STUDIA MATHEMATICA, T. XLIII. (1972)

Об эквивалентных нормах и минимальных системах в несепарабельных пространствах Банаха

С. Л. ТРОЯНСКИ (София)

Резюме. В работе обобщаются известные результаты Кадеца о перенормировке сепарабельных банаховых пространств на некоторые классы несепарабельных пространств Банаха.

В настоящей заметке переносятся на несепарабельный случай недавно введенные Мильманом [13] понятия полной минимальной натягивающей системы и полной минимальной ограничено полной системы. В этих терминах распространяются на несепарабельные пространства Банаха теорема Кадеца [10] об эквивалентных дифференцируемых по Фреше нормах в пространствах, сопряженное к которым сепарабельно и теорема Линденштрауса [11], Бессаги-Пелчинского [3] утверждающая, что каждое ограниченное замкнутое выпуклое подмножество сопряженного сепарабельного пространства является выпуклой замкнутой оболочкой своих крайних точек.

Некоторые обобщения результата Линденштрауса—Бессаги—Пелчинского получены также в [18] и [20].

Через l_1 будем обозначать пространство всех числовых последовательностей $x(n)$, для которых ряд составленый из них абсолютно сходится; $\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|$.

Через $m(\Gamma)$ обозначим совокупность всех ограниченных действительных функций $x(\gamma)$, определенных на Γ; $\|x\| = \sup_{\gamma\in\Gamma} |x(\gamma)|$.

Через $c_0(\Gamma)$ обозначим совокупность всех $x \in m(\Gamma)$, для которых множество $\{\gamma\colon |x(\gamma)| > \varepsilon\}$ конечно для любого $\varepsilon > 0$.

Норма пространства Банаха X называется строго выпуклой если из условий: $\|x\| = \|y\| = 1$, $\|x+y\| = 2$ следует, что x и y совпадают.

Норма пространства Банаха X называется локально равномерно выпуклой если из условий: $\|x_i\| = \|x\| = 1$, $\|x_i+x\| \to 2$ следует, что $\|x_i - x\| \to 0$.

Норма пространства Банаха X называется дифференцируемой по Фреше если для любого $x\in X$, $\|x\|=1$

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\sup_{\|y\|=1}[\|x+ty\|+\|x-ty\|-2]=0.$$

Через I будет обозначать тождественный оператор, т.е. $Ix=x$ для всех $x\in X$.

Пусть Z подмножество пространства X. Через $\operatorname{sp}Z$ будем обозначать замкнутое подпространство натянутое на Z. Через X^* обозначим сопряженное к X пространство.

Множество $K\subset X$ назовем полной минимальной системой если $\operatorname{sp}K=X$ и для любого $x\in K$ существует $x_x^*\in X^*$ такой, что $x_x^*(x)=1$ и $x_x^*(y)=0$ для всех $y\in K$. Пусть $M\subseteq K$. Через M^* бозначим множество $\{x_x^*\}_{x\in M}$. Множество K^* назовем сопряженной к системой. Полную минимальную систему K пространства X назовем натягивающей если $\operatorname{sp}K^*=X^*$. Полную минимальную систему K пространства X, с тотальной на X сопряженной K^* назовем ограничено полной если для любой ограниченной (вообще говоря обобщенной) последовательности $\{y_\sigma\}\subset X$ из сходимости последовательности $\{x^*(y_\sigma)\}$ для любого $x^*\in K^*$ следует, что существует $y\in X$ такой, что $\lim_\sigma x^*(y_\sigma)=x^*(y)$, $x^*\in K^*$.

В дальнейшем вместо полной минимальной натягивающей системы и вместо полной минимальной ограничено полной системы будем писать соответственно ПМНС и ПМОПС.

Предложение 1. *Если K ПМОПС пространства X, то K^* ПМНС пространства* $\operatorname{sp}K^*$, *притом X линейно гомеоморфно пространству* $(\operatorname{sp}K^*)^*$.

В случае когда X сепарабельно предложение 1 доказано в [13]. На несепарабельный случай доказательство распространяется без существенных изменений и поэтому проводить его не будем.

Лемма 1. *Пусть K ПМНС пространства X. Тогда $K\cup\{0\}$ слабо компактно, если K ограничено.*

Доказательство. Пусть $\{y_i\}_1^\infty\subset K$ и $y_i\neq y_k$ если $i\neq k$. Возьмем $x^*\in X^*$ и зададим $\varepsilon>0$. Найдем конечное множество $\{y_k^*\}_1^j\subset K^*$ так, что $\|x^*-\sum_{k=1}^j a_k y_k^*\|<\varepsilon/b$, где $\{a_k\}_1^j$ действительные числа, а $b=\sup\|y_i\|$. Найдем натуральное число s так, что $y_k^*(y_i)=0$ для $k=1,2,\ldots,j$ если $i>s$. Тогда при $i>s$ $|x^*(y_i)|<\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Предложение 2. *Пусть K ПМНС пространства X. Тогда существует последовательность (вообще говоря трансфинитная) линейных проекторов $P_\gamma\colon X\to X$ и множеств $K_\gamma\subset K$ $(0\leqslant\gamma\leqslant\zeta)$ таких, что $P_0=0$, $P_\zeta=I$, $\|P_\gamma\|=1$ если $\gamma>0$, $P_\gamma P_\delta=P_\delta P_\gamma=P_\delta$ если $\delta\leqslant\gamma$, $P_\gamma X=\operatorname{sp}K_\gamma$, $P_\gamma^*X^*\supset K_\gamma^*$, $K_\gamma\subset K_{\gamma+1}$, $K_\gamma=\bigcup_{\delta<\gamma}K_{\delta+1}$, вес пространства $P_\gamma X$ меньше веса пространства X если $\gamma<\zeta$.*

Имея ввиду лемму 1 доказательство предложения 2 является простой модификацией одного предложения из [1].

Лемма 2. *Пусть $\{P_\gamma\}_{\gamma\leqslant\zeta}$ последовательность проекторов из предложения 2. Тогда для любого $x^*\in X^*$ $P_\gamma^*x^*\in\overline{\{P_{\delta+1}^*x^*\}}_{\delta<\gamma}$.*

Доказательство. Прежде всего покажем, что

$$P_\gamma^*X^*\subset\operatorname{sp}\Big[\bigcup_{\delta<\gamma}P_{\delta+1}^*X^*\Big]. \tag{1}$$

Возьмем $x^*\in P_\gamma^*X^*$ и зададим $\varepsilon>0$. Найдем конечное подмножество $\{y_i^*\}_1^j\subset K^*$ так, что

$$\Big\|x^*-\sum_{i=1}^j a_i y_i^*\Big\|<\varepsilon\quad(a_i\text{ — действительные числа})$$

Положим $\{y_{i_k}^*\}_1^p=\{y_i^*\}_1^j\cap\big(\bigcup_{\delta<\gamma}K_{\delta+1}^*\big)$. Заметим, что $P_\gamma^*y_{i_k}^*=y_{i_k}^*$ для $k=1,2,\ldots,p$ и $y_i^*(P_\gamma x)=0$ для всех $x\in X$ если $i\neq i_k$ $(k=1,2,\ldots,p)$. Поэтому

$$\Big\|x^*-\sum_{k=1}^p a_{i_k}y_{i_k}^*\Big\|=\Big\|P_\gamma^*\Big(x^*-\sum_{i=1}^j a_i y_i^*\Big)\Big\|\leqslant\Big\|x^*-\sum_{i=1}^j a_i y_i^*\Big\|<\varepsilon$$

что и доказывает (1).

Возьмем произвольное $x^*\in X^*$ и γ. Зададим $\varepsilon>0$. В силу (1) можно найти $\eta<\gamma$ и $y^*\in P_{\eta+1}^*X^*$ так, что $\|P_\gamma^*x^*-y^*\|<\varepsilon/2$. Тогда

$$\|P_\gamma^*x^*-P_{\eta+1}^*x^*\|=\|P_\gamma^*x^*-y^*-P_{\eta+1}^*(P_\gamma^*x^*-y^*)\|<\varepsilon.$$

Предложение 3. *Пусть K ПМНС пространства X. Тогда существует последовательность (вообще говоря трансфинитная) линейных ограниченных проекторов $Q_\alpha\colon X\to X$ $(0\leqslant\alpha\leqslant\tau)$ таких, что $Q_0=0$, $Q_\tau=I$, $Q_\alpha Q_\beta=Q_\beta Q_\alpha=Q_\beta$ если $\beta\leqslant\alpha$, $Q_\alpha^*x^*\in\overline{\{Q_{\beta+1}^*x^*\}}_{\beta<\alpha}$, пространства $(Q_{\alpha+1}^*-Q_\alpha^*)X^*$ сепарабельны $(\alpha<\tau)$.*

Доказательство. Воспользуемся методом трансфинитной индукции. Пусть X сепарабельно пространство. Очевидно $Q_0=0$ и $Q_1=I$ удовлетворяют все условия предложения. Пусть $\aleph$ вес пространства X и предложение верно для всех банаховых пространств с меньшими весами. Так как K ПМНС пространства X, то существуют проекторы $P_\gamma\colon X\to X$ и множества K_γ удовлетворяющие все условия предложения 2.

Покажем, что $V_\gamma=(P_{\gamma+1}-P_\gamma)(K_{\gamma+1}\setminus K_\gamma)$ является ПМНС пространства $X_\gamma=(P_{\gamma+1}-P_\gamma)X$ $(\gamma<\zeta)$.

Возьмем $x \in X_\gamma$ и зададим $\varepsilon > 0$. Так как $x \in P_{\gamma+1}X$, то можно найти конечное множество $\{x_i\}_1^j \subset K_{\gamma+1}$ так, что

$$\Big\| x - \sum_{i=1}^{j} a_i x_i \Big\| < \varepsilon \quad (a_i \text{ — действительные числа}).$$

Положим $\{x_{i_k}\}_1^p = \{x_i\}_1^j \cap (K_{\gamma+1} \setminus K_\gamma)$. Тогда

$$\Big\| x - \sum_{k=1}^{p} a_{i_k}(P_{\gamma+1}-P_\gamma)x_{i_k} \Big\| = \Big\| (P_{\gamma+1}-P_\gamma)\Big(x - \sum_{i=1}^{j} a_i x_i\Big) \Big\| \leqslant \|P_{\gamma+1}-P_\gamma\| \Big\| x - \sum_{i=1}^{j} a_i x_i \Big\| < 2\varepsilon.$$

Значит $X_\gamma = \operatorname{sp} K_\gamma$.

Пусть $x \in K_{\gamma+1} \setminus K_\gamma$. Через z_x^* обозначим сужение функционала x_x^* на X_γ. Так как $P_\gamma z \in \operatorname{sp} K_\gamma$ для любого $z \in X$, то $x_x^*(P_\gamma z) = 0$. Отсюда

$$z_x^*(P_{\gamma+1}x - P_\gamma x) = x_x^*(P_{\gamma+1}x) - x_x^*(P_\gamma x) = 1$$

и

$$z_x^*(P_{\gamma+1}y - P_\gamma y) = x_x^*(P_{\gamma+1}y) - x_x^*(P_\gamma y) = 0 \quad (y \in K_{\gamma+1} \setminus K_\gamma).$$

Значит V_γ полная минимальная система пространства X_γ.

Возьмем произвольное $z^* \in X_\gamma^*$ и зададим $\varepsilon > 0$. Пусть $x^* \in X^*$ некоторое продолжение z^* на X. Найдем конечное множество $\{x_i\}_1^j \subset K^*$ так, что

$$(2) \qquad \Big\| x^* - \sum_{i=1}^{j} a_i x_i^* \Big\| < \varepsilon \quad (a_i\text{-действительные числа}).$$

Пусть $y^* \in K^* \setminus (K_{\gamma+1}^* \setminus K_\gamma^*)$. Покажем, что $y^*(z) = 0$ для всех $z \in X_\gamma$. Если $y^* \in K^* \setminus K_{\gamma+1}^*$, то $y^*(z) = 0$ так как $y^*(P_{\gamma+1}X) = 0$. Если $y^* \in K_\gamma^*$, то $y^*(P_{\gamma+1}z) = y^*(P_\gamma z)$ и следовательно $y^*(z) = y^*(P_{\gamma+1}z - P_\gamma z) = 0$.

Положим $\{x_{i_k}^*\}_1^p = \{x_i\}_1^j \cap (K_{\gamma+1}^* \setminus K_\gamma^*)$. Через z_i^* обозначим сужение функционала x_i^* на X_γ. Тогда в силу (2)

$$\Big\| z^* - \sum_{k=1}^{p} a_{i_k} z_{i_k}^* \Big\| = \sup_{\substack{z \in X_\gamma \\ \|z\|=1}} z^*(z) - \Big| \sum_{i=1}^{j} a_i z_i^*(z) \Big| < \varepsilon.$$

В силу индуктивного предположения в пространствах X_γ $(\gamma < \zeta)$ существуют проекторы $\{S_\beta^\gamma\}_{\beta \in \Lambda_\gamma}$, удовлетворяющие всем условиям предложения 3. Через Λ обозначим совокупность всех пар вида (γ, β), где $\beta \in \Lambda_\gamma$ если $\gamma < \zeta$ и $\beta = 0$ если $\gamma = \zeta$. Будем считать, что $(\gamma_1, \beta_1) > (\gamma_2, \beta_2)$ если $\gamma_1 > \gamma_2$ или если $\gamma_1 = \gamma_2$ и $\beta_1 > \beta_2$. Проекторы $Q_{(\gamma,\beta)}: X \to X$ определим формулой:

$$Q_{(\gamma,\beta)} = S_\beta^\gamma(P_{\gamma+1}-P_\gamma) + P_\gamma$$

если $\gamma < \zeta$ и $Q_{(\zeta,0)} = P_\zeta$.

Учитывая лемму 2 легко проверить, что $Q_{(\gamma,\beta)}$ удовлетворяют всем условиям предложения 3.

Лемма 3. *Пусть проекторы* $Q_\alpha: X \to X$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant \tau)$ *удовлетворяют всем условиям предложения* 3. *Тогда множество*

$$\Lambda(x^*, \varepsilon) = \{\alpha: \|Q_{\alpha+1}^* x^* - Q_\alpha^* x^*\| > \varepsilon(\|Q_{\alpha+1}^*\| + \|Q_\alpha^*\|)\}$$

конечно для любых $x^* \in X^*$, $\varepsilon > 0$ *и*

$$x^* \in Y(x^*) = \operatorname{sp}\Big[\bigcup_{\alpha \in \Lambda(x^*)} (Q_{\alpha+1}^* - Q_\alpha^*)X^*\Big],$$

где $\Lambda(x^*) = \bigcup_{\varepsilon > 0} \Lambda(x^*, \varepsilon)$.

Доказательство. Пусть $x^* \in X^*$ и $\varepsilon > 0$ таковы, что для некоторой бесконечной последовательности $\{\alpha_i\}_1^\infty$ $(0 \leqslant \alpha_i < \tau)$

$$(3) \qquad \|Q_{\alpha_i+1}^* x^* - Q_{\alpha_i}^* x^*\| \geqslant \varepsilon(\|Q_{\alpha_i+1}^*\| + \|Q_{\alpha_i}^*\|).$$

Пусть α наименьший элемент, удовлетворяющий условию $\alpha > \alpha_i$ для бесконечно многих i $(0 < \alpha < \tau)$. Найдем $\beta < \alpha$ так, что

$$\|Q_\alpha^* x^* - Q_\beta^* x^*\| < \varepsilon.$$

Возьмем α_s так, что $\beta < \alpha_s < \alpha$. Тогда

$$\|Q_{\alpha_s+1}^* x^* - Q_{\alpha_s}^* x^*\| = \|(Q_{\alpha_s+1}^* - Q_{\alpha_s})(Q_\alpha^* x^* - Q_\beta^* x^*)\| \leqslant (\|Q_{\alpha_s+1}^*\| + \|Q_{\alpha_s}^*\|)\|Q_\alpha^* x^* - Q_\beta^* x^*\| < \varepsilon(\|Q_{\alpha_s+1}^*\| + \|Q_{\alpha_s}^*\|),$$

что противоречит (3).

Докажем индуктивно, что $Q_\alpha^* x^* \in Y(x^*)$. Очевидно $Q_0 x^* \in Y(x^*)$. Пусть $Q_\beta^* x^* \in Y(x^*)$ для всех $\beta < \alpha$. Если существует ξ так, что $\xi + 1 = \alpha$, то $Q_\xi^* x^* \in Y(x^*)$ и $(Q_{\xi+1}^* - Q_\xi^*)x^* \in Y(x^*)$, следовательно $Q_\alpha^* x^* \in Y(x^*)$. Пусть α предельное порядковое число, тогда $Q_\alpha^* x^* \in \overline{\{Q_\beta^* x^*\}}_{\beta > \alpha} \subset Y(x^*)$. Значит $x^* = Q_\tau^* x^* \in Y(x^*)$, что и требовалось доказать.

Теорема 1. *Пусть пространство* X *обладает ПМНС, тогда в* X *можно ввести эквивалентную норму* $|||\cdot|||$ *такую, что норма пространства* $(X, |||\cdot|||)^*$ *будет локально равномерно выпуклой.*

Доказательство. Пусть $\{Q_\alpha^*\}_{\alpha \in \Lambda}$ проекторы из предложения 3 и пусть $\{x_{\alpha i}^*\}_{i=1}^\infty$ плотно в $(Q_{\alpha+1}^* - Q_\alpha^*)X$ $(\alpha \in \Lambda)$. Через $\mathfrak{A}_k$ обозначим совокупность всех подмножеств из Λ содержащих неболее чем k элементов. Введем функционалы

$$E_A(x^*) = \inf_{a_{\alpha i}} \Big\| x^* - \sum_{\alpha \in A} \sum_{i=1}^{k} a_{\alpha i} x_{\alpha i}^* \Big\| \quad (a_{\alpha i}\text{-действительные числа}, A \in \mathfrak{A}_k),$$

$$t_\alpha(x^*) = (\|Q_{\alpha+1}^*\| + \|Q_\alpha^*\|)^{-1}\|Q_{\alpha+1}^* x^* - Q_\alpha^* x^*\| \quad (\alpha \in \Lambda),$$

$$F_A(x^*) = \sum_{a\in A} t_a(x^*) \qquad (A \in \bigcup_1^\infty \mathfrak{A}_k),$$

$$G_1(x^*) = \|x^*\|,\ G_{k+1}(x^*) = \sup_{A\in\mathfrak{A}_k}[E_A(x^*)+kF_A(x^*)] \qquad (k=1,2,\ldots).$$

Из леммы 1 и результатов Амира и Линденштрауса [1] следует, что существует линейный ограниченный оператор T отображающий взаимно-однозначно X^* в $c_0(\Gamma)$ для некоторого Γ притом T непрерывен в слабой* топологии X^* и слабой топологии $c_0(\Gamma)$. Определим функцию $q(x^*, \sigma)$ заданную на $X^*\times(\{-1,-2,\ldots\}\cup A\cup\Gamma)$ следующим образом

$$q(x^*,\sigma) = \begin{cases} 2^\sigma G_{-\sigma}(x^*) & \text{для } \sigma = -1,-2,\ldots, \\ t_\sigma(x^*) & \text{для } \sigma\in A, \\ Tx^*(\sigma) & \text{для } \sigma\in\Gamma. \end{cases}$$

Эквивалентную норму в X^* введем формулой

$$|||x^*|||^* = \sup\Big[\sum_{i=1}^{j} 2^{-i}q^2(x^*,\sigma_i)\Big]^{1/2},$$

где точная верхняя грань берется по всевозможным конечным наборам $\{\sigma_i\}_1^j$. В силу предложения 3, леммы 3 и результатов из [16] следует, что норма $|||\cdot|||^*$ локально равномерно выпукла. Легко видеть, что $S^* = \{x^*\colon |||x^*|||^*\leqslant 1\}$ слабо* замкнутое подмножество X^*. Отсюда следует, что пространство $(X^*, |||\cdot|||^*)$ сопряжено к пространству $(X, |||\cdot|||)$, где

$$|||x||| = \sup_{x^*\in S^*}|x^*(x)|.$$

Этим и заканчивается доказательство теоремы 1.

Заметим, что существование ПМНС в X существенно для теоремы 1. Пространство $m(N)$, где N множество натуральных чисел, сопряжено к сепарабельному пространству l_1, но тем не менее справедливо следующее предложение.

Предложение 4. *Пространство $m(N)$ не обладает эквивалентную локально равномерно выпуклую норму.*

Через B обозначим совокупность всех функции $x(n)$ из $m(N)$, которые принимают значения 0 и ± 1. Через C обозначим все $x\in B$ для которых множество $\{n\colon x(n)=0\}$ бесконечно. Пусть $x\in B$, через $\mathscr{D}(x)$ обозначим совокупность всех $y\in B$ таких, что $x(n) = y(n)$ если $x(n)\neq 0$.

Лемма 4. *Для любых $x\in C$, $y\in\mathscr{D}(x)$ и $x^*\in m^*(N)$ существует последовательность $\{y_i\}_1^\infty\subset C\cap\mathscr{D}(x)$, такая что*

$$\lim_{i\to\infty} x^*(y_i)\geqslant x^*(y). \tag{4}$$

Доказательство. Хорошо известно (см. напр. [6] стр. 281), что существует конечно аддитивная функция μ заданная на множестве всех подмножеств из N, такая что для любого $z\in m(N)$

$$x^*(z) = \int_N z(n)\mu(dn),$$

где интеграл понимается в смысле Радона. Пусть λ атомная составляющая функции μ, т.е. для любого $\varphi\subseteq N$

$$\lambda(\varphi) = \sum_{n\in\varphi}\mu(n).$$

Положим $\nu = \mu-\lambda$. Заметим, что $\nu(\varphi) = 0$ для любого конечного подмножества $\varphi\subset N$. Пусть $\{n_j\}_0^\infty$ некоторое множество из натуральных чисел. Через $[\{n_j\}_0^\infty]'$ обозначим множество $\{n_{2j+1}\}_0^\infty$ если

$$\nu(\{n_{2j+1}\}_0^\infty)\geqslant\nu(\{n_{2j}\}_0^\infty)$$

и $\{n_{2j}\}_0^\infty$ в противном случае.

Положим $N_1 = \{n\colon |x(n)| = 1\}$, $N^+ = \{n\colon y(n) = 1\}$, $N^- = \{n\colon y(n) = -1\}$. Допустим, что множество $N^+\setminus N_1$ бесконечно. Обозначим через N_1^+ множество $[N^+\setminus N_1]'$. Считая что N_j^+ $(j = 1,2,\ldots,k)$ определены, то положим $N_{k+1}^+ = [(N^+\setminus N_1)\setminus\bigcup_1^k N_j^+]'$. Легко видеть, что

$$\nu\Big(\bigcup_1^i N_k^+\Big)\geqslant(1-2^{-i})\nu(N^+\setminus N_1). \tag{5}$$

Положим $y_i(n) = 0$ если n принадлежит множеству полученному из $(N^+\setminus N_i)\setminus\bigcup_1^i N_k^+$, после удаления его первых i индексов и положим $y_i(n) = y(n)$ в противном случае. Очевидно $y_i\in C\cap\mathscr{D}(x)$. В силу (5)

$$\begin{aligned} x^*(y_i) &= \nu\Big((N^+\cap N_1)\bigcup_1^i N_k^+\Big)-\nu(N^-)+\sum_{n=1}^\infty y_i(n)\lambda(n)\geqslant \\ &\geqslant \nu(N^+)-\nu(N^-)+\sum_{n=1}^\infty y_i(n)\lambda(n)-2^{-i}\nu(N^+\setminus N_1). \end{aligned} \tag{6}$$

Замечая, что для всех $n\in N$ $\lim\limits_{i\to\infty} y_i(n) = y(n)$ в силу (6) получим (4).

Случай когда $N^-\setminus N_1$ бесконечно рассматривается аналогично если заменить ν на $-\nu$.

Если $N^+\setminus N_1$ и $N^-\setminus N_1$ конечны, то положим $y_i = y$ $(i = 1,2,\ldots)$.

Доказательсво предложения 4. Модифицируем одну конструкцию Дэя [7]. Пусть $|||\cdot|||$ эквивалентная норма в пространстве $m(N)$ такая, что

$$\|x\|\leqslant|||x|||\leqslant p\|x\| \qquad (p\geqslant 1,\ x\in m(N)).$$

Возьмем $x \in B$ и положим

$$U(x) = \sup_{y \in \mathscr{D}(x)} |||y|||, \quad u(x) = \inf_{y \in \mathscr{D}(x)} |||y|||.$$

В силу леммы 3

$$U(x) = \sup_{y \in C \cap \mathscr{D}(x)} |||y|||$$

если $x \in C$.

Положим $x_0 = 0$. Считая, что x_j $(j = 0, 1, 2, \ldots, i)$ выбраны, $x_{i+1} \in \bigcap C\mathscr{D}(x_i)$ выберем так, что

$$|||x_{i+1}||| \geqslant \frac{3U(x_i) + |||x_i|||}{4}.$$

В [7] показано, что

$$\lim_{i \to \infty} [U(x_i) - u(x_i)] = 0.$$

Не уменьшая общность можно считать, что последовательность $\{U(x_i)\}_0^\infty$ сходится к некоторому числу a. Определим $z \in m(N)$ следующим образом $z(n) = x_i(n)$ если $x_i(n) \neq 0$ для некоторого i и $z(n) = 1$ в противном случае. Так как $z \in \bigcap_0^\infty \mathscr{D}(x_i)$, то $|||z||| = a$. Найдем возрастающую последовательность $\{n_i\}_0^\infty$ так, что $x_i(n_i) = 0$. Опеределим $z_i \in m(N): Z_i(n) = z(n)$ если $n \neq n_i$ и $Z_i(n_i) = 0$. Замечая, что $z_i \in \mathscr{D}(x_i)$ получим $|||z_i||| \to |||z|||$.

Так как $\{Z_i\}_0^\infty$ слабо сходится к z, то

$$2|||z||| = \lim_{i \to \infty} (|||z_i||| + |||z|||) \geqslant \overline{\lim_{i \to \infty}} |||z_i + z||| \geqslant \underline{\lim_{i \to \infty}} |||z_i + z||| \geqslant 2|||z|||.$$

Значит

$$\lim_{i \to \infty} |||z_i + z||| = 2,$$

но тем не менее $|||z_i - z||| \geqslant 1$, т.е. норма $|||\cdot|||$ не является локально равномерно выпуклой.

Замечание 1. Дэй [7] показал, что при несчетном Γ пространство $m(\Gamma)$ не обладает эквивалентной строго выпуклой нормы и следовательно не обладает эквивалентной локально равномерно выпуклой нормы. Пространство $m(N)$ интересно тем, что оно не обладает эквивалентной локально равномерно выпуклой нормы (как показано выше), но обладает эквивалентную строго выпуклую норму. Такова например норма

$$|||x||| = \sup_{n \in N} |x(n)| + \Big[\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} x^2(n)\Big]^{1/2}.$$

Заметим, что из доказательства предложения 4 следует, что в $m(N)$ не существует эквивалентной нормы, обладающей H-свойством[1]. Другим путём результат предложения 4 получен также в [19].

Отметим некоторые следствия из теоремы 1.

Следствие 1. *Если пространство X обладает ПМНС, то X строго дифференцируемо* (относительно определения см. напр. [2]).

Доказательство следует из теоремы 1 и [2].

Следствие 2. *Если пространство X обладает ПМОПС, то в X можно ввести эквивалентную локально равномерно выпуклую норму.*

Доказательство непосредственно вытекает из предложения 1 и теоремы 1.

Следствие 3. *Если пространство X обладает ПМНС, то в X можно ввести эквивалентную норму, дифференцируемую по Фреше.*

Доказательство вытекает из теоремы 1 и [12].

Следствие 4. *Пусть X пространство с безусловным базисом* (не обязательно счетным[2]) *$\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$. Для того чтобы в X можно было ввести эквивалентную, дифференцируемую по Фреше норму, необходимо и достаточно чтобы в X не существовало подпространство линейно гомеоморфное l_1.*

Доказательство. Так как l_1 сепарабельное пространство, а его сопряженное $m(N)$ несепарабельно, то необходимость следует из [10]. Через $\{e_\gamma^*\}_{\gamma \in \Gamma}$ обозначим сопряженную к базису $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ систему. Покажем, что $\overline{\mathrm{sp}}\{e_\gamma^*\}_{\gamma \in \Gamma} = X^*$. Допустим противное. Тогда так как (см. [14])

$$\sup\{|x^*(x)|;\ x \in \mathrm{sp}\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma \setminus A}\} = \inf\{\|x^* - y^*\|;\ y^* \in \mathrm{sp}\{e_\gamma^*\}_{\gamma \in A}\}$$

для любого $x^* \in X^*$ и конечного набора $A \subset \Gamma$, то существует $z^* \in X^*$ и последовательность конечных непересекающихся наборов $\{A_i\}_1^\infty \subset \Gamma$, таких что

$$z^*\Big(\sum_{\gamma \in A_i} a_\gamma e_\gamma\Big) \geqslant 1 \quad (a_\gamma \text{ — действительные числа}).$$

Отсюда, как показано в [8] стр. 129, следует, что в X существует подпространство изоморфное l_1.

Полученное противоречие показывает, что X обладает ПМНС. Для завершения доказательства достаточно сослаться на следствие 3.

---

(1) Говорят, что норма обладает H-свойством если на единичной сфере, порожденной ею, слабая сходимость влечет за собой сходимость по норме.

(2) Относительно определения безусловного базиса в несепарабельных пространств Банаха см. напр. [15].

Следующее предложение является обратным к следствию 3 для одного класса банаховых пространств.

Предложение 5. *Пусть X обладает слабо компактным фундаментальным подмножеством. Если норма пространства X дифференцируема по Фреше, то X обладает ПМНС.*

Доказательство. Воспользуемся методом трансфинитной индукции. Если X сепарабельно, то как показано в [10] X^* тоже сепарабельно. Известно (см. [5]), что если X и X^* сепарабельны, то X обладает ПМНС. Пусть $\aleph$ вес пространства X и пусть предложение 5 выполнено для всех пространств с весами меньших, чем $\aleph$. Амир и Линденштраус [1] показали, что существует последовательность проекторов P_γ: $X \to X$ $(0 \leqslant \gamma \leqslant \zeta)$, таких что $P_0 = 0$, $P_\zeta = I$, $\|P_\gamma\| = 1$ если $\gamma > 0$, $P_\gamma P_\delta = P_\delta P_\gamma = P_\delta$ если $\delta \leqslant \gamma$, $P_\gamma x \in \overline{\{P_{\delta+1}x\}}_{\delta<\gamma}$ и вес пространств $P_\gamma X$ меньше $\aleph$ если $\gamma < \zeta$. Докажем, что

$$P_\gamma^* x^* \in \overline{\{P_{\delta+1}^* x^*\}}_{\delta<\gamma}. \tag{7}$$

Предположим, что $\|P_\gamma^* x^*\| > 0$, так как в противном случае $P_{\delta+1}x = 0$ для всех $\delta < \gamma$ и (7) очевидно выполнено. Не уменьшая общность будем считать, что $\|P_\gamma^* x^*\| = 1$. Допустим, что существует $x \in X$ такое, что $P_\gamma^* x^*(x) = \|x\| = 1$. Найдем $\delta_i < \gamma$ так, чтобы

$$\lim_{i\to\infty} \|P_{\delta_i+1}x - P_\gamma x\| = 0.$$

Тогда

$$\lim_{i\to\infty} P_{\delta_i+1} x^*(x) = P_\gamma^* x^*(x).$$

Отсюда, имея ввиду, что норма $\|\cdot\|$ дифференцируема по Фреше, следует, что $\lim\limits_{i\to\infty} \|P_{\delta_i+1}^* x^* - P_\gamma^* x^*\| = 0$ (см. [16]).

Допустим, что $P_\gamma^* x^*$ не достигает своей точной верхней грани на единичной сфере пространства X. Через v^* обозначим сужение функционала $P_\gamma^* x^*$ на $P_\gamma X$. Очевидно $\|v^*\| = 1$. Зададим $\varepsilon > 0$. Так как множество линейных функционалов, достигающих свою точную верхнюю грань на единичной сфере плотно в сопряженном пространстве (см. [3]), то существует $z^* \in (P_\gamma X)^*$ так, что

$$\|v^* - z^*\| < \varepsilon/3$$

и $z^*(y) = \|z^*\| = \|y\| = 1$ для некоторого $y \in P_\gamma X$. Определим $y^* \in X^*$ согласно формулы

$$y^*(x) = z^*(P_\gamma x) \qquad (x \in X).$$

Тогда $\|P_\gamma^* y^*(y)\| = \|P_\gamma^* y^*\| = 1$ и

$$\|P_\gamma^* x^* - P_\gamma^* y^*\| = \|v^* - z^*\| < \varepsilon/3.$$

В силу доказанного выше можно найти $\delta < \gamma$ так, что

$$\|P_{\delta+1}^* y^* - P_\gamma^* y^*\| < \varepsilon/3.$$

Тогда

$$\|P_{\delta+1}^* x^* - P_\gamma^* x^*\| < \varepsilon,$$

что и доказывает (7).

Положим $X_\gamma = (P_{\gamma+1} - P_\gamma)X$. В силу индуктивного предположения X_γ обладает ПМНС, которую обозначим через K_γ. Докажем, что $K = \bigcup\limits_{\gamma<\zeta} K_\gamma$ является ПМНС пространства X.

Возьмем $x \in X$ и покажем по индукции, что $P_\gamma x \in \operatorname{sp} K$ $(0 \leqslant \gamma \leqslant \zeta)$. Очевидно $P_0 x \in \operatorname{sp} K$. Пусть $P_\delta x \in \operatorname{sp} K$ для всех $\delta < \gamma$. Если γ предельное порядковое число, то $P_\gamma x \in \operatorname{sp} K$, так как $P_\gamma x \in \overline{\{P_\delta x\}}_{\delta<\gamma}$. Пусть ξ таково, что $\xi + 1 = \gamma$. Тогда $P_\gamma x = P_\xi x + (P_{\xi+1}x - P_\xi x) \in \operatorname{sp} K$, так как $P_\xi x \in \operatorname{sp} K$ и $P_{\xi+1}x - P_\xi x \in \operatorname{sp} K$. Учитывая, что $P_\zeta x = x$ получим, что $x \in \operatorname{sp} K$, т.е. $X = \operatorname{sp} K$.

Возьмем $z \in K_\gamma$. Пусть $z^* \in K_\gamma$ такой, что $z^*(z) = 1$. Через x^* обозначим продолжение z^* на X согласно формулы

$$x^*(x) = z^*(P_{\gamma+1}x - P_\gamma x). \tag{8}$$

Очевидно $x^*(z) = 1$. Пусть $y \in \bigcup\limits_{\delta<\gamma} K_\delta$. Тогда, так как $P_{\gamma+1}y = P_\gamma y$, то $x^*(y) = 0$. Если $y \in \bigcup\limits_{\delta>\gamma} K_\delta$, то $x^*(y) = 0$, так как $P_{\gamma+1}y = P_\gamma y = 0$. Если $y \in K_\gamma \setminus \{z\}$, то $x^*(y) = 0$, так как K_γ является ПМНС пространства X_γ.

Покажем, что для любого $y^* \in X^*$

$$P_{\gamma+1}^* y^* - P_\gamma^* y^* \in \operatorname{sp} K^*. \tag{9}$$

Обозначим через w^* сужение y^* на X_γ. Найдем $\{z_i^*\}_1^j \subset K_\gamma^*$ так, что

$$\Big\| w^* - \sum_{i=1}^{j} a_i z_i^* \Big\| < \varepsilon \qquad (a_i \text{ — действительные числа, } \varepsilon > 0).$$

Пусть x_i^* продолжения z_i^* согласно (8). Тогда

$$\Big\| (P_{\gamma+1}^* y^* - P_\gamma^* y^*) - \sum_{i=1}^{j} a_i x_i^* \Big\| = \Big\| w^* - \sum_{i=1}^{j} a_i z_i^* \Big\| < \varepsilon.$$

Учитывая (7) и (9) по индукции доказывается, что $P_\gamma^* x^* \in \operatorname{sp} K^*$ $(0 \leqslant \gamma \leqslant \zeta)$, т.е. $X^* = \operatorname{sp} K^*$.

Замечание 2. Так как сепарабельное пространство с сопряженным сепарабельным обладает ПМНС (см. [5]), то результат Кадеца [10] о дифференцируемости нормы можно сформулировать так: для того, чтобы сепарабельное пространство обладало эквивалентной дифференцируемой по Фреше нормой, необходимо и достаточно, чтобы пространство обладало ПМНС. Легко видеть, что следствие 4 и предложение 5 представляют некоторое распространение теоремы Кадеца на несепарабельный случай.

Теорема 2. *Всякое ограниченное выпуклое и замкнутое подмножество пространства X, обладающее ПМОПС, является выпуклой, замкнутой оболочкой своих крайных точек.*

Доказательство. В силу предложения 1 и теоремы 1, не уменьшая общность, можно считать, что X является сопряженным к некоторому пространству Z, обладающее ПМНС K, притом норма пространства X локально равномерно выпукла.

Пусть A конечное подмножество K, положим

$$L_A = \{y\colon\ y \in X,\quad y(z) = 0,\ z \in A\},$$

$$D_A(x) = \inf_{y \in L_A} \|x-y\|$$

$$T_A(\varepsilon) = \{x\colon\ x \in X,\ \|x\| \leqslant 1,\ D_A(x) \geqslant \|x\| - \varepsilon\} \qquad (\varepsilon > 0).$$

В силу [3] и [11] для доказательства теоремы достаточно установить следующую лемму

Лемма 5. *Пусть $\{F_k\}_1^\infty$ убывающая последовательность замкнутых подмножеств пространства X и $\{A_k\}_1^\infty$-последовательность конечных подмножеств K, таких, что $F_k \subset T_{A_k}(1/k)$. Тогда $F = \bigcap_{k=1}^\infty F_k$ не пустое компактное множество.*

Доказательство. Возьмем $x_k \in F_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Тогда

$$D_{A_s}(x_k) \geqslant \|x_k\| - 1/s \qquad (k = 1, 2, \ldots;\ s = 1, 2, \ldots, k).$$

Из [1] и леммы 1 легко следует, что существует линейный проектор $P\colon Z \to Z$ и последовательность $\{z_i\}_1^\infty$, таких что $\|P\| = 1$, $\bigcup_{k=1}^\infty A_k \subset \{z_i\}_1^\infty \subset K$, $\operatorname{sp}\{z_i\}_1^\infty = PZ$, $P^* x_k = x_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

Положим

$$\Lambda_i = \{y\colon\ y \in P^*X,\ y(z_i) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, j\}$$

$$\Delta_i(x) = \inf_{y \in \Lambda_i} \|x-y\|.$$

Найдем $i_1 < i_2 < i_3 < \ldots$ так, чтобы $A_s \subset \{z_i\}_1^{i_s}$. Тогда, так как $\Lambda_{i_s} \subset L_{A_s}$, то

$$(10) \qquad \Delta_{i_s}(x_k) \geqslant D_{A_s}(x_k) \geqslant \|x_k\| - 1/s \qquad (k = 1, 2, \ldots;\quad s = 1, 2, \ldots, k).$$

Так как $\bigcup_{i=1}^\infty \Lambda_i = 0$ и слабая* сходимость и сходимость по норме

совпадают на единичной сфере $\{x\colon\ x \in P^*X,\ \|x\| = 1\}$ (³), существует (см. [9]) гомеоморфизм $h\colon P^*X \to l_1$ такой, что

$$\Delta_i(x) = \sum_{n=1}^{i} |hx(n)|,\ \|x\| = \|hx\|.$$

В силу (10)

$$\sum_{n=i_s}^\infty |hx_k(n)| < 1/s \qquad (k = 1, 2, \ldots;\ s = 1, 2, \ldots, k).$$

Отсюда следует, что множество $\{hx_k\}_1^\infty$ компактно и следовательно существует подпоследовательность $\{hx_{k_p}\}_1^\infty$ и элемент $hx \in l_1$ такой, что

$$\|hx_{k_p} - hx\| \to 0.$$

Но тогда и

$$\|x_{k_p} - x\| \to 0.$$

Так как F_k замкнуты, то $x \in F_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и следовательно $x \in F$, т.е. F не пусто.

Точно так же доказывается и компактность множества F.

Замечание 3. Из [5] и [13] следует, что если X сопряженное сепарабельное пространство, что X обладает ПМОПС. Таким образом теорема 2 является распространением на несепарабельный случай сформулированной в начале заметки теоремы Линденштрауса, Бессаги, Пелчинского. Отметим, что теорему Линденштрауса, Бессаги, Пелчинского нельзя в полном объеме перенести на несепарабельный случай. В сопряженном пространстве $m(N)$ существуют выпуклые ограниченные и замкнутые множества, не обладающие крайними точками.

Литература

[1] D. Amir, J. Lindenstrauss, *The structure of weakly compact sets in Banach spaces*, Ann. of Math. 88 (1968), стр. 35–46.
[2] E. Asplund, *Fréchet differentiability of convex functions*, Acta Math. 121 (1968), стр. 31–47.
[3] C. Bessaga, A. Pełczyński, *On extreme points in separable conjugate spaces*, Israel J. Math. 4 (1966), стр. 262–264.
[4] E. Bishop, R. Phelps, *A proof that every Banach space is subreflexive*, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), стр. 97–98.

(³) Совпадение слабой* сходимости и сходимости по норме на единичной сфере следует из локальной равномерной выпуклости нормы пространства X. В самом деле пусть $y_i, y \in P^*X$, $\|y_i\| = \|y\| = 1$ и $y_i(z) \to y(z)$ для всех $z \in PZ$. Зададим $\varepsilon > 0$. Найдем $z_0 \in PZ$ так, чтобы $y(z_0) > 1-\varepsilon$, $\|z_0\| = 1$. Тогда $\lim_{i\to\infty} \|y_i + y\| \geqslant 2-\varepsilon$ и следовательно $\|y_i + y\| \to 2$. Но тогда $\|y_i - y\| \to 0$.

[5] В. Ф. Гапошкин, М. И. Кадец, *Операторные базисы в пространствах Банаха*, Матем. сб., 61 (1963), стр. 3–12.

[6] Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы*, часть I, ИЛ, М. 1962.

[7] M. Day, *Strict convexity and smoothness of normed spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 70 (1955), стр. 516–528.

[8] — *Нормированные линейные пространства*, ИЛ, М., 1961.

[9] М. И. Кадец, *О связи между сильной и слабой сходимостью*, ДАН УССР, 9 (1959), стр. 949–952.

[10] — *Условия дифференцируемости нормы банахова пространства*, УМН, 20, вып. 3 (1965), стр. 183–187.

[11] J. Lindenstrauss, *On extreme points in l_1, ...*, Israel J. Math. 4 (1966), стр. 59–61.

[12] A. Lovaglia, *Locally uniformly convex Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1955), стр. 225–238.

[13] В. Д. Мильман, *Джеймсовские классы минимальных систем и их связи с изометрическими свойствами В-пространств*, ДАН СССР, 192 (1970), стр. 742–745.

[14] I. Singer, *Basic sequences and reflexity in Banach spaces*, Studia Math. 21 (1962), стр. 351–369.

[15] С. Троянски, *Эквивалентные нормы в несепарабельных В-пространствах с безусловным базисом*, Теория функций, функциональный анализ и их прилож. (Харьков), 6 (1968), стр. 59–65.

[16] — *On locally uniformly convex and differentiable norms in certain non-separable Banach spaces*, Studia Math. 37 (1970), стр. 169–176.

[17] В. Л. Шмульян, *Sur la structure de la sphère unitaire dans l'espace de Banach*, Матем. сб. 9 (1941), стр. 545–562.

Добавлено в корректуре

[18] E. Asplund, *Boundedly Krein-compact Banach spaces*, Proc. of the Funct. Analysis Week, Aarhus University 1969.

[19] J. Lindenstrauss, *Weakly compact sets, their topological properties and the Banach spaces they generate*, Jerusalem 1967-1968.

[20] I. Namioka, *Neighbourhoods of extreme points*, Israel J. Math. 4 (1967), стр. 142-152.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ БОЛГАРСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

Received May 10, 1971 (336)

STUDIA MATHEMATICA, T. XLIII. (1972)

Action of topological semigroups, invariant means, and fixed points

by

ANTHONY TO-MING LAU (Alberta, Canada)

Abstract. It is the main purpose of this paper to establish relations between fixed point properties on compact convex subsets of a locally convex space and the existence of an invariant mean for certain actions of a topological semigroup on an arbitrary topological space. Our results generalise some recent fixed point theorems of M. M. Day and T. Mitchell.

1. Introduction. Consider the following fixed point properties for an action of a topological semigroup S on a Hausdorff topological space X such that the mapping $S\times X \to X$ is continuous in the second variable:

(P_1) Whenever S acts affinely on a compact convex subset Y of a l.c.s. (locally convex linear topological space) for which the mapping $S\times Y \to Y$ is *continuous in the second variable* and there exists a continuous mapping Π from X into Y such that $\Pi(s\cdot x) = s\cdot \Pi(x)$ for all $s\in S$ and $x\in X$, then Y has a fixed point for S.

(P_2) Whenever S acts affinely on a compact convex subset Y of a l.c.s. for which the mapping $S\times Y\to Y$ is *separately continuous* and there exists a continuous mapping Π from X into Y such that $\Pi(s\cdot x) = s\cdot\Pi(x)$ for all $s\in S$ and $x\in X$, then Y has a fixed point for S.

(P_3) Whenever S acts affinely on a compact convex subset Y of a l.c.s. for which the mapping $S\times Y\to Y$ is *jointly continuous* and there exist a continuous mapping Π from X into Y such that $\Pi(s\cdot x) = s\cdot\Pi(x)$ for all $s\in S$ and $x\in X$, then Y has a fixed point for S.

If A is a norm closed S-translation invariant subspace of $m(X)$ (the set of bounded real functions on X) containing constants, and

(P) Whenever $\mathscr{S} = \{\eta(s);\ s\in S\}$ is a homomorphic representation of S as continuous affine mappings from a compact convex subset Y of a l.c.s. into Y and there exist a linear transformation T from $\mathscr{A}(Y)$ (the set of affine continuous real functions on Y) into A such that $T(1)=1$, $T(f)\geqslant 0$ for $f\geqslant 0$ and ${}_sT(h) = T({}_{\eta(s)}h)$ for all $s\in S$, $h\in\mathscr{A}(Y)$, then Y has a fixed point for $\mathscr{S}$.