and by the main result of [3]

$$|a_{n,j}^{(m)}| \leqslant A_m \cdot n^{-1/2} \cdot \sum_{i=2\nu-2-m}^{2\nu} |A_{n;i,j}^{(m)}| \leqslant B_m \cdot n^{1/2} \cdot \sum_{i=2\nu-2-m}^{2\nu} r_m^{|i-j|}$$
$$\leqslant C_m^{(0)} \cdot n^{1/2} \cdot r^{|j-2\nu|},$$

with some constants $B_m > 0$ and $C_m^{(0)} > 0$.

Now, suppose that (20) holds for given k, $0 \leqslant k \leqslant m$. Then according to the differentiation formula (P.4) of [2] we obtain

$$a_{n,j}^{(m,k+1)} = \frac{a_{n,j}^{(m,k)} - a_{n,j-1}^{(m,k)}}{s_{n,j+m-k} - s_{n,j-1}}(m-k+1)$$

and therefore

$$|a_{n,j}^{(m,k+1)}| < (m-k+1) \cdot 2n \cdot C_n^{(k)} \cdot n^{k+1/2} \cdot (r_m^{|j-2\nu|} + r_m^{|j-1-2\nu|}),$$
$$< C_m^{(k+1)} \cdot n^{(k+1)+1/2} \cdot r_m^{|j-2\nu|}.$$

with some constant $C^{(k+1)}$ and this proves (20) for all k, $0 \leqslant k \leqslant m+1$.

We are ready now to prove the Theorem in its complete generality.

Let us denote by $\langle t \rangle$ the integer determined by the inequalities $s_{n,\langle t\rangle -1} \leqslant t < s_{n,\langle t\rangle}$.

Then since supp $N_{n,j}^{(m-k)} = \langle s_{n,j-1}, s_{n,j+m-k+1} \rangle$, we have

$$f_n^{(m,k)}(t) = \sum_{j=\langle t\rangle-(m-k)-1}^{\langle t\rangle} a_{n,j}^{(m,k)} N_{n,j}^{(m-k)}(t)$$

and therefore

$$|f_n^{(m,k)}(t)| < C_m \cdot n^{k+1/2} \sum_{j=\langle t\rangle-(m-k)-1}^{\langle t\rangle} r_m^{|j-2\nu|} \leqslant D_m n^{k+1/2} r_m^{|\langle t\rangle-2\nu|}$$

with some constants $C_m > 0$ and $D_m > 0$ whence (4) follows with $q_m = r_m^{1/2}$.

References

[1] Z. Ciesielski, *Properties of the orthonormal Franklin system*, Studia Math. 23 (1963), p. 141–157

[2] — and J. Domsta, *Construction of an orthonormal basis in $C^m(I^d)$ and $W_p^m(I^d)$*, ibidem 41 (1972), pp. 211–224.

[3] J. Domsta, *A theorem on B-splines*, ibidem 41 (1972), p. 291–314.

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK
MATHEMATICS INSTITUTE OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES

Received September 7, 1971 (382)

STUDIA MATHEMATICA T. XLIV. (1972)

Series trigonometriques speciales et corps quadratiques

par

Yves MEYER (Orsay, France)

En hommage au Professeur Zygmund

Sommaire. Soit E l'espace de toutes les fonctions presque-périodiques dont les fréquences sont des nombres de Pisot irrationnels d'un corps quadratique réel. Deux remarquables propriétés fonctionnelles de E sont étudiées.

Introduction. On construit un espace vectoriel E de fonctions continues et bornées $f: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ (1), invariant par translation, et possédant les deux propriétés suivantes:

(a) toute fonction continue $g: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ coïncide sur tout compact S de mesure de Lebesgue strictement inférieure à 1 avec une certaine fonction f de E

(b) pour tout compact S intégrable au sens de Riemann et dont la mesure de Lebesgue est strictement supérieure à 1, les normes $\sup_S |f|$ et $\sup_{\mathbf{R}} |f|$ sont équivalentes sur E.

En utilisant, au lieu de fréquences entières, l'ensemble Λ des nombres de Pisot d'un corps quadratique réel et en appelant E l'espace de Banach de toutes les fonctions presque périodiques dont les fréquences appartiennent à Λ, on obtient cette généralisation surprenante de l'espace des fonctions périodiques de période donnée.

Les § 1, 2 et 3 sont consacrés aux énoncés des définitions et des théorèmes. Les démonstrations occupent les § 4, 5 et 6. Enfin le § 7 contient des indications pour diverses généralisations à des espaces de fonctions à valeurs complexes définies sur $\mathbf{R}^n$ ou sur $\mathbf{Q}_p$.

1. Définitions et notations. Une somme trigonométrique est une fonction continue $f: \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ qui s'écrit $f(t) = \sum_{\lambda \in F} a_\lambda \exp 2\pi i\lambda t$. Les λ tels que $a_\lambda \neq 0$ s'appellent les *fréquences de f*. L'ensemble F des fréquences de f est le spectre de f.

(1) $\mathbf{R}$ désigne le corps des nombres réels et $\mathbf{C}$ celui des nombres complexes.

Soit $\mathscr{K} = \boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ un corps quadratique réel. Soit $x \to \bar{x}$ l'automorphisme de conjugaison de $\mathscr{K}$. Appelons $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers algébriques de $\mathscr{K}$ et $(1, \omega)$ une base du $\boldsymbol{Z}$-module $\mathcal{O}$. Soit $D = (\omega - \bar{\omega})^2$ le discriminant de $\mathscr{K}$; $D = 4d$ si $d \equiv 2$ ou $3 \pmod 4$ ou $D = d$ si $d \equiv 1 \pmod 4$.

Soit Λ l'ensemble des $\lambda \in \mathcal{O}$ tels que $-1 \leqslant \bar{\lambda} \leqslant 1$.

DÉFINITION 1. *Λ est l'ensemble constitué de -1, de 1 et de tous les nombres de Pisot quadratiques appartenant à $\mathscr{K} = \boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$.*

2. Propriétés algébriques de Λ. L'ensemble Λ possède les quatre propriétés suivantes:

(a) *Λ est discret*: tout point λ de Λ est isolé dans Λ (plus précisément la distance séparant deux points consécutifs de Λ est minorée par $1/2$),

(b) *Λ est "presque" un sous-groupe additif de $\boldsymbol{R}$*: soient λ et λ' deux éléments quelconques de Λ; on peut toujours trouver un λ'' dans Λ tel que soit $\lambda - \lambda' = \lambda''$, soit $\lambda - \lambda' = \lambda'' - 1$ ou soit $\lambda - \lambda' = \lambda'' + 1$,

(c) *Λ est stable pour la multiplication*

(d) *si un ensemble M de nombres réels possède les propriétés* (a), (b) *et* (c) *et contient Λ, alors $M = \Lambda$.*

Les vérifications de (a), (b) et (c) sont immédiates et la preuve de (d) se trouve dans [5].

3. Propriétés des sommes trigonométriques dont les fréquences appartiennent à Λ. L'ensemble Λ est décrit par la définition 1.

DÉFINITION 2. *Soit E l'espace de Banach de toutes les fonctions presque-périodiques $f\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$ dont le spectre est contenu dans Λ. La norme de f dans E est $\sup_{\boldsymbol{R}} |f|$.*

Une partie dense dans E est constituée des sommes trigonomértiques dont les fréquences appartiennent à Λ.

DÉFINITION 3. *Un ensemble compact S de nombres réels est appelé un ensemble de détermination pour E si les normes $\sup_S |f|$ et $\sup_{\boldsymbol{R}} |f|$ sont équivalentes sur E.*

En d'autres termes, S est un ensemble de détermination s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction f de E, on ait

$$\sup_{\boldsymbol{R}} |f| \leqslant C \sup_S |f|. \tag{3.1}$$

Pour démontrer (3.1), il suffit évidemment de se restreindre aux sommes trigonométriques P dont les fréquences appartiennent à Λ.

DÉFINITION 4. *Un ensemble compact S de nombres réels est appelé un ensemble d'interpolation pour E si toute fonction continue $g\colon S \to \boldsymbol{C}$ est la restriction à S d'une fonction f de E.*

Nous montrerons alors qu'il existe une fonction non identiquement nulle f dans E dont la restriction à S est identiquement nulle: un ensemble d'interpolation n'est donc jamais un ensemble de détermination.

DÉFINITION 5. *La mesure de Lebesgue de $\boldsymbol{R}$ est notée dx et la mesure de Lebesgue d'un ensemble dx-intégrable A de nombres réels est notée* $\operatorname{mes} A$. *Un ensemble A de nombres réels est intégrable au sens de Riemann si la mesure de la frontière de A est nulle.*

THÉORÈME I. *Soit Λ l'ensemble décrit dans la définition 1 et S un ensemble compact de nombres réels, intégrable au sens de Riemann. Alors S est un ensemble de détermination pour l'espace E des fonctions presque périodiques dont les fréquences appartiennent à Λ si et seulement si* $\operatorname{mes} S > \operatorname{dens} \Lambda = 2/\sqrt{D}$.

La densité de Λ est notée $\operatorname{dens} \Lambda$ et est définie, dans notre cas, par le fait que tout intervalle de nombres réels de centre x et de longueur T contient $T \operatorname{dens} \Lambda + o(T)$ points de Λ $(T \to +\infty)$ où le petit o est uniforme en x.

THÉORÈME II. *Soit Λ l'ensemble décrit dans la définition 1 et S un ensemble compact de nombres réels. Alors S est un ensemble d'interpolation pour E si et seulement si* $\operatorname{mes} S < \operatorname{dens} \Lambda = 2/\sqrt{D}$.

Soit η un nombre positif et S_η l'ensemble des points dont la distance à S ne dépasse pas η. Alors si S est un ensemble d'interpolation, pour $\eta > 0$ assez petit, S_η en est un. Il en résulte que l'on peut prolonger, en une fonction f de E, une fonction $g\colon S_\eta \to \boldsymbol{R}$ qui est nulle sur S sans être nulle sur tout S_η. Il y a donc des fonctions f, non identiquement nulles, dans E dont la restriction à S est identiquement nulle.

Remarques sur les théorèmes I et II. Dans l'énoncé du théorème I, l'hypothèse que S est intégrable au sens de Riemann est essentielle. Si S est un compact quelconque, la condition nécessaire et suffisante pour que S soit un ensemble de détermination pour E est plus compliquée.

PROPOSITION 1. *Soit $\bar{S}$ l'ensemble des $x \in \mathcal{O}/\sqrt{D}$ tels que $\bar{x} \in S$. Les deux propriétés suivantes de l'ensemble compact S sont équivalentes*:

(a) *S est un ensemble de détermination pour E,*

(b) *il existe un $\eta > 0$ et un $T_0 > 0$ tels que tout intervalle de nombres réels dont la longueur T dépasse T_0 contienne au moins $(2+\eta)T$ points de $\bar{S}$.*

Il est facile de montrer que la condition (b) de la proposition 1 est satisfaite dès que la mesure de l'intérieur de S est supérieure à la densité de Λ; alors S est un ensemble de détermination. Cependant on peut, pour tout $\varepsilon > 0$, construire un ensemble compact S de nombres réels pour lequel (b) soit vérifié et tel que la mesure de l'intérieur de S ne dépasse pas ε.

Lorsque S est un ensemble fermé non compact, les théorèmes I et II ne sont plus exacts. Par exemple l'ensemble S des $k\alpha$, $k \geqslant 1$, est un ensemble de détermination pour E dès que α n'appartient pas à $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$; cependant S est intégrable au sens de Riemann et de mesure nulle et S n'est donc pas un ensemble d'interpolation.

4. Preuve du théorème I et de la propositions 1: condition nécessaire et suffisante pour que S soit un ensemble de détermination pour E. Dans la première partie de la démonstration, nous ne supposerons pas que l'ensemble compact S est intégrable au sens de Riemann. Dans la seconde partie, nous montrerons que si S est intégrable au sens de Riemann la condition trouvée sur S porte uniquement sur la mesure de S.

La trace, $\mathrm{Tr}(x)$, d'un élément x de $\mathscr{K}$ est, par définition, $x+\bar{x}$.

Lemme 1. *Si x et y appartiennent à $\mathcal{O}$, $\mathrm{Tr}(xy/\sqrt{D})$ est un entier rationnel.*

La vérification immédiate est laissée au lecteur.

En particulier, pour tout $x \in \mathcal{O}/\sqrt{D}$ et tout $\lambda \in \Lambda$, on a les congruences et inégalités

$$\lambda x \equiv -\bar{\lambda}\bar{x} \pmod 1, \qquad -1 \leqslant \bar{\lambda} \leqslant 1. \tag{4.1}$$

La transformée de Fourier, notée $\hat{f}$, d'un élément f de $L^1(\boldsymbol{R})$ est la fonction continue d'une variable réelle définie par

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2\pi i x t) f(t)\, dt.$$

La même normalisation s'applique aux transformées de Fourier de mesures ou de distributions.

Lemme 2. *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une partie compacte S de $\boldsymbol{R}$ soit un ensemble de détermination est qu'il existe une constante positive C et, pour tout $t \in \mathcal{O}/\sqrt{D}$, une mesure de Radon μ_t ayant les propriétés suivantes:*

(a) $\|\mu_t\| \leqslant C$,

(b) $\hat{\mu}_t(\lambda) = \exp(-2\pi i t\lambda)$ *pour tout* $\lambda \in \Lambda$,

(c) μ_t *est une mesure atomique portée par l'intersection de S et de $\mathcal{O}/\sqrt{D}$.*

Les parties (a) et (b) du lemme 2 sont une conséquence immédiate de la définition d'un ensemble de détermination et du théorème de Hahn–Banach.

Pour prouver la nécessité de la condition (c), nous emploierons le résultat suivant (lemme 3), prouvé dans [4], p. 29.

Lemme 3. *Soit α: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$ une fonction indéfiniment dérivable à décroissance rapide (ainsi que toutes ses dérivées) et soit dA la mesure atomique (non bornée) portée par $\mathcal{O}$ et donnant à chaque point $t \in \mathcal{O}$ la masse $\alpha(\bar{t})$. Alors dA est la transformée de Fourier (au sens des distributions) de la mesure dB portée par $\mathcal{O}/\sqrt{D}$ et donnant à chaque $t \in \mathcal{O}/\sqrt{D}$ la masse $D^{-1/2}\hat{\alpha}(\bar{t})$.*

Rappelons que $\mathcal{O}$ est l'anneau des entiers du corps quadratique réel $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$ et que $t \to \bar{t}$ est l'automorphisme de conjugaison de $\boldsymbol{Q}(\sqrt{d})$.

Les mesures dA et dB ne sont pas bornées, mais jouissent de la propriété suivante:

$$\sup_{u\in\boldsymbol{R}} \int_u^{u+1} d|A| < +\infty, \qquad \sup_{u\in\boldsymbol{R}} \int_u^{u+1} d|B| < +\infty. \tag{4.2}$$

Ce sont des distributions tempérées ([7], ch. VII) dont on peut prendre les transformées de Fourier.

Nous choisirons α: $\boldsymbol{R} \to [0, +\infty[$ de sorte que $\alpha(t) > 0$ si $-1 < t < 1$ et $\alpha(t) = 0$ si $|t| \geqslant 1$. Si pour tout $\lambda \in \Lambda$, on a $\hat{\mu}_t(\lambda) = \hat{\varepsilon}_t(\lambda)$, il en résulte[2] que $\mu_t * dB = \varepsilon_t * dB$. Soit $\mu_t = \mu_t' + \mu_t''$ la décomposition de μ_t en une partie atomique portée par $\mathcal{O}/\sqrt{D}$ et une partie μ_t'' étrangère à $\mathcal{O}/\sqrt{D}$. Alors $\mu_t' * dB$ est portée par $\mathcal{O}/\sqrt{D}$, $\mu_t'' * dB$ est étrangère à $\mathcal{O}/\sqrt{D}$ et leur somme $\varepsilon_t * dB$ est portée par $\mathcal{O}/\sqrt{D}$. Il en résulte que $\mu_t' * dB = \varepsilon_t * dB$.

En passant de nouveau aux transformées de Fourier, on obtient, pour tout λ dans Λ, $\hat{\mu}_t'(\lambda) = \hat{\varepsilon}_t(\lambda) = \exp(-2\pi i\lambda t)$; μ_t' est portée par l'intersection de S et de $\mathcal{O}/\sqrt{D}$ et enfin $\|\mu_t'\| \leqslant \|\mu_t\| \leqslant C$.

Le lemme 2 est démontré et nous écrirons désormais μ_t au lieu de μ_t'.

U n e   m e s u r e   p o r t é e   p a r S (suite de la démonstration). Posons, pour tout $t \in \mathcal{O}/\sqrt{D}$, $s = \bar{t}$ et appelons ν_s la mesure atomique portée par $\bar{S}$ et dont la masse en tout point $y = \bar{x}$ de $\bar{S}$ est égale à la masse de μ_t en $x \in S$.

On a $\|\nu_s\| = \|\mu_t\|$ et les congruences (4.1) du lemme 1 entraînent, pour tout λ de Λ,

$$\hat{\mu}_t(\lambda) = \hat{\nu}_s(-\bar{\lambda}), \qquad \hat{\varepsilon}_t(\lambda) = \hat{\varepsilon}_s(-\bar{\lambda}). \tag{4.3}$$

Ainsi les transformées de Fourier (ce sont des fonctions continues) des mesures atomiques bornées ν_s et ε_s coïncident sur l'intervalle $[-1, 1]$.

Résumons: pour tout $s \in \mathcal{O}/\sqrt{D}$, on peut trouver une mesure atomique bornée ν_s portée par $\bar{S}$ et telle que

$$\|\nu_s\| \leqslant C, \qquad \hat{\nu}_s(u) = \exp(-2\pi i s u) \text{ pour tout } u \text{ dans } [-1, 1]. \tag{4.4}$$

Par dualité ([1], ch. IV), on obtient le lemme suivant:

Lemme 4. *Une condition nécessaire et suffisante pour que S soit un ensemble de détermination est qu'il existe une constante C ayant la propriété suivante: pour toute distribution τ portée par $[-1, 1]$, $\sup_{\boldsymbol{R}} |\hat{\tau}| \leqslant C \sup_{\bar{S}} |\hat{\tau}|$.*

(2) ε_t est la masse 1 placée au point t.

Dans un travail non publié ([2]), Beurling a donné une condition nécessaire et suffisante pour que la seconde condition du lemme 4 soit remplie.

Proposition 2. *Soit M un ensemble de nombres réels. Supposons qu'il existe un nombre $l > 0$ tel que tout intervalle de longueur l contienne au plus un point de M. Alors les deux propriétés suivantes de M sont équivalentes:*

(a) *il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute distribution τ portée par $[-1, 1]$ on ait $\sup\limits_{\boldsymbol{R}} |\hat{\tau}| \leqslant C \sup\limits_{M} |\hat{\tau}|$,*

(b) *il existe un nombre $\eta > 0$ et un nombre $T_0 > 0$ tels que, pour tout intervalle J de nombres réels dont la longueur T dépasse T_0, on ait*

$$\operatorname{Card}(J \cap M) \geqslant (2+\eta)T.$$

Le lemme 4 et la proposition 2 achèvent de prouver la proposition 1.

Si l'ensemble S est intégrable au sens de Riemann, il est facile ([4], p. 29) de montrer que tout intervalle J de nombres réels de longueur T contient $T\sqrt{D}\operatorname{mes} S + o(T)$ points de $\bar{S}$; le $o(T)$ étant uniforme par rapport à la position de J. Le théorème I est donc démontré.

5. Preuve de la première moitié du théorème II ($\operatorname{mes} S < \operatorname{dens} \Lambda$ **est nécessaire).** Là encore la preuve dépend d'un théorème non publié de Beurling ([2]).

Proposition 3. *Soit M un ensemble de nombres réels. Supposons qu'il existe un $l > 0$ assez petit pour que tout intervalle de longueur l contienne au plus un point de M. Alors les deux propriétés suivantes de M sont équivalentes:*

(a) *toute fonction bornée b: $M \to \boldsymbol{C}$ est la restriction à M d'une fonction continue bornée dont le spectre est contenu dans $[-1, 1]$,*

(b) *il existe un $\eta > 0$ et un $T_0 > 0$ tels que tout intervalle de nombres réels de longueur $T > T_0$ contienne, au plus, $(2-\eta)T$ points de M.*

A l'aide de la proposition 3, nous allons montrer que:

Proposition 4. *Si l'ensemble compact S est un ensemble d'interpolation, alors $\operatorname{mes} S < 2/\sqrt{D}$.*

Preuve. Dire que S est un ensemble d'interpolation signifie que l'opérateur de restriction P: $E \to C(S)$ des fonctions de E à S est surjectif. D'après un théorème de Banach, l'ensemble compact S possède alors la propriété suivante: il existe une constante $C > 0$ telle que, pour toute fonction continue g: $S \to \boldsymbol{C}$, il y ait une fonction f dans E telle que $\sup\limits_{\boldsymbol{R}} |f| \leqslant C \sup\limits_{S} |g|$ et dont la restriction à S soit g. On utilise alors le lemme suivant:

Lemme 5. *Si S est un ensemble d'interpolation, l'ensemble $\bar{S}$ des $x \in \mathcal{O}/\sqrt{D}$ tels que $\bar{x} \in S$ a la propriété suivante: il existe une constante $C > 0$ telle que toute fonction bornée b: $\bar{S} \to \boldsymbol{C}$ soit la restriction à $\bar{S}$ d'une fonction continue et bornée β: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$ dont le spectre est contenu dans $[-1, 1]$ et telle que*

$$\sup_{\boldsymbol{R}} |\beta| \leqslant C \sup_{\bar{S}} |b|.$$

Démonstration du lemme 5. Soit, pour tout entier $n \geqslant 1$, F_n l'ensemble fini des $x \in S \cap \mathcal{O}/\sqrt{D}$ tels que $-n \leqslant \bar{x} \leqslant n$ et soit $\bar{F}_n$ l'ensemble des $\bar{x}$ correspondants. La réunion des $\bar{F}_n$ est évidemment $\bar{S}$. A l'aide de la fonction b: $\bar{S} \to \boldsymbol{C}$ donnée nous définissons une fonction g_n: $F_n \to \boldsymbol{C}$ par $g_n(x) = b(\bar{x})$. Evidemment $\sup\limits_{F_n} |g_n| \leqslant \sup\limits_{\bar{S}} |b|$. La fonction g_n peut être prolongée en une fonction continue (encore notée g_n) définie sur S et telle que $\sup\limits_{S} |g_n| \leqslant \sup\limits_{\bar{S}} |b|$.

Il est alors, par hypothèse, possible de trouver une fonction f_n dans E telle que $f_n(x) = g_n(x)$ pour tout x dans S et $\|f_n\|_\infty \leqslant C \sup\limits_{F_n} |g_n| \leqslant C \sup\limits_{\bar{S}} |b|$.

Soit P_n une somme trigonométrique finie dont les fréquences appartiennent à Λ et telle que $\sup\limits_{\boldsymbol{R}} |P_n - f_n| \leqslant 2^{-n}$ et définissons une fonction continue β_n: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$ par $\beta_n(x) = P_n(\bar{x})$ pour tout $x \in \mathcal{O}/\sqrt{D}$. Les congruences (4.1) montrent que β_n est une somme trigonométrique finie dont les fréquences appartiennent à $[-1, 1]$. En outre β_n possède les deux propriétés suivantes:

$$\|\beta_n\|_\infty \leqslant C \sup_{\bar{S}} |b| + 2^{-n} \tag{5.1}$$

$$|\beta_n(x) - b(x)| \leqslant 2^{-n} \quad \text{si } x \in \bar{S} \text{ et } -n \leqslant x \leqslant n.$$

D'après une inégalité de S. Bernstein ([3], ch. 3), toute fonction continue β: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$ dont le spectre est contenu dans $[-1, 1]$ vérifie $|\beta(x) - \beta(y)| \leqslant |x-y| \, \|\beta\|_\infty$. L'ensemble des β vérifiant, en outre, $\|\beta\|_\infty \leqslant C$ est compact pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact. En particulier on peut extraire de la suite des β_n vérifiant (5.1) une sous-suite uniformément convergente sur tout compact vers une fonction continue β: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$ telle que $\|\beta\|_\infty \leqslant C \sup\limits_{\bar{S}} |b|$ et $\beta(x) = b(x)$ pour tout $x \in \bar{S}$. Le lemme 5 est prouvé.

Lemme 6. *Soit, pour tout x réel, $q_n(x)$ le nombre des $t \in \mathcal{O}/\sqrt{D}$ tels que $0 \leqslant t \leqslant n$ et que $\bar{t} \in S + x$. Alors $\overline{\lim}\, n^{-1} q_n(x) < 2$.*

En effet, si S est un ensemble d'interpolation, il en est de même de $S+x$ et $q_n(x)$ est le nombre de points de $\overline{S+x}$ dans l'intervalle $[0, n]$. La proposition 2 et le lemme 5 donnent alors aussitôt le résultat.

LEMME 7. *Si S est un ensemble d'interpolation, alors* $\operatorname{mes} S < 2/\sqrt{D}$.

En effet, soit A_n l'ensemble des $t \in \mathcal{O}/\sqrt{D}$ tels que $0 \leqslant \bar{t} \leqslant n$ et ϱ_n la mesure discrète (non bornée) donnant à chaque point de A_n la masse 1. Soit I la fonction caractéristique de S. Alors

$$q_n(x) = \int I(t-x)\, d\varrho_n(t).$$

Un calcul simple ([4], p. 26 à 32) montre que $n^{-1} d\varrho_n$ tend vaguement vers $\sqrt{D}$ fois la mesure de Lebesgue. Il en résulte que $n^{-1} q_n(x)$ tend dans L^1_{loc} vers $\sqrt{D} \operatorname{mes} S$. En particulier, on peut trouver une sous-suite des $n^{-1} q_n$ tendant presque partout vers $\sqrt{D} \operatorname{mes} S$. Mais $\overline{\lim}\, n^{-1} q_n < 2$ (partout). Il en résulte que $\operatorname{mes} S < 2/\sqrt{D}$.

6. Preuve de la seconde moitié du théorème II ($\operatorname{mes} S < \operatorname{dens} \Lambda$ **est suffisant).** Nous allons, en fait, prouver le résultat suivant:

PROPOSITION 5. *Si la mesure de l'ensemble compact S est inférieure à $2/\sqrt{D}$, on peut trouver une constante $C > 0$ telle que la propriété d'approximation suivante ait lieu:*

pour toute fonction continue $g\colon S \to \boldsymbol{C}$, il existe une somme trigonométrique $P\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$ dont les fréquences appartiennent à Λ, telle que $\sup_{\boldsymbol{R}} |P| \leqslant C \sup_S |g|$ et que $\sup_S |g-P| \leqslant \varepsilon \sup_S |g|$.

En choisissant $\varepsilon < 1$, la proposition 5 entraîne, par itération, la seconde moitié du théorème II.

Il reste à prouver la proposition 5. Quitte à remplacer S par un compact plus grand dont la mesure soit encore inférieure à $2/\sqrt{D}$, nous pourrons supposer que S est intégrable au sens de Riemann.

(a) L'opérateur de conjugaison. A tout couple (S, g) d'un ensemble compact intégrable au sens de Riemann et d'une fonction continue $g\colon S \to \boldsymbol{C}$, on associe un couple $(\bar{S}, \bar{g})$ défini comme suit: $\bar{S}$ est l'ensemble de tous les $x \in \mathcal{O}/\sqrt{D}$ tels que $\bar{x} \in S$ et $\bar{g}\colon \bar{S} \to \boldsymbol{C}$ est définie par $\bar{g}(x) = g(\bar{x})$.

Pour démontrer la proposition 5, il suffit de construire une somme trigonométrique Q dont les fréquences appartiennent à $\mathcal{O} \cap [-1, 1]$ et telle que

$$\sup_{\boldsymbol{R}} |Q| \leqslant C \sup_{\bar{S}} |\bar{g}|, \qquad \sup_{\bar{S}} |\bar{g}-Q| \leqslant \varepsilon \sup_{\bar{S}} |\bar{g}|. \tag{6.1}$$

Alors $P\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$ sera défini sur $\mathcal{O}/\sqrt{D}$ par $P(x) = Q(\bar{x})$.

Le plan de la démonstration est le suivant: grace à la proposition 3, nous prolongeons la fonction $\bar{g}\colon \bar{S} \to \boldsymbol{C}$ en une fonction continue bornée $\varphi\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$ dont le spectre est contenu dans $[-1, 1]$. La somme trigonométrique Q est la limite, pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact, d'une sous-suite de la suite de certains produits de convolution $\varphi * \mu_n$. L'effet de ces convolutions est de remplacer, à la limite, le spectre continu de φ par un spectre discret fini.

Nous allons maintenant définir des mesures μ_n à l'aide d'une mesure dA, elle même construite en utilisant une fonction a. En outre, pour des raisons de sécurité, il est nécessaire d'agrandir S: pour tout $\eta > 0$, soit S_η l'ensemble des nombres réels dont la distance à S ne dépasse pas η. On choisit η assez petit pour que la mesure de S_η reste inférieure à la densité de Λ. Maintenant que η est fixé, on prolonge g en une fonction à valeurs complexes, définie sur S_η, continue, encore notée g et telle que $\sup_{S_\eta} |g| = \sup_S |g|$.

(b) Les fonctions a, a', a'' et b. On appelle $a\colon \boldsymbol{R} \to [0, +\infty[$ une fonction continue ayant les quatre propriétés suivantes:

$$\|a\|_1 = \int_{\boldsymbol{R}} a(x)\, dx = 1,$$

$$\int_{|x| \geqslant \eta} a(x)\, dx \leqslant \varepsilon/3,$$

la transformée de Fourier b de a est à support compact,

les fonctions a' et a'' de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{C}$ étant définies par: $a'(x) = a(x)$ si $|x| \leqslant \eta$, $a' = 0$ sinon et $a'' = a - a'$, on a:

$$\sup_S |g - g * a'| \leqslant (\varepsilon/3) \sup_S |g|.$$

(c) Les mesures dA, dA', dA'' et dB. Soit dA la mesure atomique (non bornée) portée par $\mathcal{O}/\sqrt{D}$ et donnant à tout $x \in \mathcal{O}/\sqrt{D}$ la masse $a(\bar{x})$. On vérifie sans peine ([4], p. 29) que $\sup_{u \in \boldsymbol{R}} \int_u^{u+1} d|A| < +\infty$. Les mesures dA' et dA'' sont définies de même à l'aide de a' et a''.

Enfin soit dB la mesure atomique (non bornée) portée par $\mathcal{O}$ et donnant à tout $x \in \mathcal{O}$ la masse $b(\bar{x})$. Le lemme 3 montre que la transformée de Fourier de dB est $\dfrac{1}{\sqrt{D}} dA$. Le support de dB est localement fini.

(d) Les mesures $\mu_n, \mu_n', \mu_n'', \nu_n, \nu_n'$ et ν_n''. Soit $t_n\colon \boldsymbol{R} \to [0, +\infty[$ défini par $t_n = 1/n\sqrt{D}$ sur $[0, n]$, $t_n = 0$ ailleurs et soit $\mu_n = t_n dA$; μ_n' et μ_n'' sont définies de façon analogue à partir de dA' et dA'' (μ_n n'a rien à voir avec le μ_t du § 4). Les mesures μ_n, μ_n' et μ_n'' sont atomiques et bornées, portées par $\mathcal{O}/\sqrt{D}$; il en sera de même pour ν_n, ν_n' et ν_n'' définies par $\nu_n\{x\} = \mu_n\{\bar{x}\}$ etc. pour tout $x \in \mathcal{O}/\sqrt{D}$.

Autrement dit, ν_n, ν'_n et ν''_n sont les mesures atomiques et bornées portées par $\mathcal{O}/\sqrt{D}$ et définies, pour tout $x \in \mathcal{O}/\sqrt{D}$, par

$$\nu_n\{x\} = \frac{1}{n\sqrt{D}} a(x) \quad \text{si } 0 \leqslant \bar{x} \leqslant n,$$

$$\nu_n\{x\} = 0 \quad \text{sinon},$$

$$\nu'_n\{x\} = \frac{1}{n\sqrt{D}} a'(x) \quad \text{si } 0 \leqslant \bar{x} \leqslant n,$$

$$\nu'_n\{x\} = 0 \quad \text{sinon, etc.}$$

Le support de ν'_n est donc contenu dans l'intervalle $[-\eta, \eta]$ et il est facile ([4], p. 26, à 31) de vérifier que ν'_n tend vaguement vers $a'(x)dx$ et que $\lim_{n\to+\infty} \|\mu_n\| = \lim_{n\to+\infty} \|\nu_n\| = \|a\|_1 = 1$ tandis que $\lim_{n\to+\infty} \|\mu''_n\| = \lim_{n\to+\infty} \|\nu''_n\| = \|a''\|_1 \leqslant \varepsilon/3$.

(e) Propriétés d'approximation de la convolution par μ_n.

Soit $g\colon S_\eta \to \boldsymbol{C}$ une fonction continue et $\varphi\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$ n'importe quelle fonction continue et bornée dont la restriction à $\bar{S}_\eta$ coïncide avec $\bar{g}\colon \bar{S}_\eta \to \boldsymbol{C}$ (voir (a)). On peut énoncer:

LEMME 8. *Dès que n est assez grand*

$$\sup_{\bar{S}} |\varphi - \varphi * \mu_n| \leqslant \varepsilon \|\varphi\|_\infty. \tag{6.2}$$

Preuve du lemme 8. On a $\sup_S |g - g * a'| \leqslant \varepsilon/3 \sup_S |g|$. Puisque ν'_n est portée par $[-\eta, \eta]$ et tend vaguement vers $a'(x)dx$, on a:

$$\sup_S |g - g * \nu'_n| \leqslant (\varepsilon/2) \sup_S |g| \tag{6.3}$$

dès que n est assez grand. Appliquant (6.3) à $x \in \mathcal{O}/\sqrt{D}$, on obtient:

$$\sup_{\bar{S}} |\varphi - \varphi * \mu'_n| \leqslant (\varepsilon/2) \|\varphi\|_\infty. \tag{6.4}$$

Mais $\|\mu''_n\| = \|\nu''_n\|$ et $\lim_{n\to+\infty} \|\mu''_n\| \leqslant \varepsilon/3$.

Si n est assez grand, on a:

$$\|\varphi * \mu''_n\|_\infty \leqslant (\varepsilon/2) \|\varphi\|_\infty \tag{6.5}$$

et (6.2) résulte de (6.4) et (6.5).

(f) Propriétés de régularisation de l'opérateur de convolution par μ_n.

Soit F l'intersection du support de la mesure dB et de $[-1, 1]$; F est un ensemble fini. On peut terminer la preuve de la proposition 5 à l'aide du lemme 9 que nous admettrons pour l'instant.

LEMME 9. *Soit $g\colon S_\eta \to \boldsymbol{C}$ une fonction continue et soit $\varphi\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$ une fonction continue et bornée dont le spectre est contenu dans $[-1, 1]$ et qui, sur $\bar{S}_\eta$, vaut $\bar{g}$. Soit $Q_n = \varphi * \mu_n$. Alors une sous-suite des Q_n converge uniformément sur tout compact vers une somme trigonométrique Q dont les fréquences appartiennent à F et telle que $\sup_{\bar{S}} |\varphi - Q| \leqslant \varepsilon \|\varphi\|_\infty$.*

Fin de la preuve de la proposition 5. Puisque la mesure de S_η est strictement inférieure à $2/\sqrt{D}$, la densité de $\bar{S}_\eta$ est strictement inférieure à 2 ([4], p. 26 à 31). Le (a) de la proposition 3 et un théorème de Banach montrent qu'il existe une constante C telle que toute fonction bornée $b\colon \bar{S}_\eta \to \boldsymbol{C}$ soit la restriction à $\bar{S}_\eta$ d'une fonction continue bornée $\varphi\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$ dont le spectre est contenu dans $[-1, 1]$ et telle que $\sup_{\boldsymbol{R}} |\varphi| \leqslant C \sup_{\bar{S}} |b|$.

Dans notre cas $b = \bar{g}$ et le lemme 9 achève la preuve des inégalités (6.1) puisque

$$\sup_{\bar{S}_\eta} |\bar{g}| = \sup_{S_\eta} |g| = \sup_S |g|.$$

Preuve du lemme 9. La fonction φ est uniformément continue et les mesures μ_n uniformément bornées; les fonctions Q_n sont uniformément équicontinues et il est donc possible de trouver une soussuite des Q_n uniformément convergente sur tout compact vers une fonction continue bornée Q. On a:

$$\|Q\|_\infty \leqslant \lim_{n\to+\infty} \|\mu_n\| \, \|\varphi\|_\infty = \|\varphi\|_\infty \quad \text{et} \quad \sup_{\bar{S}} |\varphi - Q| \leqslant \varepsilon \|\varphi\|_\infty \quad \text{(lemme 8)}.$$

Il reste à montrer que Q est une somme trigonométrique dont les fréquences appartiennent à F.

Soit $\alpha\colon \boldsymbol{R} \to [0, +\infty[$ une fonction indéfiniment dérivable dont le support est contenu dans $[-1, 1]$ et d'intégrale égale à 1 et soit α_n le produit de convolution de α et de la fonction caractéristique de $[0, n]$. Soit $\beta\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{C}$ la fonction indéfiniment dérivable à décroissance rapide dont la transformée de Fourier est α et soit D_n la fonction dont la transformée de Fourier est égale à $1/n$ sur $[0, n]$ et 0 ailleurs (D_n est une variante du noyau de Dirichlet). Alors la transformée de Fourier du produit βD_n est $n^{-1}\alpha_n$ qui diffère de $\sqrt{D} t_n$ d'un terme en $O(n^{-1})$; ce terme sera négaligeable par la suite (βD_n est un "noyau de Dirichlet tronqué à l'infini").

La transformée de Fourier de la fonction continue bornée $dB * \beta D_n$ est la somme de $t_n dA = \mu_n$ et d'une mesure atomique dont la norme est $O(n^{-1})$.

Pour montrer que le spectre de la fonction continue bornée $Q\colon \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{C}$ est contenu dans F, il suffit de prouver que $\int_{\boldsymbol{R}} Q(t)\hat{h}(t)\,dt = 0$ pour toute fonction indéfiniment dérivable $h\colon \boldsymbol{R}\to\boldsymbol{C}$, à support compact, nulle au voisinage de F.

Soit A l'algèbre de Banach des fonctions continues $\gamma\colon [-1,1]\to\boldsymbol{C}$ qui sont les restrictions à $[-1,1]$ de transformées de Fourier $\hat{f}$ d'éléments f de $L^1(\boldsymbol{R})$; on pose $\|\gamma\|_A = \inf\|f\|_1$ (le inf. est étendu à tous les $f\in L^1$ tels que $\hat{f}=\gamma$ sur $[-1,1]$). Si $t\in[-1,1]$, $f\in L^1(\boldsymbol{R})$ et $\hat{f}(t)=0$, alors la norme dans A de la fonction $x\to\hat{f}(x)D_n(x-t)$ tend vers 0 comme on le vérifie sans peine. Il en résulte que:

$$\|(dB*\beta D_n)h\|_A\to 0 \qquad (n\to+\infty). \tag{6.6}$$

Soit τ la distribution, portée par $[-1,1]$, dont la transformée de Fourier est φ. Alors la transformée de Fourier du produit $(dB*\beta D_n)\tau$ est la somme du produit de convolution $Q_n=\varphi*\mu_n$ et d'un terme dont la norme L^∞ est $O(n^{-1})$. Enfin

$$\int_{\boldsymbol{R}} Q(t)\hat{h}(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\int_{\boldsymbol{R}} Q_n(t)\hat{h}(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty}\langle(dB*\beta D_n)h,\tau\rangle = 0$$

grâce (6.6) et au fait que la transformée de Fourier de la distribution τ, portée par $[-1,1]$, est bornée (§ 4, ch. V, [1]).

7. Généralisations. Soit G un groupe commutatif localement compact et μ une mesure de Haar sur G. On cherche à construire un espace vectoriel E de fonctions continues bornées $f\colon G\to\boldsymbol{C}$ ayant les propriétés suivantes:

(a) E est invariant par translation,

(b) il y a un nombre réel $\gamma>0$ tel que, pour toute partie compacte S de G, intégrable au sens de Riemann et vérifiant $\mu(S)>\gamma$, les normes $\sup_S|f|$ et $\sup_G|f|$ soient équivalentes sur E,

(c) au contraire, sur toute partie compacte S de G telle que $\mu(S)<\gamma$, toute fonction continue $g\colon S\to\boldsymbol{C}$ est la restriction à S d'une fonction f de E.

La construction de E s'obtient par des méthodes analogues à celles que nous avons exposées dans le cas ou $G=\boldsymbol{R}^n$. Si $G=(\boldsymbol{Q}_p)^n$, J. P. Schreiber ([5], [6]) a montré comment E doit être obtenu: si, par exemple, $G=\boldsymbol{Q}_p$, on remplace A par l'ensemble de tous les mp^n de $\boldsymbol{Q}_p$, $m\in\boldsymbol{Z}$, $n\in\boldsymbol{Z}$ tels que $|mp^n|_\infty\leqslant 1$.

Dans les cas mentionnés ci-dessus, pour tout $\gamma>0$, on peut construire l'espace vectoriel E. En revanche nous ne savons pas comment construire E dans le cas général des groupes G commutatifs localement compacts.

Bibliographie

[1] J.-P. Kahane, *Séries de Fourier absolument convergentes*, Berlin 1970.
[2] H. J. Landau, *Necessary density conditions for sampling and interpolation of a certain entire functions*, Acta Math. 117 (1967), pp. 37–52.
[3] G. G. Lorentz, *Approximation of functions*, 1966.
[4] Y. Meyer, *Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique*, Lecture Notes in Math., 117, Berlin 1970.
[5] Y. Meyer, *Algebraic numbers and harmonic analysis*, (à paraître).
[6] J.-P. Schreiber, *Thèse*. Faculté des Sciences d'Orsay, France 1971.
[7] L. Schwartz, *Théorie des distributions*, Paris 1966.

FACULTÉ DES SCIENCES
ORSAY, FRANCE

Received September 8, 1971 (381)