La topologie de E est alors définie par la F-norme $\|(x_n)\| = \sup_{n\geqslant 1} \|x_n\|_n$. On peut considérer l'espace $\hat{E}$ des $(x_n) \in \prod_{n\geqslant 1} R^{1+2^n}$ tels que $\|x_n\|_n \to 0$, muni de la F-norme $\sup_{n\geqslant 1} \|x_n\|_n$ ($\hat{E}$ est le complété de E), ou encore l'espace $\tilde{E}$ des $(x_n) \in \prod_{n\geqslant 1} R^{1+2^n}$ tels que $\sup_{n\geqslant 1} \|tx_n\|_n$ tende vers 0 avec le scalaire t, muni de la F-norme $\sup_{n\geqslant 1} \|x_n\|_n$. $\tilde{E}$ contient $\hat{E}$, probablement strictement. Je ne sais pas si tout borné mince de $\hat{E}$ est précompact, et je conjecture que $\tilde{E}$ possède un borné mince qui n'est pas précompact.

6. On a remarqué que tout sous-espace de produit d'espaces où tout borné mince est précompact hérite de cette propriété. Cette propriété se conserve aussi par passage à la somme directe vectorielle topologique (dans la catégorie de tous les espaces vectoriels topologiques), par exemple parce que les bornés proviennent des cofacteurs ([3]) ou bien en vertu de la propriété de permanence plus générale donnée dans le paragraphe 5 précédent. Je ne sais pas si le quotient, ou le complété, d'un espace dont tout borné mince est précompact possède encore cette propriété. Je ne sais pas par exemple si tout borné mince d'un quotient de $L^0(0,1)$ est précompact.

Références

[1] L. Drewnowski and W. Orlicz, *A note on modular spaces X*, Bull. Acad. Pol. Sci. 16 (1968), p. 809–814.

[2] C. Fenske und E. Schock, *Nuklearität und lokale Konvexität von Folgenräumen*, Math. Nachr., 45 (1970), p. 327–335.

[3] S. O. Iyahen, *On certain classes of linear topological spaces*, Proc. London Math. Soc. 18 (1968), p. 285–307.

[4] J. Musielak and W. Orlicz, *On modular spaces*, Studia Math. 18 (1959), p. 49–65.

[5] D. Pallaschke und G. Pantelidis, *Homotopieeigenshaften von Sphären in Φ-Räumen und approximative Kompaktheit*, Arch. Math. 20 (1969), p. 176–185.

[6] S. Rolewicz, *Metric Linear Spaces*, *Warszawa* 1971.

[7] P. Turpin, *Généralisation d'un théorème de S. Mazur et W. Orlicz*, C. R. Acad. Sc. Paris, 273, Série A (1971), p. 506–509.

[8] — *Sur un problème de S. Simons concernant les bornés des espaces vectoriels topologiques*, Bull. Soc. Math. France (Mémoires) (Colloque d'Analyse fonctionnelle de Bordeaux, 1971). A paraître.

[9] L. Waelbroeck, *Topological Vector Spaces and Algebras*, Lecture Notes in Mathematics, 230, Berlin Heidelberg New York 1971.

UNIVERSITÉ PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY
MATHÉMATIQUE

Received March 1, 1972 (494)

STUDIA MATHEMATICA, T. XLVI. (1973)

Un exemple d'espace nucléaire dont le dual topologique est réduit à zero

par

JEAN PIERRE LIGAUD

Sommaire. S. Rolewicz a posé la question suivante: Est-ce que sur chaque espace métrisable complet et nucléaire, il existe des formes linéaires continues non identiquement nulles ([1], Problème 44 et [2] Problème 9). On construit un exemple qui fournit une réponse négative à cette question.

1. D'après [1], pour deux parties A et B d'un espace vectoriel, on note $d_n(A, B)$ la borne inférieure des $\lambda > 0$, tels qu'il existe un sous-espace vectoriel L de dimension $\leqslant n$ avec $A \subset \lambda B + L$. Un espace vectoriel topologique (evt) est dit *nucléaire* s'il existe un $\alpha > 0$ tel que pour tout voisinage U de 0, il en existe un autre V avec $d_n(V, U) \leqslant \frac{1}{(n+1)^\alpha}$ (alors, quelquesoit $\beta > 0$, pour tout voisinage U de 0, il en existe un autre V tel que $d_n(V, U) \leqslant \frac{1}{(n+1)^\beta}$). Dans un espace métrisable possèdant cette propriété, on a pour tout compact K et tout voisinage U de 0, $d_n(K, U) \leqslant \frac{1}{(n+1)^\beta}$, si bien qu'un espace nucléaire au sens de [1] l'est aussi au sens de [2].

2. Soit E un espace vectoriel topologique métrisable et de dimension dénombrable. Soit $(e_n)_{n\geqslant 1}$ une base algébrique de E et $(V_n)_{n\geqslant 0}$ une base décroissante de voisinages de 0 de E, équilibrés et tels que $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$.

On pose $L_0 = \{0\}$ et on désigne par L_m $(m \geqslant 1)$ le sous-espace vectoriel de E engendré par $e_1, \ldots, e_m$. On construit par récurrence une famille $(W_n^p)_{n\geqslant 0, p\geqslant 0}$ de la manière suivante: $W_n^0 = V_n$; $W_n^{p+1} = \bigcap_{m\geqslant 0} \left(\frac{1}{m+1} W_n^p + L_m\right)$.

LEMME 1. *(W_n^p) est une base de voisinages de 0 pour une topologie vectorielle sur E, métrisable et nucléaire.*

On notera E_0 l'espace vectoriel sous-jacent à E, muni de cette nouvelle topologie.

Preuve. Par récurrence sur p, on voit que W_n^p est un équilibré, que $W_{n+1}^p + W_{n+1}^p \subset W_n^p$ et que si $n \leqslant n'$, $W_{n'}^p \subset W_n^p$. Pour n fixé, on a $W_n^{p+1} \subset W_n^p$ donc si n, n' et p, p' sont des indices quelconques, on a $W_n^p \cap W_{n'}^{p'} \supset W_{\sup(n,n')}^{\sup(p,p')}$.

Reste à voir que W_n^p est absorbant. W_n^0 l'est, et si on suppose que W_n^p l'est, soit x un élément de E, alors il existe un entier m_0 tel que pour $m > m_0$, $x \in L_m$ et pour $m \leqslant m_0$, il existe $\lambda_m > 0$ tel que $\lambda_m x \in \frac{1}{m+1} W_n^p$, donc si $\lambda = \inf(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_{m_0})$ on a $\lambda x \in \frac{1}{m+1} W_n^p + L_m$ quelquesoit m, donc $\lambda x \in W_n^{p+1}$. Les W_n^p forment donc une base dénombrable de voisinages de 0 pour une topologie vectorielle qui est plus fine que celle de E, donc séparée. Enfin, pour tout $m \geqslant 0$ on a $W_n^{p+1} \subset \frac{1}{m+1} W_n^p + L_m$ donc $d_m(W_n^{p+1}, W_n^p) \leqslant \frac{1}{m+1}$ et cette topologie est nucléaire.

On désigne par $\Gamma(A)$ l'enveloppe disquée d'une partie A de E.

LEMME 2. *Supposons que E possède la propriété suivante: Pour tout entier n, $\Gamma\big(\bigcap_{\lambda>0} \lambda V_n\big) = E$.*

Alors le dual topologique E_0' de E_0 est réduit à $\{0\}$.

Preuve. Pour tout n, on a par récurrence sur p

$$W_n^p \supset \bigcap_{\lambda<0} \lambda V_n \quad \text{donc } \Gamma(W_n^p) = E.$$

L'espace E_0 n'est pas complet en général. Si $\hat{E}_0$ désigne le complété de E_0 et si E_0' est réduit à $\{0\}$, $(\hat{E}_0)'$ l'est également. Alors $\hat{E}_0$ est métrisable, complet et il est nucléaire en vertu du:

LEMME 3. *Si F est un evt nucléaire, son complété $\hat{F}$ est nucléaire.*

Preuve. Soit U un voisinage de $\hat{F}$ et U_1 un autre voisinage de 0 de F tel que $U_1 + U_1 \subset U$. On peut prendre $U_1 = \overline{V}$ où V est un voisinage de 0 de F et où l'adhérence est prise dans $\hat{F}$. Puisque F est nucléaire il existe un voisinage W de 0 dans F tel que $d_m(W, V) < \frac{1}{m+1}$. Alors pour chaque entier m, il existe $L \subset F$, avec $\dim L \leqslant m$ et $W \subset \frac{1}{m+1} V + L$. Alors $\overline{W} \subset \frac{1}{m+1}\overline{V} + L + \frac{1}{m+1} U_1 \subset \frac{1}{m+1} U + L$ et $d_m(\overline{W}, U) \leqslant \frac{1}{m+1}$.

3. Il reste à trouver un evt métrisable, de dimension dénombrable, et vérifiant la propriété du Lemme 2.

Soit $X = [0, 1]$, m la mesure de Lebesgue sur X et Ω l'ensemble des fonctions caractéristiques φ_I des intervalles fermés I de X, dont les extrémités sont rationnelles. Soit $L^0(X)$ l'espace des fonctions mesurables sur X, muni de la topologie de la convergence en mesure. Soit E le sous-espace vectoriel de $L^0(X)$ engendré par Ω et muni de la topologie induite par $L^0(X)$. Ω est dénombrable, donc E est de dimension dénombrable. E est métrisable et possède pour base de voisinages de 0 les

$$V_n = \left\{f \in E;\ m\left(\left\{x \in X;\ |f(x)| > \frac{1}{n}\right\}\right) \leqslant \frac{1}{n}\right\}.$$

Pour n fixé, soit $(I_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ la famille des intervalles $I_k = \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$ et soit $f \in E$. Alors $f = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} f\varphi_{I_k}$ (on identifie deux fonctions égales presque partout), et $f\varphi_{I_k} \in E$. Pour tout nombre $\alpha > 0$, $m(\{x \in X;\ |\alpha f(x)\varphi_{I_k}(x)| > 1/n\}) \leqslant m(I_k) = 1/n$ donc $\alpha f\varphi_{I_k} \in V_n$ et $nf\varphi_{I_k} \in \bigcap_{\lambda>0} \lambda V_n$.

Alors $f = \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{n} nf\varphi_{I_k}$, et $f \in \Gamma\big(\bigcap_{\lambda>0} \lambda V_n\big)$. Ainsi E possède la propriété du Lemme 2.

Références

[1] S. Rolewicz, *Colloque international sur les espaces nucléaires et les idéaux dans les algèbres d'opérateurs*, Studia Math. 38 (1969), p. 477–478.

[2] — *Open problems on linear metric spaces*, Colloque d'Analyse Fonctionnelle. Bordeaux (1971) Bull. Soc. Math. France (à paraître).

UNIVERSITÉ DE BORDEAUX I
U.E.R. DE MATHÉMATIQUES

Received March 15, 1972 (503)