open and suggested naturally the compelling question of whether the classical Bochner theorem (and perhaps some generalized form of it) could be indeed recovered—proved—from a numerical range/states approach. This meant one should try to obtain some result(s) easily applicable given the hypothesis of the classical Bochner theorem and asserting that (under the appropriate conditions) a given linear functional is a spectral state. Theorem 1 above does exactly that, while in Theorem 5 one does not insist on having states nor a unit element since one has in mind the Fourier transforms of complex measures (and of course one also considers in the latter theorem different transformations of $A$ than in Theorem 1). Finally, notice that while in our applications the transformations of $A$ were linear or conjugate linear, no such thing is needed nor was assumed in the theorems given above in the abstract context, (Theorems 1 and 5).

**References**

[1] F. F. Bonsall, and J. Duncan, *Numerical ranges of operators on normed spaces and of elements of normed algebras*, London Math. Soc. Lecture Notes, series 2, 1971.

[2] L. H. Loomis, *An introduction to abstract harmonic analysis*, London, New York, Toronto 1953.

[3] R. T. Moore, *Approximation of spectra by numerical ranges*, to appear.

UNIVERSITÉ PARIS-SUD
UNIVERSITY OF WASHINGTON

*Received January 26, 1972* (468)

STUDIA MATHEMATICA, T. XLVI. (1973)

# Un critère de compacité dans les espaces vectoriels topologiques

par

PHILIPPE TURPIN* (Orsay, France)

**Sommaire.** Dans les espaces vectoriels topologiques les plus usuels, notamment l'espace des fonctions mesurables sur (0, 1) muni de la topologie de la convergence en mesure, un ensemble borné $B$ est précompact si et seulement s'il existe pour tout voisinage $U$ de 0 un sous-espace vectoriel $L$ de dimension finie tel que $B \subset L+U$.

**1.** Soit $E$ un espace vectoriel topologique, réel ou complexe. Une partie $B$ de $E$ est dite mince quand pour tout voisinage $U$ de 0 dans $E$ il existe un sous-espace vectoriel $L$ de $E$ de dimension finie tel que $B \subset L+U$.

Par exemple tout précompact de $E$ est mince.

On rappelle que $B \subset E$ est dit borné quand tout voisinage de 0 absorbe $B$ (c'est à dire contient $uB$ pour quelque $u > 0$).

Tout borné mince d'un espace localement convexe, ou ([6]), plus généralement, d'un espace localement pseudo-convexe (c'est à dire dont tout voisinage de 0 contient un voisinage $U$ de 0 qui absorbe $U+U$) est précompact. S. Rolewicz pose le problème de savoir si, dans un espace vectoriel topologique quelconque, tout borné mince est précompact. ([6], p. 165).

On donne ici, sans résoudre ce problème, quelques classes d'espaces vectoriels topologiques dont tout borné mince est précompact et on obtient notamment le résultat suivant.

THÉORÈME 1. *Dans l'espace $L^0(0,1)$ de toutes les (classes de) fonctions mesurables au sens de Lebesgue sur l'intervalle $(0,1)$ muni de la topologie de la convergence en mesure, tout borné mince est relativement compact.*

On démontre en fait (Propositions 3 et 4), plus généralement, le Théorème 2 ci-dessous.

Soit $m$ une mesure positive sur une tribu de parties d'un ensemble $T$. Soit $\varphi(x,t)$ une fonction numérique de $x \geqslant 0$, $t \in T$, $\varphi(x,\cdot)$ étant $m$-mesu-

* Ce travail était presenté pendant la "Conference sur les espaces de fonctions et espaces modulaires", Poznań, 1–5, Octobre, 1971.

rable pour tout $x$, $\varphi(\cdot, t)$ étant, pour $m$-presque tout $t$, nulle en 0 et seulement en 0, croissant et continue. Soit $L^{*\varphi}(m)$ ([1], [4]) l'espace vectoriel des (classes de) fonctions scalaires $f$ $m$-mesurables, telles qu'il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant $\int \varphi\left(\frac{|f(t)|}{\varepsilon}, t\right) dm(t) < \infty$, muni de la topologie définie par la $F$-norme

$$\|f\| = \inf\left\{\varepsilon > 0 \,\middle|\, \int \varphi\left(\frac{|f(t)|}{\varepsilon}, t\right) dm(t) \leqslant \varepsilon\right\}.$$

Théorème 2. *Quels que soient $\varphi$ et $m$, tout borné mince de l'espace vectoriel topologique $L^{*\varphi}(m)$ ci-dessus est relativement compact.*

On en déduit le Théorème 1 en prenant par exemple $\varphi(x, t) = \dfrac{x}{1+x}$.

**2.**

Proposition 1. *Pour que tout borné mince d'un espace vectoriel topologique $E$ soit précompact, il suffit que $E$ vérifie la propriété* (A) *suivante.*

(A) *Pour tout voisinage $U$ de 0 il existe un voisinage $V$ de 0 tel que pour tout sous-espace vectoriel $L$ de $E$ de dimension finie et pour tout $a > 0$, il existe une partie finie $H$ de $V \cap L$ telle que*

$$V \cap L \subset H + aU. \tag{1}$$

Démonstration. Soit $B$ un borné mince de $E$, soit $U$, $W$ des voisinages équilibrés de 0 dans $E$, $U$ et $V = W+W$ étant liés par la relation énoncée dans (A). Il existe un sous-espace vectoriel $L$ de dimension finie de $E$ tel que $B \subset L+W$, et il existe $a > 0$ tel que

$$B \subset (B+W) \cap L + W \subset \frac{1}{a} V \cap L + W \subset \frac{1}{a} H + U + W$$

si $H$ est un ensemble fini vérifiant (1). Il existe alors une partie finie $H'$ de $B$ telle que $B \subset H' + U + U + V$. Donc $B$ est précompact.

Remarque 1. On verra dans le paragraphe 5 que (A) n'est pas une condition necessaire pour que tout borné mince de $E$ soit précompact.

Remarque 2. Il est clair qu'on obtient une propriété équivalente à (A) en supposant seulement dans (1) que $H$ est un précompact de $E$.

On obtient très facilement le Théorème 2 dans le cas où, pour presque tout $t$, $\sup_x \varphi(x, t) = \infty$. En effet, soit $U$ un voisinage de 0 dans $L^{*\varphi}(m)$, soit $\varepsilon > 0$ tel que $V = \{f \mid \|f\| \leqslant \varepsilon\} \subset U$. Il est clair que $V$ ne contient aucun sous-espace vectoriel non nul. Par conséquent, comme $V$ est fermé et équilibré, $V \cap L$ est borné, donc compact, si $L$ est un sous-espace vectoriel de $L^{*\varphi}(m)$ de dimension finie (cf. [5], paragraphe 3). En effet, si $(x_n)$ était une suite non bornée de points de $V \cap L$ on trouverait une sous-suite $(y_n)$ de $(x_n)$ et un point $e \neq 0$ dans $L$ avec $y_n = s_n e + z_n$, où $s_n \to \infty$ et $\dfrac{z_n}{s_n} \to 0$. On aurait alors $ue \in \overline{V} = V$ pour tout scalaire $u$. Donc il est clair que (1) est vérifié. On a démontré en fait que dans tout espace vectoriel topologique "sans courte droite", c'est à dire qui possède un voisinage de 0 ne contenant aucun sous-espace vectoriel non nul, tout borné mince est précompact. On voit facilement que si l'espace séparé associé à un espace vectoriel topologique $E$ est un sous-espace d'un produit d'espace $E_i$ dont tout borné mince est précompact, alors tout borné mince de $E$ est précompact. On en déduit le résultat suivant.



Proposition 2. *Soit $E$ un espace vectoriel topologique possédant un système fondamental $\mathscr{U}$ de voisinages de 0 vérifiant la propriété suivante. Pour tout $U \in \mathscr{U}$, $\bigcap_{a>0} aU$ est un espace vectoriel et il existe $V \in \mathscr{U}$ tel que $V + \bigcap_{a>0} aU \subset U$. Alors tout borné mince de $E$ est précompact.*

En effet, l'espace séparé associé à $E$ est isomorphe à un sous-espace vectoriel topologique d'un produit d'espaces (métrisables) sans courte droite (cette propriété est en fait équivalente à l'hypothèse faite sur $E$). Car soit $U \in \mathscr{U}$, soit, pour $n = 0, 1, \ldots$, $V_n$ un voisinage de 0 équilibré tel que $V_0 + \bigcap_{a>0} aU \subset U$ et $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$. Alors si $W_n = V_n + \bigcup_{a>0} aU$, $\bigcap_{a>0} aW_n = \bigcap_{a>0} aU$ et $W_{n+1} + W_{n+1} \subset W_n$. Les $W_n$ définissent une topologie vectorielle $\mathscr{T}_U$ sur $E$, pour laquelle l'adhérence de 0 est $\bigcap_{a>0} aU$. L'espace séparé $E_U$ associé à $(E, \mathscr{T}_U)$ est sans courte droite (et métrisable) et on voit de manière classique que l'espace séparé associé à $E$ est isomorphe à un sous-espace du produit des $E_U$, $U \in \mathscr{U}$.

La Proposition 2 s'applique aux espaces localement pseudo-convexes. Notons aussi qu'elle s'applique aux espaces $\Lambda_\varphi P$ de [2], où l'on démontre déjà que tout borné mince de $\Lambda_\varphi P$ est précompact.

**3.** La Proposition 2 ne s'applique pas à tous les espaces $L^{*\varphi}(m)$, pas par exemple à l'espace $L^0(0,1)$ du Théorème 1 (pour tout voisinage $U$ de 0 dans $L^0(0,1)$, l'espace vectoriel engendré par $\bigcap_{a>0} aU$ est l'espace $L^0(0,1)$ entier). Démontrons dans ce paragraphe le Théorème 2 dans le cas général.

Proposition 3. *Soit $E$ un espace vectoriel topologique vérifiant la propriété.*

(B) *Pour tout voisinage $U$ de 0 dans $E$ il existe un voisinage $V$ de 0 dans $E$ vérifiant ceci: pour que l'espace vectoriel engendré par $h$ vecteurs $e_i \in E$, $1 \leqslant i \leqslant h$, soit contenu dans $U$, il suffit qu'il existe $h$ suites de scalaires $s_{i,n} > 0$, $1 \leqslant i \leqslant h$, $s_{i,n}$ et $\dfrac{s_{i-1,n}}{s_{i,n}}$ tendant vers l'infini avec $n$*

*pour tout $i > 1$, avec pour tout $n$*

$$\sum_{i=1}^{h} s_{i,n} e_i \in V.$$

*Alors $E$ vérifie la propriété* (A) *de la Proposition* 1, *et donc tout borné mince de $E$ est précompact.*

Démonstration. Soit $U$ un voisinage de 0 dans $E$ et soit $W$ un voisinage équilibré de 0 tel que $U$ et $V = W+W$ vérifient la condition de (B). Soit $L$ un sous-espace vectoriel de $E$ de dimension finie et soit $(x_n)$ une suite non bornée de $W \cap L$. Montrons qu'on peut extraire de $(x_n)$ une suite $(y_n)$ telle que

$$y_n \in z_n + \bigcap_{a>0} aU, \tag{2}$$

$z_n$ étant une suite bornée de $L$. Cela impliquera l'existence d'une partie $H$ bornée, donc précompacte, de $L$ telle que

$$W \cap L \subset H + \bigcap_{a>0} aU.$$

$E$ vérifiera donc bien la propriété (A) (Remarque 2).

On peut extraire une sous-suite $(y_n^1)$ de $(x_n)$ et trouver un vecteur non nul $e_1 \in L$ tels que $y_n^1 = s_{1,n} e_1 + z_n^1$, où $0 < s_{1,n} \to \infty$ et $\dfrac{z_n^1}{s_{1,n}} \to 0$, et où $z_n^1$ reste dans un sous-espace fermé ($E$ n'est pas supposé séparé) $L_1$ de $L$ ne contenant pas $e_1$. Puis on répète cette opération sur $L_1$ et la suite $z_n^1$ (si cette dernière n'est pas bornée). En poursuivant cette construction on trouve une sous-suite $(y_n)$ de $(x_n)$ et des vecteurs $e_i \in L$ (linéairement indépendants) tels que

$$y_n = \sum_{i=1}^{h} s_{i,n} e_i + z_n$$

où $s_{i,n} > 0$, $s_{i,n}$ et $\dfrac{s_{i-1,n}}{s_{i,n}}$ tendent vers l'infini et où $z_n \in L$ reste borné pour la topologie induite par $E$. Il existe $\varepsilon \in \,]0,1]$ tel que, pour tout $n$, $\varepsilon z_n \in W$, donc tel que $\sum_{i=1}^{h} \varepsilon s_{i,n} e_i \in V \cap L$. Donc l'espace vectoriel engendré par les $e_i$ est contenu dans $U$ et donc dans $\bigcap_{a>0} aU$, ce qui implique (2).

La proposition suivante donne maintenant le théorème 2.

Proposition 4. *Quels que soient $m$ et $\varphi$, l'espace $L^{*\varphi}(m)$ du Théorème 2 vérifie la Propriété* (B) *de la Proposition* 3.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et soit, pour $1 \leqslant i \leqslant h$, $f_i \in L^{*\varphi}(m)$ et des suites $s_{i,n} > 0$, $s_{i,n}$ et $\dfrac{s_{i-1,n}}{s_{i,n}}$ tendant vers l'infini avec $n$. Supposons



que pour tout $n$

$$\Big\| \sum_{i=1}^{h} s_{i,n} f_i \Big\| \leqslant \varepsilon. \tag{3}$$

Soit $\tilde{f}_i$ une fonction appartenant à la classe $f_i$, finie partout, et soit $A = \bigcup_{1 \leqslant i \leqslant h} \{t \in T \mid \tilde{f}_i(t) \neq 0\}$. Pour tout $t \in A$ $\big|\sum_{i=1}^{h} s_{i,n} \tilde{f}_i(t)\big|$ tend vers l'infini. Donc (lemme de Fatou) d'après (3)

$$\int_A \sup_x \varphi(x,t)\, dm(t) \leqslant \varepsilon.$$

Par conséquent, pour toute combinaison linéaire $f$ des $f_i$, $\|f\| \leqslant \varepsilon$. $L^{*\varphi}(m)$ vérifie donc (B).

Remarquons que la Proposition 4, et donc le Théorème 2, se généralisent vraisemblablement à des espaces modulaires ([4]) plus généraux. En effet on n'a pas utilisé le fait que le module $f \to \int \varphi(f(t), t)\, dm(t)$ est additif sur les couples $(f, g)$ tels que $fg = 0$ (cf. [1]).

**4.** La propriété (B) de la proposition 3 est vérifiée par les espaces localement pseudo-convexes, et plus généralement par les espaces vérifiant l'hypothèse de la proposition 2. En effet un espace $E$ vérifie (B) si l'espace séparé associé à $E$ est un sous-espace d'un produit d'espaces vérifiant (B), et tout espace sans courte droite vérifie (B).

Voici ci-dessous une autre classe d'espaces vérifiant (B), qui contient strictement la classe des espaces localement pseudo-convexes ([8]) (mais qui ne contient $L^{*\varphi}(m)$ que si $L^{*\varphi}(m)$ est localement pseudo-convexe).

Proposition 5. *Soit $E$ un espace vectoriel topologique. Supposons que pour tout voisinage $U$ de 0 dans $E$ il existe un voisinage $V$ de 0 et une suite de scalaires $u_n > 0$ telle que*

$$u_n(\underbrace{V + \ldots + V}_{n \text{ termes}}) \subset U, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

*Alors $E$ vérifie* (B) *et donc tout borné mince de $E$ est précompact.*

Démonstration. On posera $+_n A = A + \ldots + A$ ($n$ termes) si $n$ est un entier $\geqslant 1$ et si $A$ est une partie d'un espace vectoriel. Soit $U$ et $V$ des voisinages de 0 équilibrés vérifiant (4), $U$ étant fermé, et soit $e_i$ et $s_{i,n}$ ($0 \leqslant i < h$) vérifiant les conditions de (B), avec $\sum_{i=0}^{h-1} s_{i,n} e_i \in V$. On voit alors que $e_i \in \bigcap_{a>0} a\overline{(+_{2^i} V)}$ car si cela est vrai pour $i < j$ et si $a \neq 0$,

$\dfrac{1}{a} \dfrac{s_{i,n}}{s_{j,n}} e_i \in \overline{+_{2^i} V}$ si $i < j$, $\dfrac{1}{a} \dfrac{s_{i,n}}{s_{j,n}} e_i \to 0$ si $i > j$, donc

$$\frac{1}{a} e_j \in \overline{V - \sum_{i<j} \overline{+_{2^i} V}} = \overline{+_{2^j} V}.$$

Toute combinaison linéaire des $e_i$ $(0 \leqslant i < h)$ appartient à $\bigcap\limits_{a>0} \overline{a(+_{2h}V)}$ et donc à $U$ en vertu de (4).

Remarquons que dans le langage de [7] l'hypothèse de la Proposition 5 signifie que le galbe de $E$ n'est pas (comme espace à convergence) $l_b^0$.

**5.** L'espace vectoriel topologique métrisable $E$ construit ci-dessous ne vérifie pas la propriété (A) de la Proposition 1, mais tout borné mince de $E$ est précompact.

Soit, pour $n \geqslant 1$, $V_n$ le voisinage de 0 de $R^{1+2^n}$ ($R$ est la droite réelle) défini par

$$V_n = \{u(t, \dots t^i, \dots t^{1+2^n}) \mid |u| \leqslant 1,\ t \geqslant 0\} + [-1, 1]^{1+2^n}.$$

Posons, pour $k$ entier $\geqslant 0$,

$$U_{k,n} = V_n + \dots + V_n \quad (2^{n-k} \text{ termes}) \quad \text{quand } k \leqslant n,$$
$$U_{k,n} = [-2^{n-k}, 2^{n-k}]^{1+2^n} \quad \text{quand } k > n.$$

On a donc $U_{k+1,n} + U_{k+1,n} \subset U_{k,n}$. Soit $E = \bigoplus\limits_{n\geqslant 1} R^{1+2^n}$, et soit, pour $k$ entier $\geqslant 0$, $U_k \subset E$ défini par

$$U_k = \{(x_n)_{n\geqslant 1} \in E \mid \forall n,\ x_n \in U_{k,n}\}.$$

Alors les $U_k$ sont des ensembles équilibrés et absorbants dans $E$, $U_{k+1} + U_{k+1} \subset U_k$. On munit $E$ de la topologie vectorielle métrisable admettant l'ensemble des $U_k$ comme système fondamental de voisinages de 0.

Tout borné mince de $E$ est précompact.

Soit en effet, plus généralement, $F$ un espace vectoriel topologique, $P$ un ensemble équicontinu de projections (linéaires) de $F$ dans $F$ tel que pour tout $p \in P$ tout borné mince de $p(F)$ (pour la topologie induite par $F$) soit précompact, et tel que tout sous-espace de dimension finie de $F$ soit contenu dans l'un des $p(F)$, $p \in P$. Alors tout borné mince $B$ de $F$ est précompact. Car soit $U$ un voisinage de 0. Soit $V = \bigcap\limits_{p\in P} p^{-1}(U)$, soit $L$ un sous-espace de dimension finie de $F$ tel que $B \subset V + L$. Soit $p \in P$ tel que $L \subset p(F)$. Si $I$ est l'application identique de $F$,

$$B \subset p(B) + (I-p)(B) \subset p(B) + (I-p)(V) \subset p(B) + U - U.$$

Donc $B$ est précompact, car $p(B)$ est borné et mince dans $p(F)$ (car $p$ est linéaire et continue) donc précompact. Dans le cas de $E$ on prend pour $P$ l'ensemble des projections canoniques sur les sommes finies $\bigoplus\limits_{n\leqslant N} R^{1+2^n}$.

Supposons que $E$ vérifie (A): il existe $n$ tel que pour tout sous-espace $L$ de $E$ de dimension finie et pour tout $a > 0$, il existe une partie finie $H$



de $U_n \cap L$ telle que $U_n \cap L \subset H + aU_0$. En prenant pour $L$ l'espace $R^{1+2^n}$ immergé dans $E$, on trouve que pour tout $a > 0$ il existe un borné $B$ de $R^{1+2^n}$ tel que

$$V_n \subset B + aU_{0,n}.$$

Soit alors $\xi > 0$. Pour tout $t > 0$, $(t^i\xi^i)_{1\leqslant i\leqslant 1+2n} \in V_n$. Donc, $a > 0$ donné, on a pour tout $t > 0$

$$t^i\xi^i = b_i(t) + a\sum_{j=1}^{2^n} u_j(t)t_j(t)^i, \quad 1 \leqslant i \leqslant 1+2^n,$$

où $t_j(t) \geqslant 0$, $|u_j(t)| \leqslant 1$ et $\sup\limits_t |b_i(t)| < \infty$. En prenant $t \geqslant \frac{1}{2^n a}\sup\limits_{i,t}|b_i(t)|$ et en divisant les deux membres par $t^i$ on trouve que $(\xi^i) \in aU_{0,n}$. Donc $(\xi^i) \in \bigcap\limits_{a>0} aU_{0,n}$. Mais puisque $\xi > 0$ cela est absurde car

$$\bigcap_{a>0} aU_{0,n} = \{x = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant 1+2^n} \in R^{1+2^n} \mid x_1 = 0\}.$$

Soit en effet $x \in \bigcap\limits_{a>0} aU_{0,n}$, $x \neq 0$. Pour tout $a > 0$ il existe un ensemble $T_a$ d'au plus $2^n$ scalaires strictement positifs tels que

$$x_i = b_{a,i} + \sum_{t\in T_a} u_{a,t}t^i, \quad 1 \leqslant i \leqslant 1+2^n,$$

où $|b_{a,i}| \leqslant 2^n a$, $|u_{a,t}| \leqslant a$. Soit $T'_a$ l'ensemble des $t \in T_a$ tels que $|u_{a,t}|t^{1+2^n} > \sqrt{a}$. $T'_a$ n'est pas vide si a est assez petit puisque $x \neq 0$. Soit $h_a$ le nombre d'éléments de $T'_a$. Posons

$$y_{a,i} = \sum_{t\in T'_a} u_{a,t}t^i, \quad 1 \leqslant i \leqslant 1+h_a.$$

En exprimant que ce système d'équations en $u_{a,t}$ admet des solutions on trouve que

$$y_{a,1} + \sum_{i=1}^{h_a} (-1)^i y_{a,1+i} \sum_{\substack{S\subset T'_a \\ \mathrm{Card}(S)=i}} \prod_{t\in S} \frac{1}{t} = 0.$$

$|x_i - y_{a,i}| \leqslant 2^n(\sqrt{a} + a)$ si $a \leqslant 1$ et $\frac{1}{t} < (\sqrt{a})^{1/(1+2^n)}$ si $t \in T'_a$. Donc, quand $a \to 0$, $x_1 = \lim y_{a,1} = 0$. Réciproquement on peut vérifier que $x \in \bigcap\limits_{a>0} aU_{0,n}$ si $x_1 = 0$.

On sait (voir par exemple [9], p. 2) qu'il existe sur $R^{1+2^n}$ une $F$-norme $\|\cdot\|_n$ telle que, pour tout $k \geqslant 0$, $x \in \overline{U_{k,n}}$ si et seulement si $\|x\|_n \leqslant 2^{-k}$.

La topologie de $E$ est alors définie par la $F$-norme $\|(x_n)\| = \sup_{n\geqslant 1} \|x_n\|_n$. On peut considérer l'espace $\hat{E}$ des $(x_n) \in \prod_{n\geqslant 1} R^{1+2^n}$ tels que $\|x_n\|_n \to 0$, muni de la $F$-norme $\sup_{n\geqslant 1} \|x_n\|_n$ ($\hat{E}$ est le complété de $E$), ou encore l'espace $\tilde{E}$ des $(x_n) \in \prod_{n\geqslant 1} R^{1+2^n}$ tels que $\sup_{n\geqslant 1} \|tx_n\|_n$ tende vers 0 avec le scalaire $t$, muni de la $F$-norme $\sup_{n\geqslant 1} \|x_n\|_n$. $\tilde{E}$ contient $\hat{E}$, probablement strictement. Je ne sais pas si tout borné mince de $\hat{E}$ est précompact, et je conjecture que $\tilde{E}$ possède un borné mince qui n'est pas précompact.

**6.** On a remarqué que tout sous-espace de produit d'espaces où tout borné mince est précompact hérite de cette propriété. Cette propriété se conserve aussi par passage à la somme directe vectorielle topologique (dans la catégorie de tous les espaces vectoriels topologiques), par exemple parce que les bornés proviennent des cofacteurs ([3]) ou bien en vertu de la propriété de permanence plus générale donnée dans le paragraphe 5 précédent. Je ne sais pas si le quotient, ou le complété, d'un espace dont tout borné mince est précompact possède encore cette propriété. Je ne sais pas par exemple si tout borné mince d'un quotient de $L^0(0,1)$ est précompact.

### Références


[1] L. Drewnowski and W. Orlicz, *A note on modular spaces X*, Bull. Acad. Pol. Sci. 16 (1968), p. 809–814.

[2] C. Fenske und E. Schock, *Nuklearität und lokale Konvexität von Folgenräumen*, Math. Nachr., 45 (1970), p. 327–335.

[3] S. O. Iyahen, *On certain classes of linear topological spaces*, Proc. London Math. Soc. 18 (1968), p. 285–307.

[4] J. Musielak and W. Orlicz, *On modular spaces*, Studia Math. 18 (1959), p. 49–65.

[5] D. Pallaschke und G. Pantelidis, *Homotopieeigenshaften von Sphären in Φ-Räumen und approximative Kompaktheit*, Arch. Math. 20 (1969), p. 176–185.

[6] S. Rolewicz, *Metric Linear Spaces*, Warszawa 1971.

[7] P. Turpin, *Généralisation d'un théorème de S. Mazur et W. Orlicz*, C. R. Acad. Sc. Paris, 273, Série A (1971), p. 506–509.

[8] — *Sur un problème de S. Simons concernant les bornés des espaces vectoriels topologiques*, Bull. Soc. Math. France (Mémoires) (Colloque d'Analyse fonctionnelle de Bordeaux, 1971). A paraître.

[9] L. Waelbroeck, *Topological Vector Spaces and Algebras*, Lecture Notes in Mathematics, 230, Berlin Heidelberg New York 1971.


UNIVERSITÉ PARIS-SUD
CENTRE D'ORSAY
MATHÉMATIQUE

*Received March 1, 1972* (494)

STUDIA MATHEMATICA, T. XLVI. (1973)

# Un exemple d'espace nucléaire dont le dual topologique est réduit à zero

par

JEAN PIERRE LIGAUD

**Sommaire.** S. Rolewicz a posé la question suivante: Est-ce que sur chaque espace métrisable complet et nucléaire, il existe des formes linéaires continues non identiquement nulles ([1], Problème 44 et [2] Problème 9). On construit un exemple qui fournit une réponse négative à cette question.

**1.** D'après [1], pour deux parties $A$ et $B$ d'un espace vectoriel, on note $d_n(A, B)$ la borne inférieure des $\lambda > 0$, tels qu'il existe un sous-espace vectoriel $L$ de dimension $\leqslant n$ avec $A \subset \lambda B + L$. Un espace vectoriel topologique (evt) est dit *nucléaire* s'il existe un $a > 0$ tel que pour tout voisinage $U$ de 0, il en existe un autre $V$ avec $d_n(V, U) \leqslant \frac{1}{(n+1)^a}$ (alors, quelquesoit $\beta > 0$, pour tout voisinage $U$ de 0, il en existe un autre $V$ tel que $d_n(V, U) \leqslant \frac{1}{(n+1)^\beta}$). Dans un espace métrisable possèdant cette propriété, on a pour tout compact $K$ et tout voisinage $U$ de 0, $d_n(K, U) \leqslant \frac{1}{(n+1)^\beta}$, si bien qu'un espace nucléaire au sens de [1] l'est aussi au sens de [2].

**2.** Soit $E$ un espace vectoriel topologique métrisable et de dimension dénombrable. Soit $(e_n)_{n\geqslant 1}$ une base algébrique de $E$ et $(V_n)_{n\geqslant 0}$ une base décroissante de voisinages de 0 de $E$, équilibrés et tels que $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$.

On pose $L_0 = \{0\}$ et on désigne par $L_m$ ($m \geqslant 1$) le sous-espace vectoriel de $E$ engendré par $e_1, \ldots, e_m$. On construit par récurrence une famille $(W_n^p)_{n\geqslant 0, p\geqslant 0}$ de la manière suivante: $W_n^0 = V_n$; $W_n^{p+1} = \bigcap_{m\geqslant 0} \left(\frac{1}{m+1} W_n^p + L_m\right)$.

Lemme 1. *$(W_n^p)$ est une base de voisinages de 0 pour une topologie vectorielle sur $E$, métrisable et nucléaire.*

On notera $E_0$ l'espace vectoriel sous-jacent à $E$, muni de cette nouvelle topologie.