[4] R. E. Kalman, P. L. Falb, M. A. Arib, *Topics in mathematical control theory*, New York 1969.
[5] Н. Н. Красовский, *Теория управления движением, Линейные системы*, Изд. Наука. Москва 1968.
[6] S. Rolewicz, *On a problem of moments*, Stud. Math. 30 (1968), pp. 183–191.
[7] — *On optimal observability of linear systems*, Proc. of V Congress of Mathematicians, Physicists and Astronoms of Yougoslavia (Ohrid, September 1970) (in print).
[8] А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Управления математической физики*, изд III. Москва 1966.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Received July 28, 1971 (421)

STUDIA MATHEMATICA T. XLIV, (1972)

О приближении функций класса $\varphi(L)$

П. Л. УЛЬЯНОВ (Москва)

Посвящаеться выдающемуся аналитику Антони Зигмунду к пятидесятилетию его научной работы

Резюме. В статье устанавливаются необходимые и достаточные условия возможности приближения функций классов $\varphi(L)$ и $\varphi^+(L)$ алгебраическими полиномами с рациональными коэффициентами или же непрерывными функциями. Эти найденные условия для класса $\varphi(L)$ принципиально отличны от соответствующих условий для класса $\varphi^+(L)$.

§ 1. Введение. Пусть Φ-совокупность четных, неотрицательных, конечных и неубывающих на полупрямой $[0, \infty)$ функций $\varphi(t)$ с $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t) = \varphi(\infty) = \infty$. Через $\varphi(L)$ будем обозначать множество всех тех измеримых на отрезке $[0,1]$ функций $f(x)$, для которых

$$\int\limits_0^1 \varphi\big(f(x)\big)\,dx < \infty.$$

Ниже нам понадобится

Определение. Пусть $\mathscr{D} \equiv \{\tau(x)\}$ — некоторый класс конечных и измеримых функций, определенных на отрезке $[0,1]$. Мы говорим, что класс $\mathscr{D}$ обладает свойством W (свойством Вейерштрасса) относительно множества $G \subset \varphi(L)$, если для всякой функции $f \in G$ и всякого числа $\varepsilon > 0$ пайдется функция $\tau(x) \in \mathscr{D}$ такая, что

$$\int\limits_0^1 \varphi\big(f(x)-\tau(x)\big)\,dx < \varepsilon.$$

В предлагаемой статье будут указаны необходимые и достаточные условия на функцию $\varphi(t)$, при которых тот или иной класс $\mathscr{D}$ обладает свойством W относительно множества $\varphi(L)$, или же некоторого его подмножества G.

§ 2. Вспомогательные утверждения. В этом параграфе мы установим ряд лемм.

Лемма 1. *Пусть функция* $\varphi(t)\in\Phi$ *такова, что*

$$(1)\qquad \text{а)}\ \varphi(0)=0,\qquad \text{б)}\ \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\varphi(t+1)}{\varphi(t)}<\infty.$$

Тогда, для всякой функции $f\in\varphi(L)$ *и всяких чисел* $\varepsilon>0$, $\eta>0$ *найдется функция* $\psi(x)\in C(0,1)$ *с* $\psi(0)=\psi(1)=0$ *такая, что*

$$(2)\qquad \int_0^1\varphi\big(f(x)-\psi(x)\big)dx<\varepsilon\quad \text{и}\quad m\{x\colon x\in[0,1],\ f(x)\neq\psi(x)\}<\eta.$$

Доказательство. Из (1) вытекает, что найдутся числа $t_0>0$ и $A>1$, для которых

$$(3)\qquad \varphi(t_0)>0,\ \varphi(t+1)\leqslant A\varphi(t)\quad \text{при } t\geqslant t_0.$$

Поэтому, если мы возьмем $B=\varphi(1+t_0)$, то получим

$$(4)\qquad \varphi(t+1)\leqslant A\varphi(t)+B\quad \text{при } t\geqslant 0.$$

Из (4) по индукции вытекает, что для всякого целого $N\geqslant 1$

$$(5)\qquad \varphi(t+N)\leqslant A^N\varphi(t)+\frac{A^N-1}{A-1}B\quad \text{при } t\geqslant 0.$$

Так как $f\in\varphi(L)$, то найдется число $\delta\in(0,\eta)$, такое, что

$$(6)\qquad \int_E\varphi\big(f(x)\big)dx<\frac{\varepsilon}{5}\quad \text{при } mE<\delta.$$

По теореме Лузина найдем совершенное множество $P\subset(0,1)$ с $|P|>1-\delta$, что $f(x)$ непрерывна на P. Положим

$$(7)\qquad M=\operatorname*{Sup}_{x\in P}|f(x)|\quad \text{и}\quad N=1+[M].$$

Пусть $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^{\infty}$ — смежные интервалы к P на $(0,1)$, где $(a_1,b_1)=(0,b_1)$, $(a_2,b_2)=(a_2,1)$. Найдем $\delta_1>0$ такое, что

$$(8)\qquad \delta_1<\frac{\varepsilon(A-1)}{5B(A^N-1)}\quad \text{и}\quad \int_E\varphi\big(f(x)\big)dx<\frac{\varepsilon}{5A^N}\quad \text{при } mE<\delta_1$$

и пусть натуральное $\nu\geqslant 2$ таково, что

$$(9)\qquad \sum_{i=\nu+1}^{\infty}(b_i-a_i)<\delta_1.$$

Наконец, выбираем число β, таким, что

$$(10)\qquad 0<\beta<\operatorname{Min}\left\{\frac{b_i-a_i}{2}\ (1\leqslant i\leqslant\nu),\ \frac{\delta_1}{2\nu},\ \frac{\varepsilon(A-1)}{10\nu B(A^N-1)}\right\}.$$

Положим $c_i=a_i+\beta$, $d_i=b_i-\beta$ $(1\leqslant i\leqslant\nu)$ и определим функцию $\psi(x)\in C(0,1)$ следующим образом

$$(11)\qquad \psi(x)=\begin{cases} f(x) & \text{при } x\in P,\\ 0 & \text{при } x=0,\ x=1 \text{ и } x\in[c_i,d_i] \text{ с } 1\leqslant i\leqslant\nu,\\ \text{линейна на каждом из отрезков} & [a_i,c_i],[d_i,b_i] \text{ с } 1\leqslant i\leqslant\nu,\\ & [a_i,b_i] \text{ с } i>\nu.\end{cases}$$

Ясно, что (см. (7) и (11))

$$(12)\qquad \operatorname*{Sup}_{x\in[0,1]}|\psi(x)|=\operatorname*{Sup}_{x\in P}|\psi(x)|=\operatorname*{Sup}_{x\in P}|f(x)|\leqslant N \text{ и } m\{x\colon x\in[0,1],\ f(x)\neq\psi(x)\}<\delta<\eta.$$

Положим

$$E_1=P,\ E_2=\sum_{i=\nu+1}^{\infty}(a_i,b_i),\ E_3=\sum_{i=1}^{\nu}(c_i,d_i),\ E_4=\sum_{i=1}^{\nu}(a_i,c_i)+(d_i,b_i).$$

Тогда, в силу (1), (11) и (6), имеем

$$(13)\qquad \int_{E_1}\varphi\big(f(x)-\psi(x)\big)dx=\varphi(0)mE_1=0\quad \text{и}$$

$$\int_{E_3}\varphi\big(f(x)-\psi(x)\big)dx=\int_{E_3}\varphi\big(f(x)\big)dx\leqslant\int_{[0,1]-P}\varphi\big(f(x)\big)dx<\frac{\varepsilon}{5}.$$

На основании же (12), (5), (9), (8) и (10) получаем

$$(14)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{E_2}\varphi\big(f(x)-\psi(x)\big)dx\leqslant\int_{E_2}\varphi\big(|f(x)|+N\big)dx\leqslant\\ \displaystyle\qquad\leqslant A^N\int_{E_2}\varphi\big(f(x)\big)dx+\frac{A^N-1}{A-1}B\cdot|E_2|<\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}=\frac{2}{5}\varepsilon,\\ \displaystyle\int_{E_4}\varphi\big(f(x)-\psi(x)\big)dx\leqslant\int_{E_4}\varphi\big(|f(x)|+N\big)dx\leqslant\\ \displaystyle\qquad\leqslant A^N\int_{E_4}\varphi\big(f(x)\big)dx+\frac{A^N-1}{A-1}B\cdot 2\nu\beta<\frac{\varepsilon}{5}+\frac{\varepsilon}{5}=\frac{2}{5}\varepsilon.\end{cases}$$

Поэтому (см. (13) и (14))

$$\int_0^1\varphi\big(f(x)-\psi(x)\big)dx=\sum_{j=1}^{4}\int_{E_j}\varphi\big(f(x)-\psi(x)\big)dx<\varepsilon,$$

т.е. (см. еще (12)) неравенства (2) справедливы. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть функция* $\varphi(t)\in\Phi$ *такова, что*

$$\text{(15)}\qquad \text{a)}\ \lim_{t\to+0}\varphi(t)\equiv\varphi(+0)=0 \quad\text{и}\quad \text{b)}\ \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\varphi(t+1)}{\varphi(t)}<\infty.$$

Тогда класс $\mathscr{D}$, *состоящий из всех алгебраических полиномов с рациональными коэффициентами, обладает свойством* W *относительно* $\varphi(L)$.

Доказательство. Пусть $f\in\varphi(L)$ и $\varepsilon>0$ — произвольное число. Согласно Лемме 1 (см. (3)) найдем функцию $\psi\in C(0,1)$ такую, что

(16)

$$m\{x\colon x\in[0,1],\ f(x)\neq\psi(x)\}<\frac{\varepsilon}{3\varphi(1+t_0)}\quad\text{и}\quad\int_0^1\varphi\big(f(x)-\psi(x)\big)dx<\frac{\varepsilon}{3A}.$$

В силу пункта а) из (15) найдется число $\delta\in(0,1)$ такое, что

$$\text{(17)}\qquad \varphi(h)<\frac{\varepsilon}{3}\quad\text{при всех } h\in[0,\delta].$$

Так как $\psi(x)\in C(0,1)$, то найдется полином $\mathscr{P}(x)\in\mathscr{D}$, для которого

$$\text{(18)}\qquad \|\psi-\mathscr{P}\|_c\equiv\operatorname*{Sup}_{x\in[0,1]}|\psi(x)-\mathscr{P}(x)|<\delta.$$

Положим (см. (3))

$$M_1=\{x\colon x\in[0,1],\ 0<|f(x)-\psi(x)|\leqslant t_0\},$$
$$M_2=\{x\colon x\in[0,1],\ f(x)=\psi(x)\},$$
$$M_3=\{x\colon x\in[0,1],\ |f(x)-\psi(x)|>t_0\}.$$

Ясно, что

(19)

$$\int_0^1\varphi\big(f(x)-\mathscr{P}(x)\big)dx\leqslant\sum_{j=1}^3\int_{M_j}\varphi\big(|f(x)-\psi(x)|+|\psi(x)-\mathscr{P}(x)|\big)dx\equiv\sum_{j=1}^3 Q_j,$$

где (см. (18), (16), (17) и (3))

$$\text{(20)}\qquad\begin{cases} Q_1\leqslant\displaystyle\int_{M_1}\varphi\big(|f(x)-\psi(x)|+\delta\big)dx\leqslant\varphi(t_0+1)\,|M_1|<\frac{\varepsilon}{3},\\ Q_2\leqslant\displaystyle\int_{M_2}\varphi(\delta)\,dx<\frac{\varepsilon}{3},\\ Q_3\leqslant\displaystyle\int_{M_3}\varphi\big(|f(x)-\psi(x)|+1\big)dx\leqslant A\int_{M_3}\varphi\big(f(x)-\psi(x)\big)dx<\frac{\varepsilon}{3},\end{cases}$$

т.е. (см. (19) и (20))

$$\int_0^1\varphi\big(f(x)-\mathscr{P}(x)\big)dx<\varepsilon.$$

Это и убеждает нас в справедливости Леммы 2.

Лемма 3. *Пусть функция* $\varphi(t)\in\Phi$ *и*

$$\text{(21)}\qquad \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\varphi(t+1)}{\varphi(t)}=\infty.$$

Тогда найдется функция $f\in\varphi(L)$ *такая, что*

$$\text{(22)}\qquad \int_0^{\frac12}\varphi\big(f(x)+\delta\big)dx=\infty,\qquad\int_{\frac12}^1\varphi\big(f(x)+\eta\big)dx=\infty$$

дла всех $\delta>0$ *и всех* $\eta<0$.

Доказательство. Из (21) непосредственно вытекает, что

$$\text{(23)}\qquad \overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\varphi(t+\varepsilon)}{\varphi(t)}=\infty\quad\text{для всякого } \varepsilon>0.$$

Поэтому, найдутся числа $1<t_1<t_2<\ldots<t_n<\ldots$, для которых

$$\text{(24)}\qquad \varphi(t_n)>2^n\quad\text{и}\quad\varphi\Big(t_n+\frac1n\Big)>2^n\varphi(t_n)\quad\text{при } n\geqslant1.$$

Положим $C_n=2^{-n}$, $d_n=C_n+\big(n^2\varphi(t_n)\big)^{-1}$ при $n\geqslant1$. Ясно, что отрезки $[c_n,d_n]\subset[0,1]$ и не пересекаются. Пусть

$$\text{(25)}\qquad \psi(x)=\begin{cases} t_n & \text{при } x\in[c_n,d_n]\ \text{сп}\geqslant1,\\ 0 & \text{при } x\in[0,1]-\sum\limits_{n=1}^{\infty}[c_n,d_n].\end{cases}$$

Очевидно, что (см. (25)) $\psi(x)\in\varphi(L)$, ибо

$$\text{2 6)}\qquad \int_0^1\varphi\big(\psi(x)\big)dx\leqslant\varphi(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\int_{c_n}^{d_n}\varphi(t_n)\,dx\leqslant\varphi(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty.$$

С другой стороны, для всякого числа $a>0$ найдется такое целое $m\geqslant1$, что $am>1$. Поэтому (см. (24))

$$\int_0^1\varphi\big(\psi(x)+a\big)dx\geqslant\sum_{n=m}^{\infty}\int_{c_n}^{d_n}\varphi\big(\psi(x)+a\big)dx\geqslant\sum_{n=m}^{\infty}\frac{\varphi\Big(t_n+\dfrac1n\Big)}{n^2\varphi(t_n)}\geqslant\sum_{n=m}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}=\infty,$$

(т.е.

$$\text{(27)}\qquad \int_0^1\varphi\big(\psi(x)+a\big)dx=\infty\quad\text{при всяком } a>0.$$

Теперь положим

$$\text{(28)}\qquad f(x)=\begin{cases}\psi(2x) & \text{при } 0\leqslant x\leqslant\frac12,\\ -\psi(2x-1) & \text{при } \frac12<x\leqslant1.\end{cases}$$

Функция $f \in \varphi(L)$, ибо (см. (26) и (28))

$$\int\limits_0^1 \varphi\big(f(x)\big)\,dx = \int\limits_0^{1/2} \varphi\big(\psi(2x)\big)\,dx + \int\limits_{1/2}^1 \varphi\big(\psi(2x-1)\big)\,dx =$$

$$= \tfrac{1}{2}\int\limits_0^1 \varphi\big(\psi(z)\big)\,dz + \tfrac{1}{2}\int\limits_0^1 \varphi\big(\psi(u)\big)\,du = \int\limits_0^1 \varphi\big(\psi(x)\big)\,dx < \infty.$$

С другой стороны, для $\delta > 0$ имеем (см. (27))

$$\int\limits_0^{1/2} \varphi\big(f(x)+\delta\big)\,dx = \int\limits_0^{1/2} \varphi\big(\psi(2x)+\delta\big)\,dx = \tfrac{1}{2}\int\limits_0^1 \varphi\big(\psi(z)+\delta\big)\,dz = \infty,$$

а для $\eta < 0$ получаем (см. (27) и (28))

$$\int\limits_{1/2}^1 \varphi\big(f(x)+\eta\big)\,dx = \int\limits_{1/2}^1 \varphi\big(\psi(2x-1)-\eta\big)\,dx = \tfrac{1}{2}\int\limits_0^1 \varphi\big(\psi(u)-\eta\big)\,du = \infty,$$

т.е. (22) справедливо. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Пусть $\varphi \in \Phi$ удовлетворяет условию* (21). *Тогда найдется функция $\mathscr{F}(x) \in \varphi(L)$ такая, что*

$$\int\limits_0^1 \varphi\big(\mathscr{F}(x)+\tau(x)\big)\,dx = \infty \tag{29}$$

для любой функции $\tau(x) \in C(0,1)$ с $\tau(x) \not\equiv 0$.

Доказательство. По Лемме 3 найдем функцию $f \in \varphi(L)$, которая удовлетворяет равенствам (22). Пусть $d \in (0,1)$ некоторое число. Положим $\psi(z) = f\left(\dfrac{z}{d}\right)$ при $z \in [0, d]$. Функция $\psi(z)$ принадлежит множеству $\varphi(L)$ на отрезке $[0, d]$, ибо

$$\int\limits_0^d \varphi\big(\psi(z)\big)\,dz = d\int\limits_0^1 \varphi\big(f(x)\big)\,dx = d\cdot I, \quad \text{где} \quad I = \int\limits_0^1 \varphi\big(f(x)\big)\,dx. \tag{30}$$

Далее, пусть $P \subset (0,1)$ совершенное нигде не плотное множество с мерой $|P| = d$. Известно, что тогда найдется отображение $z = \chi(u)$ (напр. $z = \chi(u) = m\{t\colon t \in P, t \leqslant u\}$ множества P на отрезок $[0, d]$, что функция $z = \chi(u)$ осуществляет взаимно однозначное отображение некоторого множества $P_1 \subset P$ с $|P_1| = d$ на множество $E \subset [0, d]$ с $|E| = d$ и при этом измеримые множества переходят в измеримые множества той же меры. Поэтому, если $\gamma(u) = \psi(\chi(u))$ при $u \in P$, то (см. (30))

$$\int\limits_P \varphi\big(\gamma(u)\big)\,du = \int\limits_P \varphi\Big(\psi\big(\chi(u)\big)\Big)\,du = \int\limits_0^d \varphi\big(\psi(z)\big)\,dz = d\cdot I = |P|\cdot I. \tag{31}$$

Пусть, теперь, $P_0 \subset (0,1)$ совершенное нигде не плотное на $(0,1)$ множество с мерой $|P_0| = \frac{1}{2}$ и со смежными на $(0,1)$ интервалами

$(a_k^{(0)}, b_k^{(0)})$, где $k \geqslant 1$. На каждом смежном интервале $(a_k^{(0)}, b_k^{(0)})$ с $k \geqslant 1$ строим „сжатое" множество P_0 и получаем совершенное множество $P_1^{(k)} \subset (a_k^{(0)}, b_k^{(0)})$ меры $|P_1^{(k)}| = \frac{1}{2}(b_k^{(0)} - a_k^{(0)})$ и со смежными на $(a_k^{(0)}, b_k^{(0)})$ интервалами $(c_i^{(k)}, d_i^{(k)})$, где $i \geqslant 1$. Перенумеруем все нитервалы $\{(c_i^{(k)}, d_i^{(k)})\}_{i,k=1}^{\infty}$ в одну последовательность $\{(a_\nu^{(1)}, b_\nu^{(1)})\}_{\nu=1}^{\infty}$ в порядке, например, невозрастания их длин. На каждом из интервалов $(a_k^{(1)}, b_k^{(1)})$ с $k \geqslant 1$ строим опять „сжатое" множество P_0 и получаем множество $P_2^{(k)} \subset (a_k^{(1)}, b_k^{(1)})$ меры $|P_2^{(k)}| = \frac{1}{2}(b_k^{(1)} - a_k^{(1)})$ и со смежными на $(a_k^{(1)}, b_k^{(1)})$ интервалами $(\bar{c}_i^{(k)}, \bar{d}_i^{(k)})$, где $i \geqslant 1$. Интервалы $(\bar{c}_i^{(k)}, \bar{d}_i^{(k)})$ с $i \geqslant 1$ и $k \geqslant 1$ занумеруем в одну последовательность $\{(a_\nu^{(2)}, b_\nu^{(2)})\}_{\nu=1}^{\infty}$. Продолжая этот процесс неограниченно, мы получим множества $P_j^{(k)}$ и интервалы $(a_k^{(j)}, b_k^{(j)})$, которые удовлетворяют условиям:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{а) множества } P_0, P_j^{(k)} \text{ с } j \geqslant 1 \text{ и } k \geqslant 1 \text{ взаимно не пересекаются} \\ \quad \text{и } P_j^{(k)} \subset (a_k^{(j-1)}, b_k^{(j-1)}) \text{ при } k \geqslant 1 \text{ и } j \geqslant 1; \\ \text{б) мера} |P_0| = \tfrac{1}{2}, \text{ а мера } m_{j,k} \equiv |P_j^{(k)}| = \tfrac{1}{2}(b_k^{(j-1)} - a_k^{(j-1)}); \\ \text{в) суммы } \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} |P_j^{(k)}| = \frac{1}{2^{j+1}}\ (j \geqslant 1),\ |P_0| + \sum_{j,k=1}^{\infty} |P_j^{(k)}| = 1. \end{array}\right. \tag{32}$$

Пусть $d(E)$ обозначает диаметр множества $E \subset [0,1]$, т.е. $d(E) = \operatorname*{Sup}\limits_{x,y \in E} |x-y|$. В силу пункта в) из (32) мера $|P_j^{(k)}| \to 0$ при $j+k \to \infty$. Но тогда (см. (32))

$$d(P_j^{(k)}) \leqslant b_k^{(j-1)} - a_k^{(j-1)} = 2\,|P_j^{(k)}| \to 0 \quad \text{при } j+k \to \infty. \tag{33}$$

В силу пункта а) из (32) мы можем построить функцию

$$F(u) = \begin{cases} f\left(\dfrac{\chi_{j,k}(u)}{m_{j,k}}\right) & \text{при } u \in P_j^{(k)} \text{ с } j \geqslant 1,\ k \geqslant 1, \\ f\left(\dfrac{\chi_0(u)}{|P_0|}\right) & \text{при } u \in P_0, \\ 0 & \text{при } u \in [0,1] - \Big\{P_0 + \displaystyle\sum_{j,k=1}^{\infty} P_j^{(k)}\Big\}, \end{cases} \tag{34}$$

где $\chi_0(u)$ и $\chi_{j,k}(u)$ обозначают отображения соответствующих множеств P_0 и $P_j^{(k)}$ на отрезки $[0, \frac{1}{2}]$ и $[0, m_{j,k}]$ с сохранением мер измеримых множеств. Функция $\mathscr{F} \in \varphi(L)$, ибо (см. (34), (32) и (31))

$$\int\limits_0^1 \varphi\big(\mathscr{F}(u)\big)\,du \leqslant \varphi(0) + \int\limits_{P_0} \varphi\left(f\left(\frac{\chi_0(u)}{|P_0|}\right)\right) du + \sum_{j,k=1}^{\infty} \int\limits_{P_j^{(k)}} \varphi\left(f\left(\frac{\chi_{j,k}(u)}{m_{j,k}}\right)\right) du =$$

$$= \varphi(0) + |P_0|\cdot I + \sum_{j,k=1}^{\infty} |P_j^{(k)}|\cdot I = \varphi(0) + I < \infty.$$

Убедимся, теперь, что справедливо равенство (29). Пусть $\tau(x)$-произвольная непрерывная функция на отрезке $[0,1]$ и $\tau(x)\not\equiv 0$. Тогда найдется интервал $(a,b)\subset(0,1)$ такой, что

$$(35)\qquad 1)\ \inf_{x\in(a,b)}\tau(x)=a>0 \quad \text{или же } 2)\ \sup_{x\in(a,b)}\tau(x)=\beta<0.$$

Рассмотрим случай 1) из (35). Возьмем произвольный отрезок $[c,d]\subset(a,b)$. Так как $P_j^{(k)}$ нигде не плотные множества и (см. пункт в) из (32))

$$P_0\cdot[c,d]+\sum_{j,k=1}^{\infty}[c,d]P_j^{(k)}=[c,d]-E \quad \text{где } |E|=0,$$

то на $[c,d]$ находятся точки из бесконечно многих $P_j^{(k)}$. Но диаметры $d(P_j^{(k)})\to 0$ при $j+k\to\infty$ (см. (33)), и потому найдутся такие j_0 и k_0, что $P_{j_0}^{(k_0)}\subset(a,b)$. Но тогда (см. (22) и пункт 1) из (35))

$$\int_0^1\varphi\big(\mathcal{F}(u)+\tau(u)\big)du\geqslant\int_{P_{j_0}^{(k_0)}}\varphi\big(\mathcal{F}(u)+\tau(u)\big)du\geqslant$$

$$\geqslant\int_{P_{j_0}^{(k_0)}\cdot\{u:\,\mathcal{F}(u)\geqslant 0\}}\varphi\big(\mathcal{F}(u)+\tau(u)\big)du\geqslant$$

$$\geqslant\int_{P_{j_0}^{(k_0)}\cdot\{u:\,\mathcal{F}(u)\geqslant 0\}}\varphi\big(\mathcal{F}(u)+a\big)du=$$

$$=\int_{P_{j_0}^{(k_0)}\cdot\left\{u:\,f\left(\frac{\chi_{j_0,k_0}(u)}{m_{j_0,k_0}}\right)\geqslant 0\right\}}\varphi\left(f\left(\frac{\chi_{j_0,k_0}(u)}{m_{j_0,k_0}}\right)+a\right)du\geqslant$$

$$\geqslant\int_0^{\frac{1}{2}m_{j_0,k_0}}\varphi\left(f\left(\frac{x}{m_{j_0,k_0}}\right)+a\right)dx=m_{j_0,k_0}\int_0^{1/2}\varphi\big(f(t)+a\big)dt=\infty.$$

Аналогично убеждаемся в справедливости (29) и в случае 2) из (35). Лемма 4 доказана.

§ 3. Приближение функций. Пусть $\varphi\in\Phi$ и $\varphi^+(L)$ — множество всех измеримых функций $f(x)$, для которых $f\in\varphi(L)$ и $f(x)\geqslant 0$ при $x\in[0,1]$.

Теорема 1. *Пусть $\varphi\in\Phi$, а $\mathcal{D}$ — класс всех алгебраических полиномов с рациональными коэффициентами. Тогда класс $\mathcal{D}$ обладает свойством W относительно $\varphi(L)$ в том и только том случае, когда выполнены условия* а) *и* б) *из* (15).

Достаточность условий (15) вытекает из Леммы 2, а необходимость условия б) из (15) следует из Леммы 4. Необходимость же условия а) из (15) вытекает из того, что если $\varphi(+0)=a>0$, то для функции $f(x)=e^x$ и для всякого полинома $\mathcal{P}(x)$ справедливо неравенство

$$(36)\qquad \int_0^1\varphi\big(e^x-\mathcal{P}(x)\big)dx\geqslant a>0.$$

Теорема 2. *Пусть $\varphi\in\Phi$, а $\mathcal{D}\equiv C(0,1)$. Тогда класс $\mathcal{D}$ обладает свойством W относительно $\varphi(L)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия* а) *и* б) *из* (1).

Достаточность условий (1) вытекает из Леммы 1, а необходимость условия б) в (1) следует из Леммы 4. Необходимость же условия $\varphi(0)=0$ очевидна.

Следствие 1. *Если множество $\varphi(L)$ с $\varphi\in\Phi$ и $\varphi(+0)=0$ можно аппроксимировать непрерывными функциями, то $\varphi(L)$ можно аппроксимировать и алгебраическими полиномами.*

Следствие 2. *Если множество $\varphi(L)$ с $\varphi\in\Phi$ и $\varphi(+0)=0$ таково, что для всякого элемента $f\in\varphi(L)$ найдется непрерывная функция $\tau(x)\not\equiv 0$, для которой $f+\tau\in\varphi(L)$, то все элементы из $\varphi(L)$ можно приблизить алгебраическими полиномами.*

Это следствие вытекает из Леммы 4 и Теоремы 1.

Теорема 3. *Класс $\mathcal{D}$ алгебраических полиномов с рациональными коэффициентами обладает свойством W относительно $\varphi^+(L)$ тогда и только тогда, когда $\varphi(+0)=0$.*

Доказательство. Необходимость условия $\varphi(+0)=0$ была установлена в Теореме 1 (см. (36)). Докажем достаточность условия $\varphi(+0)=0$. Пусть $\varphi(+0)=0$, функция $f\in\varphi^+(L)$ и $\varepsilon>0$ — произвольное число. Возьмем число $\delta\in(0,1)$ такое, что

$$(37)\qquad \varphi(\delta)<\frac{\varepsilon}{8}\quad\text{и}\quad\int_E\varphi\big(f(x)\big)dx<\frac{\varepsilon}{8}\quad\text{при } E\subset[0,1] \text{ с } |E|<\delta.$$

Найдем совершенное множество $P\subset(0,1)$ со смежными интервалами $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^{\infty}$ и мерой $|P|>1-\delta$ такое, что $f\in C(P)$. Пусть $M=\operatorname{Sup}_{t\in P}f(t)$, а ν и $\beta>0$ такие числа, что

(38)

$$\sum_{i=\nu+1}^{\infty}(b_i-a_i)<\frac{\varepsilon}{8\big(1+\varphi(2M)\big)}\equiv\eta,\qquad \beta<\operatorname{Min}\left\{\frac{b_i-a_i}{2}\,(1\leqslant i\leqslant\nu),\frac{\eta}{2\nu}\right\}.$$

Придерживаясь обозначений Леммы 1 строим функцию $\psi(x)$ вида (11) с соответствующими числами c_i, d_i $(1\leqslant i\leqslant\nu)$ и множествами E_i $(1\leqslant i\leqslant 4)$. Ясно, что $\psi(x)\geqslant 0$ при $x\in[0,1]$ и $\|\psi\|_c=M$. Теперь найдем алгебраический полином $\mathcal{P}_1(x)$ с рациональными коэффициентами такой, что $\alpha_0 \equiv \|\psi-\mathscr{P}_1\|_c \leqslant \mathrm{Min}\left\{\frac{\delta}{8}, \frac{M}{8}\right\}$. Функция $\psi(x)$ неотрицательна и потому полином $\mathscr{P}(x) = \alpha+\mathscr{P}_1(x)$, где $\alpha\in[\alpha_0, 2\alpha_0]$ — рационально, обладает свойствами (см. (11)):

(39)
$$\mathscr{P}(x)\geqslant 0 \text{ при } x\in[0,1],\quad \mathscr{P}(x)<\delta \text{ при } x\in E_3,\quad \|\mathscr{P}\|_c\leqslant 2M,\quad \|\psi-\mathscr{P}\|_c<\delta.$$

Очевидно, что (см. (11), (39) и (37))

$$(40)\qquad \int\limits_{E_1}\varphi\big(f(x)-\mathscr{P}(x)\big)\,dx = \int\limits_{E_1}\varphi\big(\psi(x)-\mathscr{P}(x)\big)\,dx \leqslant \int\limits_{E_1}\varphi(\delta)\,dx < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Функция $f(x)\geqslant 0$ при $x\in[0,1]$ и потому (см. (39), (37) и (38))

$$\int\limits_{E_2+E_4}\varphi\big(f(x)-\mathscr{P}(x)\big)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{(E_2+E_4)\{x:f(x)\geqslant\mathscr{P}(x)\}}\varphi\big(f(x)\big)\,dx + \int\limits_{(E_2+E_4)\{x:\mathscr{P}(x)>f(x)\}}\varphi\big(\mathscr{P}(x)\big)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{[0,1]-\mathscr{P}}\varphi\big(f(x)\big)\,dx + \int\limits_{E_2+E_4}\varphi(2M)\,dx < \frac{\varepsilon}{8}+\varphi(2M)\{\eta+2\nu\beta\} < \frac{3}{8}\varepsilon.$$

Наконец, используя (11), (39) и (37), получаем

(42)
$$\int\limits_{E_3}\varphi\big(f(x)-\mathscr{P}(x)\big)\,dx \leqslant \int\limits_{E_3\{x:f(x)\geqslant\mathscr{P}(x)\}}\varphi\big(f(x)\big)\,dx + \int\limits_{E_3\{x:\mathscr{P}(x)>f(x)\}}\varphi\big(\mathscr{P}(x)\big)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{[0,1]-\mathscr{P}}\varphi\big(f(x)\big)\,dx + \int\limits_{E_3}\varphi(\delta)\,dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Из (40)–(42) вытекает, что $\int\limits_0^1\varphi\big(f(x)-\mathscr{P}(x)\big)\,dx<\varepsilon$, т.е. класс $\mathscr{D}$ обладает свойством W относительно $\varphi^+(L)$ при условии $\varphi(+0)=0$. Теорема 3 доказана.

Оценивая интеграл $\int\limits_0^1\varphi\big(f(x)-\psi(x)\big)\,dx$ почти также, как в Теореме 3, мы убедимся, что справедлива

Теорема 4. *Класс $\mathscr{D}\equiv C(0,1)$ обладает свойством W относительно $\varphi^+(L)$ тогда и только тогда, когда $\varphi(0)=0$.*

Замечания. 1) Теоремы 1 и 3 остаются справедливыми и для случая класса $\mathscr{D}$, состоящего из тригонометрических полиномов или из полиномов по системе Хаара (Уолша, Шаудера и др.).

2) В Теоремах 3 и 4 приближающие функции $\mathscr{P}(x)$ и $\psi(x)$ можно считать неотрицательными.

3) Утверждения Теорем 3 и 4 указывают на принципиальное отличие (см. Теоремы 1 и 2) вопроса приближения функций из $\varphi^+(L)$ от соответствующего вопроса для $\varphi(L)$.

4) Пусть функция $M(t)$ выпукла вниз, $M(0)=0$ и $t^{-1}M(t)\to\infty$ при $t\to\infty$. Для таких функций Орлич построил (см. [3], [4] и [6] гл. 4) пространства L_M^* типа B и установил, что они сепарабельны тогда и только тогда, когда $M(2t)=O\{M(t)\}$ (Δ_2-условие). Установленные нами результаты носят совсем иной характер. Во-первых, рассматриваемые нами функции $\varphi(t)$ могут иметь бесконечно много точек разрыва; во-вторых, функции $\varphi(t)$ могут иметь медленный рост (например, $\varphi(t)=\ln(1+|t|)$); в третьих, наше условие (15) значительно менее ограничительно, нежели Δ_2-условие. Отметим, что если $M(t)$ удовлетворяет Δ_2-условию, то $M(t)$ растет не быстрее некоторой степенной функции, а если $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (15), то $\varphi(t)$ растет не быстрее некоторой показательной функции (и может быть таковой, как, например, $\varphi(t)=2^{|t|}-1$). Еще заметим, что наши классы $\varphi(L)$ не сводятся к классам $M(L)$, ибо например, существует функция $\varphi(t)\in C^{(\infty)}(-\infty,\infty)$ с $t^2\leqslant\varphi(t)\leqslant t^3$ $(0\leqslant t<\infty)$ такая, что $\varphi(L)\neq M(L)$ ни для какой выпуклой функции $M(t)$.

5) Установленные выше результаты были ранее сформулированы нами без доказательства в статье [5].

6) После того как эта статья была сдана в печать профессор В. Орлич любезно сообщил нам, что по исследуемым вопросам ранее были опубликованы работы [1] и [2]. Теорема 2, рассматриваемая нами для случая $\varphi\in\Phi$, была установлена в работе [2] при предположениях, когда $\varphi\in\Phi$, $\varphi\in C(0,\infty)$, $\varphi(0)=0$ и $\varphi(t)>0$ при $t>0$.

Цитированная литература

[1] Z. Birnbaum, W. Orlicz, *Über Approximation im Mittel*, Studia Math., 2 (1930), ст. 197–206.

[2] — *Über Approximation im Mittel*, Nachrichten Gesell. Wissen. Göttingen, Mathem.-Physik., 1930, ст. 338–343.

[3] W. Orlicz, *Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B*, Bullt Intern. acad. Polon., classe A sci. math. et natur., Cracovie (1932), ст. 207–220.

[4] — *Über Räume L^m*, Bull. Intern. acad. Polon., classe A sci. math. e. natur., Cracovie (1936).

[5] П. Л. Ульянов, *Теоремы Вейерштрасса для функций класса $\varphi(L)$*, Доклады АН СССР, 197, 5 (1971), ст. 1030-1033.

[6] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды*, М.-Л., 1939.

Received August 5, 1971 (423)