que ψ_1 est une fonction d'Orlicz majorant φ, infiniment plus grande que φ au voisinage de 0 et de ∞ et que $\sup_{f\in K}\int\psi_1(|f|)<\infty$. Si φ est concave et $\varphi(x)=o(x)$ pour $x\to\infty$ on pose $\psi_2(x)=\inf_{0<u\leqslant 1}\frac{\psi_1(ux)}{u}$. ψ_2 est une fonction d'Orlicz qui minore ψ_1 et majore φ; $\varphi(x)=o\big(\psi_2(x)\big)$, au voisinage de 0 car $\psi_2(x)\geqslant\varphi(x)\inf_{0<y\leqslant x}\frac{\psi_1(y)}{\varphi(y)}$, et au voisinage de ∞ car $\psi_2(x)\geqslant\varphi(x)\min\left\{\frac{\varphi(y_x)}{y_x}\frac{x}{\varphi(x)},\ \inf_{y_x\leqslant y\leqslant x}\frac{\psi_1(y)}{\varphi(y)}\right\}$, où $y_x\to\infty$ et $y_x=o\left(\frac{x}{\varphi(x)}\right)$ quand $x\to\infty$; $\frac{\psi_2(x)}{x}$ est décroissant: on prendra pour ψ une fonction concave équivalente à ψ_2 (Proposition 1).

Que tout ensemble uniformément φ-sommable soit borné est évident (et peut se déduire de a)).

Réciproquement supposons que $a=\inf_{u>0}\liminf_{x\to{}_0^\infty}\frac{\varphi(ux)}{\varphi(x)}$ ne soit pas nul et soit B borné dans $L_T^{*\varphi}$. $\varepsilon>0$ donné il existe $u_\varepsilon>0$ tel que $\int\varphi(u_\varepsilon|f|)\leqslant\varepsilon$ pour tout $f\in B$ et il existe x_ε tel que $\varphi(u_\varepsilon x)\geqslant\frac{a}{2}\varphi(x)$ dès que $x\notin\left]\frac{1}{x_\varepsilon},x_\varepsilon\right[$. Alors, pour tout $f\in B$, $\int_{A(f,x_\varepsilon)}\varphi(|f|)\leqslant\frac{2}{a}\varepsilon$. Donc u_1B est uniformément φ-sommable.

Enfin soit K un compact de $L_T^{*\varphi}$. K est donc borné et il existe $u>0$ tel que $2uK\subset L_T^\varphi$. $\varepsilon>0$ donné, il existe un ensemble fini de fonctions $f_i\in uK$ telles que les $f_i+\frac{1}{2}B_T^\varphi(\varepsilon)$ recouvrent uK, puis il existe $\eta>0$ et un ensemble mesurable $S\subset T$, $|S|<\infty$, tels que si $A\subset T$ est mesurable et $|A\cap S|\leqslant\eta$ on ait, pour tout i, $f_iI_A\in\frac{1}{2}B_T^\varphi(\varepsilon)$, et donc pour tout $f\in uK$, $fI_A\in B_T^\varphi(2\varepsilon)$. Donc si x est assez grand on a pour tout $f\in uK$, S' étant le complémentaire de S,

$$\int_{A(f,x)}\varphi(|f|)\leqslant\int_{S'}\varphi(|f|)+|S|\varphi\left(\frac{1}{x}\right)+\int_{|f|\geqslant x}\varphi(|f|)\leqslant 5\varepsilon$$

car $\varphi(1)\big|\{t\,|\,|f(t)|\geqslant x\}\big|\leqslant\int_T\varphi\left(\frac{|f(t)|}{x}\right)dt$ tend vers 0 quand $x\to\infty$ uniformément pour $f\in uK$ puisque uK est borné. Donc uK est uniformément φ-sommable.

Théorème 3. *Soient φ et ψ des fonctions d'Orlicz, T un espace mesuré, de mesure non nulle.*

a) *Si $T=\mathbf{N}$ (resp. si T est sans atome) l'un des voisinages de l'origine de $L_T^{*\psi}$ est absorbé par un ensemble uniformément φ-sommable (ce qui implique $L_T^{*\psi}\subset L_T^{*\varphi}$) si et seulement si il existe $u>0$ tel que $\varphi(ux)=o\big(\psi(x)\big)$ quand $x\to 0$ (resp. quand $x\to\infty$ ou $x\to{}_0^\infty$ selon que $|T|<\infty$ ou que $|T|=\infty$).*

b) *Supposons T sans atome, φ concave, $\varphi(x)=o(x)$ au voisinage de ∞, $\psi|_0^\infty\psi(2)<\infty$. Alors pour qu'il existe une application linéaire non nulle de L_T^ψ dans L_T^φ envoyant l'un des voisinages de 0 de L_T^ψ sur un ensemble uniformément φ-sommable, il faut et il suffit que $\varphi(x)=o\big(\psi(x)\big)$ au voisinage de ∞.*

Démonstration. Si l'image d'un voisinage de l'origine de $L_T^{*\psi}$ par une application linéaire non nulle w est absorbée par un ensemble uniformément φ-sommable, on voit (Proposition 3) que w se factorise par une application linéaire continue w_1: $L_T^{*\psi}\to L_T^{*\varphi_1}$, où $\varphi(x)=o\big(\varphi_1(x)\big)$, φ_1 étant concave si φ l'est, et par l'injection canonique $L_T^{*\varphi_1}\to L_T^{*\varphi}$. Le Théorème 1 appliqué à w_1 montre alors que les conditions sont nécessaires; leur suffisance est immédiate.

Corollaire 4. *Soient φ une fonction d'Orlicz concave, T un espace mesuré sans atome. Il n'existe un opérateur linéaire compact non nul de L_T^φ dans L_T^φ que si $x=O\big(\varphi(x)\big)$ quand $x\to\infty$ (c'est à dire, quand $|T|<\infty$, si $L_T^\varphi=L_T^1$).*

Démonstration. Utiliser la Proposition 2, c) et remarquer que, quand $x\to\infty$, $\varphi(x)=o(x)$ si x n'est pas un $O\big(\varphi(x)\big)$.

Problème. Soient T un espace mesuré sans atome et ψ une fonction d'Orlicz non bornée vérifiant $\psi|_0^\infty\psi(2)<\infty$ et $\liminf_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x}=0$. Je ne sais pas s'il existe un espace vectoriel topologique séparé E et une application linéaire compacte non nulle de L_T^ψ dans E.

2.5.

Théorème 4. *Soient φ, ψ des fonctions d'Orlicz, T l'espace mesuré $\mathbf{N}$ (resp. un espace mesuré sans atome de mesure non nulle). $|_T$ signifie $|_0$ (resp. $|^\infty$ ou $|_0^\infty$ selon que $|T|<\infty$ ou que $|T|=\infty$).*

a) *Pour que la base de filtre des $\sum'\lambda_nB_T^\psi(\eta)$, $\eta>0$, tende vers 0 dans $L_T^{*\varphi}$ il est nécessaire que $(\lambda_n)\in l^{*\varphi|_T\psi}$. Plus précisément, si $0<\varepsilon<|T|\varphi(1)$ et $\eta>0$ il existe $M<\infty$ tel qu'on ait, pour toute suite λ,*

$$\sum{}'\lambda_nB_T^\psi(\eta)\subset B_T^\varphi(\varepsilon)\Rightarrow\lambda\in MB_{\mathbf{N}}^{\varphi|_T\psi}\left(2\frac{\varepsilon}{\eta}\right). \tag{9}$$

On observera que (9) reste vrai si on y remplace $B_T^\psi(\eta)$ par l'ensemble des fonctions simples contenues dans $B_T^\psi(\eta)$.

b) *Si de plus φ et ψ sont concaves, alors la base de filtre des $\sum'\lambda_nB_T^\psi(\eta)$, $\eta>0$, tend vers 0 dans L_T^φ si et seulement si $(\lambda_n)\in l^{\varphi|_T\psi}$. De plus, pour tous $a<\infty$ et $\varepsilon>0$ il existe $\eta>0$ tel que pour toute suite λ*

$$\lambda\in B_{\mathbf{N}}^{\varphi|_T\psi}(a)\Rightarrow\sum{}'\lambda_nB_T^\psi(\eta)\subset B_T^\varphi(\varepsilon). \tag{10}$$

Démonstration de b). φ et ψ étant concaves on peut supposer que $\varphi|_T\psi = \varphi|_0^\infty\psi$ (Remarque 1). a et ε donnés, prenons alors $\eta = \frac{\varepsilon}{a}$ et soit $f_n \in B_T^\psi(\eta)$, $\lambda \in B_N^{\varphi|_T\psi}(a)$.

$$\int\varphi\Big(\Big|\sum_0^N\lambda_n f_n\Big|\Big) \leqslant \sum_0^\infty\int\varphi(|\lambda_n f_n|) \leqslant \eta\sum_0^\infty\varphi|_0^\infty\psi(\lambda_n) \leqslant \eta a = \varepsilon.$$

Démonstration de (9). Soit, pour $n = 0, 1, \ldots$, $x_n \geqslant 0$ et supposons qu'il existe des ensembles mesurables $A_n \subset T$ deux à deux disjoints et vérifiant $\psi(x_n)|A_n| \leqslant \eta$. Alors $f_n = x_n I_{A_n} \in B_T^\psi(\eta)$, donc $\sum\limits_0^N\lambda_n f_n \in B_T^\varphi(\varepsilon)$ pour tout N. Par conséquent

$$\sup_n\psi(x_n)|A_n| \leqslant \eta \Rightarrow \sum_0^\infty\varphi(|\lambda_n|x_n)|A_n| \leqslant \varepsilon. \tag{11}$$

Si T est sans atome et $|T| = \infty$ on peut prendre $|A_n| = \frac{\eta}{\psi(x_n)}$ quels que soient les $x_n > 0$ et donc, d'après (11),

$$\sum_0^\infty\varphi|_0^\infty\psi(|\lambda_n|) = \sup_{(x_n)}\sum_0^\infty\frac{\varphi(|\lambda_n|x_n)}{\psi(x_n)} \leqslant \frac{\varepsilon}{\eta}.$$

Prenons le cas où $T = \boldsymbol{N}$. Soit $M \geqslant 1$ tel que $\psi\left(\frac{1}{M}\right) \leqslant \eta$. Soit $y_n \in]0, 1]$, prenons $x_n = \frac{y_n}{M}$ et prenons les A_n tels que $|A_n|$ soit la partie entière de $\frac{\eta}{\psi(x_n)}$: grace au choix de M, $\frac{\eta}{\psi(x_n)} \leqslant 2|A_n|$. Donc, d'après (11),

$$\sum_0^\infty\eta\frac{\varphi\left(\frac{1}{M}|\lambda_n|y_n\right)}{\psi(y_n)} \leqslant \sum_0^\infty\eta\frac{\varphi(|\lambda_n|x_n)}{\psi(x_n)} \leqslant 2\sum_0^\infty\varphi(|\lambda_n|x_n)|A_n| \leqslant 2\varepsilon.$$

La suite (y_n) étant arbitraire, $\sum\limits_0^\infty\varphi|_0\psi\left(\frac{1}{M}|\lambda_n|\right) \leqslant 2\frac{\varepsilon}{\eta}$.

Supposons enfin T sans atome et $|T|$ fini. Comme $\varepsilon < |T|\varphi(1)$, $I_T \notin B_T^\varphi(\varepsilon)$ et par suite, d'après (6),

$$\sum_0^\infty\eta\psi_{(-1)}(|\lambda_n|) \leqslant |T|.$$

Alors si $y_n \geqslant 1$ on peut prendre $|A_n| = \eta\psi_{(-1)}\left(\frac{|\lambda_n|}{y_n}\right)$, $x_n = \frac{y_n}{|\lambda_n|}$ quand $\lambda_n \neq 0$, $x_n = 0$ quand $\lambda_n = 0$ et il découle de (11) que

$$\sum\eta\frac{\varphi(y_n)}{\psi\left(\frac{y_n}{\lambda_n}\right)} \leqslant \varepsilon,$$

la sommation étant étendue à l'ensemble des n tels que $\lambda_n \neq 0$. Donc $\sum\limits_0^\infty\varphi|^\infty\psi(\lambda_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{\eta}$ puisque les y_n sont arbitraires.

Références

[1] C. Bessaga, A. Pełczyński et S. Rolewicz, *Some properties of the norm in F-spaces*, Studia Math. 16 (1957), p. 183–192.

[2] S. Cater, *Continuous linear functionals on certain topological vector spaces*, Pacific J. Math. 13 (1963), p. 65–71.

[3] B. Gramsch, *Die Klasse metrischer linearer Räume $\mathscr{L}_\Phi$*, Math. Ann. 171 (1967), p. 61–78.

[4] W. Matuszewska, *On generalized Orlicz spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. 8 (1960), p. 349–353.

[5] S. Mazur et W. Orlicz, *On some classes of linear spaces*, Studia Math. 17 (1958), p. 97–119.

[6] J. Musielak et W. Orlicz, *On modular spaces*, Studia Math. 18 (1959), p. 49–65.

[7] — — *Some remarks on modular spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. 7 (1959), p. 661–668.

[8] W. Orlicz, *On spaces of φ-integrable functions*, Proc. Intern. Symp. on Linear Spaces held at the Hebrew University of Jerusalem, July 5–12, 1960, p. 357–365.

[9] D. Pallaschke, *The compact endomorphisms of the metric linear spaces $\mathscr{L}_\Phi$*, à paraître.

[10] S. Rolewicz, *Some remarks on the spaces N(L) and N(l)*, Studia Math. 18 (1959), p. 1–9.

[11] P. Turpin, *Espaces et intersections d'espaces d'Orlicz non localement convexes*, Studia Math. ce volume, p. 167-195.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY

Received April 7, 1972 (511)