where $r/p = (s-1)(s^p-1)^{-1}$. As s increases from 1 to $+\infty$, r decreases from 1 to 0 (p/r is the slope of a certain chord of a convex function). Since the function $qr^{q-1}(1-rp^{-1})$ attains its maximum value of 1 at $r=1$, the lemma is proved.

References

[1] Hardy, Littlewood and Pólya, *Some simple inequalities satisfied by convex functions*, Messenger of Mathematics 58 (1929), pp. 145–152.
[2] J. Moser, *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Indiana J. 20 (1971), pp. 1077–1092.
[3] N. S. Trudinger, *On embeddings into Orlicz spaces and some applications*, J. Math. Mech. 17 (1967), pp. 473–484.
[4] A. Zygmund, Trigonometric Series, 2-nd ed., 2 vols. Cambridge 1959.

Received November 11, 1971 (435)

STUDIA MATHEMATICA, XLIV. (1972)

Sur les coefficients des séries de Fourier dont les sommes partielles sont positives sur un ensemble

par

J.-P. KAHANE (Paris) et Y. KATZNELSON (Jérusalem)

Sommaire. Si E est un intervalle, les ocoefficients c_n sont bornés. Si E a certaines proprietés arithmetiques, $c_n = O(e^{\varepsilon n})$ pour tout $\varepsilon > 0$. On discute en particulier le cas où E est un dénombrable fermé.

Ce travail a son origine dans le problème, toujours ouvert, de l'existence d'une série trigonométrique dont les sommes partielles tendent vers $+\infty$ sur un ensemble de mesure >0. On sait que la réponse est négative pour les séries de Haar et les séries de Walsh ([7]), et que la réponse est positive si on remplace les sommes partielles par les sommes de Poisson ([6], [1]) même si on impose aux coefficients d'être "presque" de carré sommable ([5]).

Il est facile de voir (Proposition 1) que le problème mentionné est équivalent au suivant: existe-t-il une série trigonométrique dont les sommes partielles sont $\geqslant 0$ sur un ensemble de mesure >0, et dont les coefficients ne soient pas bornés? Cela nous amène á étudier l'ordre de grandeur des coefficients r_n d'une série trigonométrique

$$\sum_0^\infty r_n \cos(nt+\varphi_n) \tag{1}$$

dont les sommes partielles $S_n(t)$ sont $\geqslant 0$ sur un ensemble fermé E. Pour certains ensembles E, assez minces, les coefficients peuvent être arbitrairement grands (Proposition 5). Mais dès que E admet un "point de densité arithmétique" (par exemple si E est de mesure >0) on a $r_n = O(e^{\varepsilon n})$ pour tout $\varepsilon > 0$ (Proposition 4). Si E est dénombrable, on n'a pas nécessairement $r_n = O(1)$; mais on peut choisir E dénombrable de façon que $r_n = O(\omega_n)$, où ω_n est une suite tendant vers l'infini arbitrairement donnée (Proposition 7). Si $E = [0, 2\pi]$, on sait par un théorème de Helson que $r_n = o(1)$ [2]. Il n'en est plus ainsi si E est un intervalle contenu dans $]0, 2\pi[$ (alors $r_n = 1$ et φ_n constant pour $n \geqslant 1$, et r_0 assez grand convient); dans ce cas cependant, on a $r_n = O(1)$ (Proposition 2).

PROPOSITION 1. *Soit E un fermé $\subset [0, 2\pi]$. Il revient au même de dire que* a) *il n'existe pas de série trigonométrique dont les sommes partielles tendent uniformément vers $+\infty$ sur E, ou que* b) *si la série* (1) *a ses sommes partielles $S_n \geqslant 0$ sur E, on a $r_n = O(1)$.*

Preuve. Si a) n'a pas lieu, il existe une série $\sum_{m=0}^{\infty} \varrho_m \cos(mt+\psi_m)$ et une suite $\omega_n \nearrow \infty$ telles que $\sum_{0}^{\infty} \varrho_m \cos(mt+\psi_m) \geqslant \omega_n$ $(t \in E,\ n = 1, 2, \ldots)$. En posant $r_m = \varrho_m$ en général, et $r_{m_j} = \varrho_{m_j} + 2^j$ quand m_j est la première valeur de m telle que $\omega_m \geqslant 2^{j+1}$ $(j = 1, 2, \ldots)$, on voit que b) n'a pas lieu.

Si b) n'a pas lieu, il existe une série (1) dont les sommes partielles $S_m(t)$ sont $\geqslant 0$ sur E, et une suite $m_j \to \infty$ telle que $r_{m_j} \geqslant 2^j$. Posons

$$\begin{aligned} T_m(t) &= S_{m-1}(t) + \tfrac{1}{2} r_m \cos(mt+\varphi_m) - \tfrac{1}{4} r_m \cos(2mt+2\varphi_m) \\ &= S_m(t) - \tfrac{1}{2} r_m \cos(mt+\varphi_m) - \tfrac{1}{4} r_m \cos(2mt+2\varphi_m). \end{aligned}$$

En vertu de l'inégalité

$$\sup(\cos x - \tfrac{1}{2}\cos 2x,\ -\cos x - \tfrac{1}{2}\cos 2x) \geqslant \tfrac{1}{2},$$

on a $T_m(t) \geqslant \frac{1}{4} r_m$ sur E, et les sommes partielles de T_m sont $\geqslant 0$ sur E. En regardant la série trigonométrique $\sum_{1}^{\infty} 2^{-j} T_{m_j}$, on voit que a) n'a pas lieu.

Comme application, on a:

PROPOSITION 2. *Soit E un intervalle. Si la série* (1) *a ses sommes partielles $\geqslant 0$ sur E, on a $r_n = O(1)$.*

1ère preuve. Supposons acquis, ce que nous verrons plus tard (Proposition 3) que $r_n = O(e^{\varepsilon n})$ pour otut $\varepsilon > 0$. Si la conclusion était en défaut, il existerait une autre série (1) dont les sommes partielles tendent uniformément vers $+\infty$ sur E. Donc la fonction harmonique $\operatorname{Re} \sum_{0}^{m} c_n z^n$ $(c_n = r_n e^{i\varphi_n},\ |z| < 1)$ tendrait uniformément vers $+\infty$ quand $\arg z \in E$ et $|z| \nearrow 1$, ce qui est impossible.

2ème preuve. Supposons seulement acquis, ce qui est plus facile à voir, que $r_n = O(e^{An})$ pour un certain $A > 0$. Les polynômes $\sum_{0}^{\infty} c_n z^n$ (c_n comme ci-dessus) ont leurs parties réelles $\geqslant 0$ dans le domaine D: $\arg z \in E$, $|z| < 1$, et ils sont bornés au voisinage de 0. Ils forment donc une famille normale au sens de Montel, et la convergence d'une sous-suite dans D entraine $c_n = O(e^{\varepsilon n})$ pour tout $\varepsilon > 0$; on se trouve donc ramené au cas précédent (ceci nous a été communiqué par M. Zygmund).

On verra plus loin une troisième preuve de la Proposition 2, ne s'appuyant pas sur la Proposition 1.

Etudions l'exemple suivant: $E = \{0, \pi\gamma^j;\ j = j_0+1, j_0+2, \ldots\}$, où $0 < \gamma < 1$, et j_0 est un entier $\geqslant 0$.

PROPOSITION 3. 1) *Si $\gamma > \frac{1}{2}$ et si les sommes partielles de* (1) *sont $\geqslant 0$ sur E, on a $r_n = O(e^{\varepsilon n})$ pour tout $\varepsilon > 0$.* 2) *Si $\gamma = \frac{1}{2}$ ou $\gamma < \frac{1}{3}$ et si ω_n est une suite qui croît arbitrairement vite, il existe série* (1) *dont les sommes partielles sont $\geqslant 0$ sur E, avec $r_n \neq O(\omega_n)$.*

Preuve de la première partie. On va utiliser le fait suivant: s'il est faux que $r_n = O(e^{\varepsilon n})$ pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\alpha > 0$, un $C > 0$ et un ensemble infini d'entiers Λ, tels que pour tout $\nu \in \Lambda$ on ait

$$\sum_{n=0}^{\nu} e^{\alpha(\nu-n)} r_n \leqslant C r_\nu. \tag{2}$$

En effet, le contraire de la conclusion est que, pour tout $\alpha > 0$ et tout $C > 0$, on a l'inégalité opposée à (2) pour tout entier ν assez grand (soit $\nu \geqslant \nu_0$), donc, pour tout entier $N > \nu_0$ et tout $\varrho < e^{-\alpha}$

$$\sum_{\nu=\nu_0}^{N} \sum_{n=0}^{\nu} e^{\alpha(\nu-n)} r_n \varrho^\nu > C \sum_{\nu=\nu_0}^{N} r_\nu \varrho^\nu$$

donc

$$(1-\varrho e^{\alpha})^{-1} \sum_{n=0}^{N} r_n \varrho^n > C \sum_{\nu=\nu_0}^{N} r_\nu \varrho^\nu$$

ce qui, pour $C > (1-\varrho e^{\alpha})^{-1}$, entraine la convergence de $\sum_{0}^{\infty} r_n \varrho^n$, donc ($\varrho$ étant arbitrairement proche de 1), le contraire de l'hypothèse.

Supposons qu'on n'ait pas $r_n = O(e^{\varepsilon n})$ pour tout $\varepsilon > 0$, et que les sommes partielles S_n de (1) soient $\geqslant 0$ sur E. Considérons α, C et Λ comme ci-dessus. Posons $c_n = r_n e^{i\varphi_n}$, et soit $0 < \lambda_0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots \leqslant 1$. Pour tout $\nu \in \Lambda$ on a

$$\lambda_0 S_\nu + (\lambda_1 - \lambda_0) S_{\nu-1} + \ldots + (\lambda_\nu - \lambda_0) S_0 = \operatorname{Re} \sum_{n=0}^{\nu} \lambda_n c_{\nu-n} e^{i(\nu-n)t} \geqslant 0 \qquad (t \in E)$$

soit

$$\operatorname{Re}\big(c_\nu e^{i\nu t} P_\nu(t)\big) \geqslant 0 \qquad (t \in E) \tag{3}$$

avec

$$P_\nu(t) = \sum_{n=0}^{\nu} \frac{c_{\nu-n}}{c_\nu} e^{-int}.$$

D'après (2), les fonctions $P_\nu(t)$ sont analytiques et uniformément bornées dans la bande $|\operatorname{Im} t| < \alpha$ du plan complexe; on peut en extraire une sous-suite qui converge vers une fonction analytique $f(t)$ et, quitte à modifier l'un des λ_n, on peut supposer $f(0) \neq 0$. Soit $\eta > 0$; de (3) résulte l'existence d'une infinité de ν tels que

$$-\frac{\pi}{2}-\eta < \arg\big(c_\nu e^{i\nu t} f(0)\big) < \frac{\pi}{2}+\eta \qquad (t\in E). \tag{4}$$

Utilisons maintenant l'hypothèse $\gamma > \frac{1}{2}$. Elle entraine que, si ν est assez grand, l'ensemble $\{\nu t;\, t\in E\}$ admet un point sur tout arc de longueur $2\pi(1-\gamma)$. En choisissant $\eta = (2\gamma-1)\pi/2$, cela contredit (4). Cette contradiction établit la première partie de la proposition.

Preuve de la seconde partie. Observons d'abord que si $\gamma = \frac{1}{2}$, on a $\sin 2^j t = 0$ sur E, donc toute série $\sum\limits_0^\infty \varrho_j \sin 2^j t$ a ses sommes partielles $\geqslant 0$ (en réalité $=0$) sur E. Si $\gamma \leqslant \frac{1}{3}$, soit G_j l'ensemble des $x>0$ tels que $\sin \pi x\gamma^j \geqslant 0$. L'intervalle $[0, \gamma^{-k}]$ est contenu dans $G_k \cap G_{k+1} \cap G_{k+2} \cap \ldots$ Par induction sur j, on vérifie que $G_k \cap G_{k-1} \cap \ldots \cap G_{k-j}$ contient un intervalle de longueur γ^{j-k} contenu dans l'intervalle $[2\gamma^{-k+1}, \gamma^{-k}]$. Pour tout k, il existe donc un entier $n\in \bigcap\limits_{j=0}^\infty G_j$ supérieur à $2\gamma^{-k+1}$, et on conclut comme précédemment.

La preuve de la première partie suggère la définition suivante. Convenons de dire que x_0 est un *point de densité arithmétique* de E si, pour tout intervalle I centré en x_0, il existe un $\varrho > 0$ et un entier $\nu_0 > 0$ tels que, pour tout $\nu > \nu_0$, l'image de $E\cap I$ par la fonction $e^{i\nu t}$ ait une enveloppe convexe qui contienne le disque $|z| < \varrho$. On a prouvé en réalité ceci:

PROPOSITION 4. *Si E admet un point de densité arithmétique et si les sommes partielles de* (1) *sont $\geqslant 0$ sur E, on a $r_n = O(e^{\varepsilon n})$ pour tout $\varepsilon > 0$.*

L'hypothèse est satisfaite, en particulier, si E est un ensemble de mesure >0.

Dans l'autre sens, rappelons que E est dit *ensemble de Dirichlet* s'il existe une suite $n_k\to\infty$ telle que $\sin n_k t$ tende vers 0 uniformément sur E. On connait de nombreux exemples d'ensembles de Dirichlet [3].

PROPOSITION 5. *Si E est un ensemble de Dirichlet, et si ω_n est une suite qui croît arbitrairement vite, il existe une série* (1) *dont les sommes partielles sont $\geqslant 0$ sur E, avec $r_n \neq O(\omega_n)$.*

La preuve est évidente.

On va maintenant donner une nouvelle preuve de la Proposition 2, et en préciser l'énoncé.

Supposons que E soit l'intervalle $[-l, l]$ $(l<\pi)$. Soit $\mu = \mu(l)$ un entier qu'on déterminera plus tard, et $a = \sup\limits_{m\leqslant\mu} r_m$. Soit ν un entier $>\mu$ tel que $r_\nu \neq 0$ et $r_\nu \geqslant r_n$ pour $\mu+1\leqslant n\leqslant \nu$. On note toujours $c_n = r_n e^{i\varphi_n}$. Alors

$$S_\nu(t) = \mathrm{Re}\Big(\sum_0^\nu c_n e^{int}\Big) = S_\mu(t) + \mathrm{Re}\big(c_\nu e^{i\nu t} P(t)\big),$$

$$P(t) = 1 + \sum_{j=1}^{\nu-\mu-1} P^\wedge(-j) e^{-ijt}, \qquad \text{où } |P^\wedge(-j)| \leqslant 1.$$

Soit φ un réel, à déterminer plus tard. Posons

$$g(t) = -\mathrm{Re}\big(P(t)e^{i\varphi}\big),$$
$$F = \{t \mid c_\nu e^{i\nu t} = |c_\nu| e^{i\varphi}\}.$$

Ainsi

$$g(t) \leqslant |c_\nu|^{-1} S_\mu(t) \quad \text{pour } t\in E\cap F.$$

Soit $d\varrho \sim \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\nu(t-\theta)}$ la measure de masse 1 équidistribuée sur F, et soit $f(t) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} f^\wedge(n) e^{int}$ une fonction $\geqslant 0$, à support dans E, telle que $f^\wedge(0) = 1$ et $\|f\|_A = \sum |f^\wedge(n)| < \infty$. On a

$$\int fg\,d\varrho \leqslant |c_\nu|^{-1} \int f S_\mu\, d\varrho$$

et, comme la measure $S_\mu d\varrho$ a ses coefficients de Fourier bornés en module par $2a$, le second membre est majoré par $2a|c_\nu|^{-1}\|f\|_A$. D'autre part

$$\int fg\,d\varrho = \sum_n fg(-n\nu) e^{-in\nu\theta}$$
$$\geqslant \int_E f(t)g(t)\frac{dt}{2\pi} - \sum_{n\neq 0} |fg(-n\nu)|$$

et, comme g est un polynôme trigonométrique de degré $<\nu-u$ dont tous les coefficients de Fourier sont bornés en module par 1,

$$\sum_{n\neq 0} |fg^\wedge(-n\nu)| \leqslant 2\sum_{|n|>\mu} |f^\wedge(n)| = b.$$

On obtient donc

$$\int_E f(t)g(t)\frac{dt}{2\pi} \leqslant 2a|c_\nu|^{-1}\|f\|_A + b = \delta.$$

Par un choix convenable de φ, le premier membre vaut $\left|\int_E f(t)P(t)\dfrac{dt}{2\pi}\right|$, d'où

$$\left|\int_E f(t)P(t)\frac{dt}{2\pi}\right| \leqslant \delta. \tag{5}$$

Choisissons $f(t) = \Delta(t-s)$, où $|s| < \frac{l}{2}$ et Δ est la fonction "triangle" de base $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$ et de hauteur $2\pi l$. Ainsi $\|\Delta\|_A = 2\pi l^{-1}$, $\Delta\hat{}(n) = \frac{16\sin^2\frac{nl}{4}}{n^2 l^2}$, $b \leqslant 32\mu^{-1}l^{-2}$, et $\delta = 4\pi a l^{-1}|c_\nu|^{-1} + 32\mu^{-1}l^{-2}$. Posons

$$h(s) = \int_{-\pi}^{\pi} \Delta(t-s)P(t)\frac{dt}{2\pi} = 1 + \sum_{j=1}^{\nu-\mu-1} \Delta\hat{}(-j)P\hat{}(-j)e^{-ijs}.$$

On a $|h(s)| < \delta^{-\pi}$ sur $\left[-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right]$ et $|h(s)| \leqslant \|\Delta\|_A = 2\pi l^{-1}$ partout. Comme $h\hat{}(n) = 0$ pour $n > 0$, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log|h(s)|\,ds \geqslant 2\pi \log|h\hat{}(0)| = 0$$

donc $(2\pi - l)\log 2\pi l^{-1} + l\log\delta \geqslant 0$, donc finalement

$$4\pi a l^{-1}|c_\nu|^{-1} + 32\mu^{-1}l^{-2} \geqslant (2\pi l^{-1})^{-2\pi - l/l}.$$

En choisissant $\mu = \mu(l)$ assez grand, on obtient

$$|c_\nu| \leqslant 3a\left(\frac{2\pi}{l}\right)^{2\pi/l}. \tag{6}$$

Le second membre majore donc $\sup_n |c_n|$.

Remarquons que, pour obtenir (6), on a seulement utilisé le fait que $S_\nu \geqslant 0$ sur $E \cap F$. Quitte à remplacer δ par 2δ à partir de (5), et à doubler le second membre de (6), on peut se borner à prendre $\varphi = \varphi_\nu \bmod \pi/2$; alors F est contenu dans l'ensemble des multiples de $\pi/2\nu$. Enonçons le résultat.

Proposition 6. *On peut choisir $\mu = \mu(l)$ assez grand pour que, si les sommes partielles S_n de* (1) *sont $\geqslant 0$ sur $E = [-l, l]$, on ait*

$$\sup_{n\geqslant 0} r_n \leqslant 6 \sup_{0\leqslant m\leqslant\mu} r_m (2\pi l^{-1})^{2\pi l^{-1}}.$$

Si F est l'ensemble des multiples de $\frac{\pi}{2\cdot\nu!}$ et si les S_n sont $\geqslant 0$ sur $E \cap F$, la même conclusion vaut en remplaçant $\sup_{n\geqslant 0} r_n$ par $\sup_{0\leqslant n\leqslant\nu} r_n$.

Comme corollaire, on a la proposition suivante, annoncée dans l'introduction.

Proposition 7. *Etant donné une suite ω_n tendant vers ∞ aussi lentement qu'on veut, il existe un ensemble dénombrable E, ayant un seul point d'accumulation, tel que, pour toute série* (1) *dont les sommes partielles sont $\geqslant 0$ sur E, on ait $r_n = O(\omega_n)$.*

Un analogue de la Proposition 6, d'où résulterait également la Proposition 7, serait le suivant: pour tout $l > 0$, il existe un C_l assez grand pour que, si les S_n sont $\geqslant 0$ sur $[-l, l]$ et si $Nl \geqslant \pi$ (N entier), on ait $r_n \leqslant C_l(r_0 + \ldots + r_N)$ pour tout $n > N$. Cela s'établit facilement par l'absurde à partir de la Proposition 2. Pour obtenir dla Proposition 7 à partir de là, on définit une suite A_N convenable et on impose à E 1° de contenir un dénombrable F tel que, si $S_n \geqslant 0$ sur E pour tout n et $r_0 \leqslant 1$, il s'ensuive $r_n < 3^n$ pour tout n 2° de contenir, pour chaque entier N, un ensemble fini F_N porté par $\left[-\frac{\pi}{N}, \frac{\pi}{N}\right]$ et assez dense sur cet intervalle pour que, compte tenu de $r_n < 3^n$, l'hypothèse $S_n \geqslant 0$ sur F_N ($N < n < A_N$) entraine $S_n + 1 \geqslant 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{N}, \frac{\pi}{N}\right]$.

Donnons enfin des exemples d'ensembles E tels qu'il existe des séries (1) tendant vers $+\infty$ uniformément sur E.

On dit qu'un ensemble est de type AA^+ s'il existe un $a > 0$ tel que, pour tout entier $n > 0$, il existe une fonction $f_n(t) = \sum_{m=u}^{\infty} f_n\hat{}(m)e^{imt}$ égale à 1 sur E, avec $\sum_m |f_n\hat{}(m)| < a$. Des exemples de tels ensembles sont donnés en [4] et [3]. Citons 1° les dénombrables 2° les ensembles tels que le nombre minimum d'intervalles de longueur ε permettant de les couvrir soit $O(\log 1/\varepsilon)$ 3° l'ensemble triadique de Cantor, et plus généralement les ensembles parfaits symétriques à rapport constant ξ ($0 < \xi < \frac{1}{2}$), lorsque $\frac{1}{\xi}$ est un nombre de Pisot.

Proposition 8. *Si E est de type AA^+ (en particulier si E est dénombrable), il existe une série* (1) *tendant uniformément vers $+\infty$ sur E.*

Preuve. On définit par induction une suite de polynômes trigonométriques

$$P_j(t) = \sum_{n_j \leqslant m < n_{j+1}} f_{n_j}\hat{}(m)e^{imt}$$

tels que $\operatorname{Re}P_j(t) > \frac{1}{2}$ sur E; la série $\operatorname{Re}\sum_j P_j(t)$ répond à la question.

References

[1] F. Bagemihl, and W. Seidel, *Some boundary properties of analytic functions*, Math. 61 (1954), p. 186–199.

[2] H. Helson, *Proof of a conjecture of Steinhaus*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 40 (1954), p. 205–206.

[3] J.-P. Kahane, *Série de Fourier absolument convergentes*, 1970.
[4] — et Y. Katznelson, *Sur les algèbres de restrictions des séries de Taylor absolument convergentes à un fermé du cercle*, J. Anal. Math. Jérusalem 23 (1970), p. 185–197.
[5] — et Y. Katznelson, *Sur le comportement radial des fonctions analytiques*, C. R. Acad. Sci. Paris 272 (1971), p. 718–719.
[6] N. Lusin et J. Priwaloff, *Sur l'unicité et la multiplicité des fonctions analytiques*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 42 (1925), p. 143–191.
[7] А. А. Талалян, Ф. Г. Арутюнян, *О сходимости рядов по системе Хаара* $k+\infty$, Мат. Сборник (N. C.) 66 (1965), p. 240–247.

Received November 12, 1971 (433)

STUDIA MATHEMATICA, T. XLIV. (1972)

Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions

by

A. P. CALDERÓN* (Chicago, Ill.)

Dedicated to my teacher, Professor Antoni Zygmund.

Abstract. Various maximal functions $M(f,x)$ are associated with certain distributions in $\bigcup_{k>0} L^p_{-k}$, $1<p<\infty$. They are slight modifications and generalizations of the following function associated with a function $f(x)$ of a single variable

$$\sup_{t>0}\frac{1}{t}\left|\int_0^t f(x+s)\,ds\right|.$$

It is shown that, if K is a singular integral operator, it is possible to estimate $M(Kf,x)$ in terms of $M(f,x)$ provided the latter is finite and integrable to some power p, $p<\infty$ outside a set of finite measure.

1. Introduction. The purpose of this paper is to obtain estimates for the distributions of values of singular integrals in such a way that cancellation due to variability of sign of the functions involved is taken into account. We accomplish this by using various maximal functions associated with a given function. These are defined in terms of primitives or potentials of the latter. For example

$$M(f,x)=\sup_{t>0}\left|\frac{1}{t}\int_0^t f(x+s)\,ds\right|,$$

where f is a function on the real line, or more generally, if $\frac{d^k}{dx^k}F_k=f$ and if $R_k(x,t)$ denotes the remainder of the k term Taylor expansion of F_k at x,

$$M(f,x)=\sup_t|t^{-k}R_k(x,t)|$$

illustrate the type of maximal functions we have in mind. Actually we will discuss some variants and generalizations of these and define them also for certain kinds of distributions. Their interest lies in the fact that if

* This research partially supported by National Science Foundation grant NSF GP-28271.