[8] T. S. Lie et al., *Projecteurs et unités approchées pour des ideaux dans $L^1(G)$*, C. R. Acad. Sci. Paris, 272 (A), (1971), p. 473.
[9] A. Pełczyński, *On simultaneous extensions of continuous functions*, Studia Math. 24 (1964), pp. 285–304.
[10] H. Rosenthal, *Projections onto translation-invariant subspaces of $L^p(G)$*, Mem. Amer. Math. Soc. 63 (1966).
[11] B. M. Schreiber, *On the coset ring and strong Ditkin sets*, Pacific J. Math. 32 (1970), pp. 805–812.
[12] J. D. Stegeman, *A criterion for V-interpolations*, J. Func. Anal., 8 (1971), pp. 189–196.
[13] N. Th. Varopoulos, *Tensor algebras and Harmonic Analysis*, Acta. Math. 119 (1968), pp. 51–111.
[14] — *On a problem of A. Beurling*, J. Func. Anal. 2 (1968), pp. 24–30.

Received May 14, 1971 (338)

STUDIA MATHEMATICA, T. XLIII. (1972)

Оператор суперпозиции в модулярных функциональных пространствах

И. В. ШРАГИН (Тамбов)

Резюме. Исследуются условия вложения некоторых классов измеримых функций. Как следствия этих условий получены различные предложения о действии и ограниченности оператора суперпозиции в пространствах, являющихся широкими обобщениями пространств Орлича. Установлены также некоторые свойства таких пространств.

Эта статья содержит подробное изложение части результатов, анонсированных в [9] (мы не затрагиваем здесь вопросов, касающихся непрерывности оператора суперпозиции). Точнее говоря, здесь излагаются более общие предложения, чем в [9]. Дело в том, что под влиянием работы Л. Древновского и В. Орлича [4] мы ослабили ограничения на функцию, порождающую оператор суперпозиции. Влияние работы [4] сказалось и в том, что, в отличие от [9], предложения об операторе суперпозиции получаются здесь как следствия нескольких общих фактов, относящихся к вложению некоторых классов функций.

Работа состоит из пяти параграфов. В § 1 доказываются две вспомогательные леммы из теории меры и интеграла. В § 2 устанавливаются необходимые и достаточные условия вложения некоторых классов измеримых функций. В § 3 содержатся предложения о действии оператора суперпозиции в модулярных пространствах, порожденных так называемыми предгенфункциями и генфункциями. Кроме того, приводятся некоторые факты о вложении таких пространств. § 4 посвящен свойству ограниченности оператора суперпозиции. В § 5 устанавливаются необходимые и достаточные условия открытости и замкнутости класса Орлича в модулярном F-пространстве, порожденном генфункцией.

Эти довольно разнородные факты связаны между собой способом получения: почти все они выводятся из Леммы 2.2. Применяемый в этой работе метод исследования оператора суперпозиции (этот метод впервые использован в [2] и [3]) несколько отличен от методов других авторов (см. библиографию в [4]). Отметим еще, что здесь существенно используется неатомичность меры. Для случая атомической меры аналогичные результаты анонсированы в [11].

§ 1. Исходные данные и вспомогательные предложения. Пусть E — непустое множество; $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра его подмножеств (имеется в виду, что $E \in \mathfrak{A}$); μ — неотрицательная, счетно-аддитивная, полная σ-конечная и неатомическая мера, определенная на $\mathfrak{A}$; $R = (-\infty, \infty)$, $R^* = [-\infty, \infty]$; $\underline{S}^*$ — множество всех μ-измеримых функций $x\colon E \to R^*$; $\overline{\overline{w}}_1, \overline{\overline{w}}_2, \ldots$ — все рациональные числа.

Определение 1.1. Множество $A \subset R^*$ называется 0-*открытым*, если для любого $r \in A \cap [-\infty, 0)$ существует такое $s > r$, что $[r, s) \subset A$, а для любого $r \in A \cap (0, \infty]$ существует такое $s < r$, что $(s, r] \subset A$.

Определение 1.2. Функция $f\colon A \to R^*$, где A 0-открыто, называется 0-*полунепрерывной снизу на* A, *если при* $r_0 \in A \cap [-\infty, 0)$ $f(r_0) = \lim\limits_{r \to r_0+0} f(r)$, а при $r_0 \in A \cap (0, \infty]$ $f(r_0) = \lim\limits_{r \to r_0-0} f(r)$.

Если в определении 1.2 заменить $\underline{\lim}$ на $\overline{\lim}$ (lim), то получим определение 0-*полунепрерывой сверху* (соответственно, 0-непрерывной) функции.

Лемма 1.1. *Пусть каждому* $t \in E$ *соответствует множество* $\mathscr{E}(t) \subset R^*$, 0-*открытое почти при каждом* t, *причем* $\underline{C}_j \equiv \{t\colon \overline{\overline{w}}_j \in \mathscr{E}(t)\} \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \ldots$ *Пусть, далее, функция* $Q(r, t)$ *со значениями в* R^*, *определенная при* $t \in E$, $r \in \mathscr{E}(t)$, *такова, что функция* $Q(w_j, \cdot)\colon \underline{C}_j \to R^*$ μ-*измерима на* $\underline{C}_j$, $j = 1, 2, \ldots$, *и почти при каждом* t *функция* $Q(\cdot, t)\colon \mathscr{E}(t) \to R^*$ 0-*полунепрерывна снизу на* $\mathscr{E}(t)$. *Тогда функция* $F\colon E \to R^*$, *определяемая равенством*

$$F(t) = \begin{cases} \sup\{Q(r, t)\colon r \in \mathscr{E}(t)\}, & \text{если } \mathscr{E}(t) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \mathscr{E}(t) = \emptyset, \end{cases}$$

принадлежит множеству S^*.

Доказательство. Положим при $p = 1, 2, \ldots$ $D_p = \bigcup\limits_{j=1}^{p} \underline{C}_j$,

$$F_p(t) = \begin{cases} \max\{Q(w_j, t)\colon w_j \in \mathscr{E}(t), \quad 1 \leqslant j \leqslant p\}, & t \in D_p, \\ 0, \quad t \in E \setminus D_p. \end{cases}$$

Так как при любом $\overline{\overline{C}} \in R$

$$\{t \in D_p\colon F_p(t) > \overline{\overline{C}}\} = \bigcup_{j=1}^{p} \{t \in \underline{C}_j\colon Q(\overline{\overline{w}}_j, t) > \overline{\overline{C}}\},$$

то функции F_p μ-измеримы на E. Кроме того, $\lim F_p(t) = F(t)$ п.в., откуда следует, что $F \in S^*$.

Заметим, что при доказательстве Леммы 1.1 σ-конечность и неатомичность меры μ не использовались.

Лемма 1.2. *Пусть даны числа* $a_i > 0$ *и функции* $f_i \in S^*$, *причем* $f_1(t) \geqslant f_2(t) \geqslant \ldots$ *п.в. и*(1) $\int f_i(t)\,d\mu = \infty$, $i = 1, 2, \ldots$ *Тогда существуют такие попарно непересекающиеся множества* $E_i \in \mathfrak{A}$, *что* $\mu E_i < \infty$ *и* $\int\limits_{E_i} f_i(t)\,d\mu > a_i$, $i = 1, 2, \ldots$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что все функции f_i определены и μ-измеримы на E и $f_1(t) \geqslant f_2(t) \geqslant \ldots$ при всех $t \in E$. Положим $B_i = \{t\colon f_i(t) = \infty\}$. Тогда $B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ Рассмотрим четыре возможных случая.

I. Пусть $\mu \bigcap\limits_i B_i > 0$. Тогда, в силу σ-конечности и неатомичности меры, существуют такие попарно непересекающиеся множества $E_i \subset \bigcap\limits_k B_k$, что $0 < \mu E_i < \infty$, $i = 1, 2, \ldots$ Для этих множеств утверждение леммы очевидно.

II. Пусть $\mu \bigcap\limits_i B_i = 0$, но $\mu B_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots$. Тогда $\mu B_i = \sum\limits_{k \geqslant i} \mu(B_k \setminus B_{k+1}) > 0$, $i = 1, 2, \ldots$, и, следовательно, в ряду $\sum\limits_{i \geqslant 1} \mu(B_i \setminus B_{i+1})$ бесконечно много положительных членов. Разобьем натуральный ряд на такие конечные группы $\{i_{p-1}+1, i_{p-1}+2, \ldots, i_p\}$, $p = 1, 2, \ldots$ $(i_0 = 0)$, что $\mu(B_i \setminus B_{i+1}) = 0$ при $i_{p-1}+1 \leqslant i \leqslant i_p - 1$, а $\mu(B_{i_p} \setminus B_{i_p+1}) > 0$. Затем из $B_{i_p} \setminus B_{i_p+1}$ выделяем попарно непересекающиеся множества $E_{i_{p-1}+1}, E_{i_{p-1}+2}, \ldots, E_{i_p}$ с положительными конечными мерами, $p = 1, 2, \ldots$ В результате мы получим последовательность $\{E_i\}$ попарно непересекающихся множеств, таких, что $0 < \mu E_i < \infty$ и $f_i(t) = \infty$ при всех $t \in E_i$, $i = 1, 2, \ldots$

III. Пусть $\mu B_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots$, то есть $f_i(t) < \infty$ п.в. Пользуясь σ-конечностью меры, счетной аддитивностью интеграла и конечностью п.в. функции f_1, найдем такое множество E_1, что $\mu E_1 < \infty$ и

$$a_1 < \int\limits_{E_1} f_1(t)\,d\mu < \infty.$$

Предположим, что существуют такие попарно непересекающиеся множества $E_1, E_2, \ldots, E_k$ с конечными мерами, что

$$a_i < \int\limits_{E_i} f_i(t)\,d\mu < \infty, \qquad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Положим $A_k = \bigcup\limits_{i=1}^{k} E_i$. Тогда $\int\limits_{A_k} f_{k+1}(t)\,d\mu \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} \int\limits_{E_i} f_i(t)\,d\mu < \infty$, откуда, в силу условия леммы, $\int\limits_{E \setminus A_k} f_{k+1}(t)\,d\mu = \infty$. Теперь находим такое

(1) $\int = \int\limits_E$.

$E_{k+1} \subset E \setminus A_k$, что $\mu E_{k+1} < \infty$ и $a_{k+1} < \int\limits_{E_{k+1}} f_{k+1}(t)\,d\mu < \infty$. Таким образом, существование множеств E_i доказано с помощью индукции.

IV. Пусть существует такое m, что $\mu B_m > 0$, а при всех $i > m$ $\mu B_i = 0$. Так же, как в случае III, построим требуемые множества E_i, $i = m+1, m+2, \ldots$ Если $\mu(B_m \setminus \bigcup\limits_{i \geqslant m+1} E_i) > 0$, то из $B_m \setminus \bigcup\limits_{i \geqslant m+1} E_i$ выделяем попарно непересекающиеся множества $E_1, E_2, \ldots, E_m$ с положительными конечными мерами и получаем требуемое. Пусть $\mu(B_m \setminus \bigcup\limits_{i \geqslant m+1} E_i) = 0$. Тогда, так как $\mu B_m > 0$, существует такое $n > m$, что $\mu(B_m \cap E_n) > 0$. Так как $a_n < \int\limits_{E_n} f_n(t)\,d\mu < \infty$, то найдется такое $e \subset B_m \cap E_n$, что $\mu e > 0$ и $\int\limits_{E_n \setminus e} f_n(t)\,d\mu > a_n$. Затем нужные нам множества $E_1, E_2, \ldots, E_m$ выделяем из e, а $E_n \setminus e$ снова обозначаем через E_n.

§ 2. Теоремы об условиях вложения классов функций. Зафиксируем две μ-измеримые на E функции a и b со значениями в R^*, притом такие, что $a(t) < b(t)$ при всех t. Пусть $\Delta(t)$ — промежуток с концами $a(t)$ и $b(t)$, причем каждый из концов может содержаться или не содержаться в $\Delta(t)$. Мы предполагаем, что

$$\{t\colon a(t) \in \Delta(t)\} \in \mathfrak{A},\ \{t\colon b(t) \in \Delta(t)\} \in \mathfrak{A}.$$

Положим

$$\Delta = \{(r, t)\colon t \in E, r \in \Delta(t)\},\ \Delta(r) = \{t\colon r \in \Delta(t)\}.$$

Очевидно, $\Delta(r) \in \mathfrak{A}$ при любом $r \in R^*$. Обозначим через $\Delta_0(t)$ наибольшее 0-открытое множество, содержащееся в $\Delta(t)$. Очевидно,

$$\Delta_0(t) = \begin{cases} \Delta(t) \setminus \{a(t)\}, & \text{если } a(t) \in \Delta(t) \cap (0, \infty), \\ \Delta(t) \setminus \{b(t)\}, & \text{если } b(t) \in \Delta(t) \cap (-\infty, 0), \\ \Delta(t) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $T \subset S^*$, то положим

$$T(\Delta) = \{\bar{\bar{x}} \in T\colon \bar{\bar{x}}(t) \in \Delta(t) \text{ п.в.}\}.$$

Зафиксируем два непустых множества A и B, состоящих из положительных чисел. Пусть функции $P(\alpha, r, t)$ и $Q(\beta, r, t)$ со значениями в $[0, \infty]$, определенные при $\alpha \in A, \beta \in B, (r, t) \in \Delta$, удовлетворяют условиям:

1) При любых $(r, t) \in \Delta$ функции $P(\cdot, r, t)$ и $Q(\cdot, r, t)$ не убывают по α и, соответственно, по β.

2) Если $\bar{\bar{x}} \in S^*(\Delta)$, то $P\big(\alpha, \bar{\bar{x}}(\cdot), \cdot\big) \in S^*$ и $Q\big(\beta, \bar{\bar{x}}(\cdot), \cdot\big) \in S^*$ при любых $\alpha \in A$ и $\beta \in B$.

3) При каждом $\alpha \in A$ и почти при каждом $t \in E$ функция $P(\alpha, \cdot, t)$ не убывает (по r) на $\Delta(t) \cap (0, \infty]$ и не возрастает на $\Delta(t) \cap [-\infty, 0)$.

4) При каждом $\beta \in B$ и почти при каждом $t \in E$ функция $Q(\beta, \cdot, t)$ 0-полунепрерывна снизу на $\Delta_0(t)$.

Положим

$$\begin{aligned} \Delta^A(t) &= \{r \in \Delta(t)\colon P(\alpha, r, t) < \infty \text{ при всех } \alpha \in A\}, \\ \mathscr{E}(t) &= \{r \in \Delta^A(t)\colon Q(\beta, r, t) > \gamma P(\alpha, r, t)\}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$F(t, \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} \sup\{Q(\beta, r, t)\colon r \in \mathscr{E}(t)\}, & \text{если } \mathscr{E}(t) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \mathscr{E}(t) = \emptyset, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $\alpha \in A$, $\beta \in B$, $\gamma > 0$, $t \in E$.

Лемма 2.1. *При любых $\alpha \in A$, $\beta \in B$, $\gamma > 0$ $F(\cdot, \alpha, \beta, \gamma) \in S^*$.*

Доказательство. Положим

$$\mathscr{E}_0(t) = \mathscr{E}(t) \cap \Delta_0(t),$$

$$F_0(t) = \begin{cases} \sup\{Q(\beta, r, t)\colon r \in \mathscr{E}_0(t)\}, & \text{если } \mathscr{E}_0(t) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } \mathscr{E}_0(t) = \emptyset. \end{cases}$$

Легко проверить, что почти при каждом t множество $\mathscr{E}_0(t)$ 0-открыто, и $\{t\colon \bar{\bar{w}}_j \in \mathscr{E}_0(t)\} \in \mathfrak{A}$, $j = 1, 2, \ldots$ Применяя лемму 1.1, получаем, что $F_0 \in S^*$. Положим, далее,

$$\begin{aligned} E_a &= \{t\colon a(t) \in \mathscr{E}(t) \cap (0, \infty)\} \cap \{t\colon Q\big(\beta, a(t), t\big) > F_0(t)\}, \\ E_b &= \{t\colon b(t) \in \mathscr{E}(t) \cap (-\infty, 0)\} \cap \{t\colon Q\big(\beta, b(t), t\big) > F_0(t)\}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Тогда, как очевидно,

$$F(t, \alpha, \beta, \gamma) = \begin{cases} Q\big(\beta, a(t), t\big), & t \in E_a, \\ Q\big(\beta, b(t), t\big), & t \in E_b, \\ F_0(t), & t \in E \setminus (E_a \cup E_b), \end{cases} \tag{2.4}$$

откуда и следует, что $F(\cdot, \alpha, \beta, \gamma) \in S^*$. Лемма доказана.

Положим при $\alpha \in A$ и $\bar{\bar{x}} \in S^*(\Delta)$ $I_P(\alpha, x) = \int P\big(\alpha, x(t), t\big)\,d\mu$, $L_P^\alpha = \{x\colon I_P(\alpha, x) < \infty\}$. Аналогично определяются $I_Q(\beta, x)$ и L_Q^β. Положим, далее, $P_A = \bigcap\limits_{\alpha \in A} L_P^\alpha$, $Q^B = \bigcup\limits_{\beta \in B} L_Q^\beta$,

$$\underline{\underline{V}}(\bar{\bar{x}}_0, \alpha_0, \varrho) = \Big\{x \in S^*\colon \int\limits_{\{t\colon x(t) \neq x_0(t)\}} P\big(\alpha_0, x(t), t\big)\,d\mu \leqslant \varrho\Big\},$$

где $\alpha_0 \in A$, $\bar{\bar{x}}_0 \in S^*$, $\varrho > 0$.

Лемма 2.2 (основная). *Если $x_0 \in P_A$ и при некоторых $a_0 \in A$ и $\varrho > 0$ $[P_A \cap \underline{\underline{V}}(x_0, a_0, \varrho)] \subset Q^B$, то существуют такие $\alpha \in A$, $\beta \in B$, $\gamma > 0$, что функция $F(\cdot, \alpha, \beta, \gamma)$ суммируема на E (обозначение: $F(\cdot, \alpha, \beta, \gamma) \in L$).*

Доказательство. Предположим, что $F(\cdot, \alpha, \beta, \gamma) \notin L$ при любых α, β, γ. Из (2.1) и (2.2) следует, что функция F не возрастает по α и γ и не убывает по β. Возьмем такие $\alpha_i \in A$, $\beta_i \in B$, $i = 1, 2, \ldots$, что $\alpha_i \nearrow \sup A$, $\beta_i \searrow \inf B$, причем если $\sup A \in A$, то $\alpha_i = \sup A$ при всех i, и если $\inf B \in B$, то $\beta_i = \inf B$ при всех i. Так как $\int F(t, \alpha_i, \beta_i, i)\, d\mu = \infty$, $i = 1, 2, \ldots$, то по лемме 1.2 существуют такие попарно непересекающиеся множества $E_i \in \mathfrak{A}$, что $\mu E_i < \infty$ и $\int_{E_i} F(t, \alpha_i, \beta_i, i)\, d\mu > 1/i$, $i = 1, 2, \ldots$

При фиксированном i и $p = 1, 2, \ldots$ положим

$$D_p = \bigcup_{j=1}^{p} \{t \in E \setminus (E_a \cup E_b) \colon \overline{\overline{w}}_j \in \mathscr{E}_0(t)\},$$

$$F_p(t) = \begin{cases} Q(\beta_i, a(t), t), & t \in E_a, \\ Q(\beta_i, b(t), t), & t \in E_b, \\ \max\{Q(\beta_i, \overline{\overline{w}}_j, t) \colon \overline{\overline{w}}_j \in \mathscr{E}_0(t), 1 \leqslant j \leqslant p\}, & t \in D_p, \\ 0, & t \in [E \setminus (E_a \cup E_b)] \setminus D_p, \end{cases}$$

где $\mathscr{E}_0(t) = \mathscr{E}(t) \cap \Delta_0(t)$, а множества $\mathscr{E}(t)$, E_a и E_b опеределяются равенствами (2.1) и (2.3) при $\alpha = \alpha_i$, $\beta = \beta_i$, $\gamma = i$.

Из доказательства леммы 1.1 следует, что $F_p \in S^*$. Кроме того, учитывая (2.4), имеем, что при $p \to \infty$ $F_p(t) \nearrow F(t)$ п.в. Поэтому мы можем зафиксировать такое p_i, что

$$\int_{E_i} F_{p_i}(t)\, d\mu > 1/i. \tag{2.5}$$

Без ограничения общности можно считать, что $F_{p_i}(t) > 0$ при всех $t \in E_i$, откуда следует, что $E_i \setminus (E_a \cup E_b) \subset D_{p_i}$. Положим

$$E_{ij} = [E_i \setminus (E_a \cup E_b)] \cap \{t \colon \overline{\overline{w}}_j \in \mathscr{E}_0(t)\} \cap \{t \colon F_{p_i}(t) = Q(\beta_i, \overline{\overline{w}}_j, t)\},$$

где $1 \leqslant j \leqslant p_i$. Ясно, что $E_{ij} \in \mathfrak{A}$ и $E_i \setminus (E_a \cup E_b) = \bigcup_{j=1}^{p_i} E_{ij}$. Положим

$$\overline{\overline{x}}_i(t) = \begin{cases} a(t), & t \in E_i \cap E_a, \\ b(t), & t \in E_i \cap E_b, \\ w_1, & t \in E_{i1}, \\ w_j, & t \in E_{ij} \setminus \bigcup_{k=1}^{j-1} E_{ik},\ j = 2, 3, \ldots, p_i. \end{cases}$$

Очевидно, функция $\overline{\overline{x}}_i$ измерима на E_i. При этом для всех $t \in E_i$ $x_i(t) \in \Delta(t)$,

$$Q(\beta_i, x_i(t), t) > iP(\alpha_i, x_i(t), t), \tag{2.6}$$

$$P(\alpha, x_i(t), t) < \infty \quad \text{при всех} \quad \alpha \in A, \tag{2.7}$$

$$F_{p_i}(t) = Q(\beta_i, x_i(t), t). \tag{2.8}$$

Положим $B_i = \{t \in E_i \colon F_{p_i}(t) = \infty\}$, $I_1 = \{i \colon \mu B_i > 0\}$, $I_2 = \{i \colon \mu B_i = 0\}$.

Пусть $i \in I_1$. Найдем такое $R_i \subset B_i$, что $\mu R_i > 0$ и $\int_{R_i} P(\alpha, x_i(t), t)\, d\mu < \infty$ при всех $\alpha \in A$. С этой целью воспользуемся последовательностью $\{\alpha_k\}$, выбранной в начале доказательства. Так как $\mu B_i \leqslant \mu E_i < \infty$, то, в силу (2.7), существует такое $B_{ik} \subset B_i$, что $\mu B_{ik} > \mu B_i(1 - 2^{-k})$ и

$$\sup\{P(\alpha_k, x_i(t), t) \colon t \in B_{ik}\} < \infty, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Очевидно, в качестве R_i можно взять $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_{ik}$.

Далее, используя неатомичность меры, находим такое $A_i \subset R_i$, что $\mu A_i > 0$ и

$$\int_{A_i} P(\alpha_i, \overline{\overline{x}}_i(t), t)\, d\mu \leqslant 1/i^2. \tag{2.9}$$

Пусть $i \in J_2$, то есть $F_{p_i}(t) < \infty$ п.в. на E_i. Возьмем такие числа δ_n, что $0 < \delta_n < \mu E_i$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\lim \delta_n = 0$. Аналогично построению, проведенному при $i \in I_1$, для каждого n найдем такое $\underline{\underline{C}}_n \subset E_i$, что $\mu \underline{\underline{C}}_n > \mu E_i - \delta_n$ и

$$\int_{C_n} P((\alpha, \overline{\overline{x}}_i(t), t)\, d\mu < \infty \quad \text{при всех} \quad \alpha \in A.$$

Так как $\mu \bigcup_{n=1}^{\infty} \underline{\underline{C}}_n = \mu E_i$, то, в силу (2.5), найдется такое N, что $\int_G F_{p_i}(t)\, d\mu > 1/i$, где $G = \bigcup_{n=1}^{N} \underline{\underline{C}}_n$. Так как $F_{p_i}(t) < \infty$ п.в. на E_i и мера μ неатомична, то существует такое $A_i \subset G$, что

$$\int_{A_i} F_{p_i}(t)\, d\mu = 1/i. \tag{2.10}$$

Теперь эти построения будем считать проведенными для всех натуральных i. В результате мы получим такие попарно непересекающиеся множества $A_i \in \mathfrak{A}$, что $\mu A_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots$, и при $i \in I_1$ имеет

место (2.9), а при $i \in I_2$ — (2.10). Кроме того, из построения множеств A_i следует, что при любом $\alpha \in A$

$$\int_{A_i} P(\alpha, x_i(t), t)\, d\mu < \infty, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{2.11}$$

Возьмем теперь такое m, что $\sum_{i \geqslant m} 1/i^2 \leqslant \varrho$ и $\alpha_m \geqslant \alpha_0$, и положим

$$\bar{\bar{x}}(t) = \begin{cases} \bar{\bar{x}}_i(t), & t \in A_i, i \geqslant m, \\ \bar{\bar{x}}_0(t), & t \in E \setminus \bigcup_{i \geqslant m} A_i. \end{cases}$$

Очевидно, $x \in S^*(\Delta)$. Покажем, что $x \in P_A$. С этой целью возьмем произвольное $\alpha \in A$ и найдем такое $q > m$, что $\alpha_q \geqslant \alpha$. Тогда

$$I_P(\alpha, x) \leqslant \sum_{i=m}^{q-1} \int_{A_i} P(\alpha, \bar{\bar{x}}_i(t), t)\, d\mu + \sum_{i \geqslant q} \int_{A_i} P(\alpha_i, x_i(t), t)\, d\mu + I_P(\alpha, x_0).$$

Конечность крайних членов в этой сумме очевидна (см. (2.11) и условие леммы), а в силу (2.9), (2.6), (2.8) и (2.10),

$$\sum_{i \geqslant q} \int_{A_i} P(\alpha_i, x_i(t), t)\, d\mu = \sum_{i \in I_{1q}} \int_{A_i} P(\alpha_i, x_i(t), t)\, d\mu + \sum_{i \in I_{2q}} \int_{A_i} P(\alpha_i, x_i(t), t)\, d\mu$$
$$\leqslant \sum_{i \in I_{1q}} 1/i^2 + \sum_{i \in I_{2q}} (1/i) \int_{A_i} Q(\beta_i, \bar{\bar{x}}_i(t), t)\, d\mu = \sum_{i \geqslant q} 1/i^2 < \varrho,$$

где $I_{nq} = \{i \in I_n \colon i \geqslant q\}$, $n = 1, 2$. Таким образом, $I_P(\alpha, x) < \infty$ при любом $\alpha \in A$; следовательно, $x \in P_A$. Кроме того, $x \in \underline{\underline{V}}(x_0, \alpha_0, \varrho)$, так как

$$\int_{\{t \colon x(t) \neq x_0(t)\}} P(\alpha_0, x(t), t)\, d\mu \leqslant \sum_{i \geqslant m} \int_{A_i} P(\alpha_i, x_i(t), t)\, d\mu \leqslant \sum_{i \geqslant m} 1/i^2 \leqslant \varrho.$$

Покажем теперь, что $x \notin Q^B$. С этой целью для произвольного $\beta \in B$ найдем такое $n \geqslant m$, что $\beta \geqslant \beta_n$. Тогда

$$I_Q(\beta, x) \geqslant \sum_{i \geqslant n} \int_{A_i} Q(\beta_i, x_i(t), t)\, d\mu = \sum_{i \geqslant n} \int_{A_i} F_{\beta_i}(t)\, d\mu = \infty,$$

так как при $i \in I_1$ $F_{\beta_i}(t) = \infty$ на A_i и $\mu A_i > 0$, а при $i \in I_2$ имеет место (2.10).

Полученное противоречие с условием завершает доказательство леммы.

Если $T \subset S^*$, то аналогично множеству $T(\Delta)$ положим $T(\Delta^A) = \{\bar{\bar{x}} \in T \colon x(t) \in \Delta^A(t)$ п.в.$\}$. В силу (2.1) и (2.2), при $\alpha \in A$, $\beta \in B$, $\gamma > 0$, $t \in E$, $r \in \Delta^A(t)$

$$Q(\beta, r, t) \leqslant \gamma P(\alpha, r, t) + F(t, \alpha, \beta, \gamma), \tag{2.12}$$

откуда следует

Лемма 2.3. *Если существуют такие $\alpha \in A$, $\beta \in B$, $\gamma > 0$, что $F(\cdot, \alpha, \beta, \gamma) \in L$, то $L_P^\alpha(\Delta^A) \subset L_Q^\beta(\Delta^A)$.*

Из лемм 2.2 и 2.3 непосредственно следует

Теорема 2.1. *Если $x_0 \in P_A$ и $[P_A \cap \underline{\underline{V}}(x_0, \alpha_0, \varrho)] \subset Q^B$ при некоторых $\alpha_0 \in A$ и $\varrho > 0$, то $L_P^\alpha(\Delta^A) \subset L_Q^\beta(\Delta^A)$ при некоторых $\alpha \in A$ и $\beta \in B$.*

Заметим, что если $x \in P_A$, то $P(\alpha, x(t), t) < \infty$ п.в. при любом $\alpha \in A$, откуда следует, что $\bar{\bar{x}} \in P_A(\Delta^A)$. Следовательно, $P_A = P_A(\Delta^A)$. Отсюда, из лемм 2.2 и 2.3 и из (2.12) вытекает

Теорема 2.2. *Пусть $P_A \neq \emptyset$. Тогда следующие утверждения попарно эквивалентны:*

a) $P_A \subset Q^B$;

b) *существуют такие $\alpha \in A$, $\beta \in B$, $\gamma > 0$, что $F(\cdot, \alpha, \beta, \gamma) \in L$;*

c) *существуют такие $\alpha \in A$, $\beta \in B$, $\gamma > 0$ и $\bar{\bar{C}} \in L$, что почти при каждом t и всех $r \in \Delta^A(t)$*

$$Q(\beta, rt) \leqslant \gamma P(\alpha, rt) + \bar{\bar{C}}(t); \tag{2.13}$$

d) *существуют такие $\alpha \in A$, $\beta \in B$, что $L_P^\alpha(\Delta^A) \subset L_Q^\beta(\Delta^A)$.*

Рассмотрим отдельно случай, когда множество A одноэлементно, то есть $A = \{\alpha\}$. Тогда, как очевидно (см. (2.1)), $\mathscr{E}(t) = \{r \in \Delta(t) \colon Q(\beta, r, t) > \gamma P(\alpha, r, t)\}$, и неравенство (2.12) справедливо при всех $r \in \Delta(t)$. Предполагая, что $L_P^\alpha \neq \emptyset$, получаем из теорем 2.1 и 2.2 следующие предложения.

Следствие 2.1. *$L_P^\alpha \subset L_Q^\beta$ тогда и только тогда, когда существуют такие $\gamma > 0$ и $\bar{\bar{C}} \in L$, что п.в. на E имеет место (2.13) при любом $r \in \Delta(t)$.*

Следствие 2.2. *$L_P^\alpha \subset Q^\beta$ тогда и только тогда, когда $L_P^\alpha \subset L_Q^\beta$ при некотором $\beta \in B$.*

Следствие 2.3. *Если $\underline{\underline{V}}(\bar{\bar{x}}_0, \alpha, \varrho) \subset Q^B$ при некоторых $x_0 \in L_P^\alpha$ и $\varrho > 0$, то $L_P^\alpha \subset L_Q^\beta$ при некотором $\beta \in B$.*

Замечание 2.1. В рассматриваемом случае ($A = \{\alpha\}$) условие 3 (на функцию P) можно ослабить, заменив его следующим:

3′) Почти при каждом $t \in E$ функция $P(\alpha, \cdot, t)$ 0-полунепрерывна сверху на $\Delta_0(t)$.

Действительно, условие 3 мы использовали лишь для доказательства 0-открытости множества $\mathscr{E}_0(t)$ (см. Лемму 2.1). Теперь с тем же успехом эту роль сыграет условие 3′.

Отметим, что если $P(\alpha, \cdot, :)$ и $Q(\beta, \cdot, :)$ являются $\underline{\underline{C}}_w$-функциями [4] (см. также здесь § 3), то они удовлетворяют условиям 2, 3′ и 4. Поэтому следствие 2.1 является обобщением предложения 2.2 из [4]. В то же время следствие 2.2, пересекаясь с предложением 2.4 из [4], не является обобщением последнего, так как мы предполагаем неубы-

вание функции $Q(\beta, r, t)$ по β (и существенно это используем), а в [4] это требование отсутствует.

§ 3. Условия действия оператора суперпозиции.

Определение 3.1 [4]. Функция $\varphi\colon R^*\times E\to R^*$ называется *$\underline{\underline{C}}_w$-функцией*, если почти при каждом t функция $\varphi(\cdot, t)$ 0-непрерывна на R^*, и при каждом $r\in R^*$ функция $\varphi(r, \cdot)$ μ-измерима на E.

Как отмечено в [4], если φ — $\underline{\underline{C}}_w$-функция и $x\in S^*$, то $\varphi(x(\cdot), \cdot)\in S^*$.

Определение 3.2 [9], [10]. Функция $\varphi\colon R^*\times E\to[0, \infty]$ называется *предгенфункцией*, если выполнены условия: 1) она является $\underline{\underline{C}}_w$-функцией; 2) почти при каждом t функция $\varphi(\cdot, t)$ четна на R^* и не убывает на $[0, \infty]$; 3) $\varphi(0, \cdot)\in L$ (следовательно, $\varphi(0, t)<\infty$ п.в.).

Пусть $\underline{\underline{S}}$ — множество всех п.в. конечных функций из S^*, причем всякие две функции из S, совпадающие п.в., считаются равными. Для предгенфункции φ положим $I_\varphi(x)=\int\varphi(x(t), t)\,d\mu$, $L^\varphi=\{x\in S\colon I_\varphi(x)<\infty\}$, $L^a_\varphi=\{x\in S\colon ax\in L^\varphi\}$, $L^{*\varphi}=\bigcup\limits_{0<a<\infty}L^a_\varphi$, $L^I_\varphi=\bigcap\limits_{0<a<\infty}L^a_\varphi$. Легко показать, что множество L^φ (класс Орлича) выпукло и симметрично относительно нулевой точки θ пространства S, а $L^{*\varphi}$ (модулярное функциональное пространство) и L^I_φ являются векторными подпространствами пространства S.

Положим $d_\varphi(t)=\sup\{r\geqslant 0\colon \varphi(r, t)<\infty\}$, $t\in E$. Нетрудно показать, что $d_\varphi\in S^*$, причем $L^{*\varphi}=\{\theta\}$ тогда и только тогда, когда $d_\varphi=\theta$; а $L^I_\varphi=\{\theta\}$ тогда и только тогда, когда $d_\varphi\in S$.

Пусть функция $h\colon \Delta\to R$ (где множество Δ определено в § 2, причем $\Delta(t)\subset R$ почти при каждом t) удовлетворяет условиям:

1) почти при каждом t функция $|h(\cdot, t)|$ 0-полунепрерывна снизу на $\Delta_0(t)$;

2) если $x\in S(\Delta)$, то $h(x(\cdot), \cdot)\in S$.

Пусть $\boldsymbol{h}\colon S(\Delta)\to S$ — оператор суперпозиции, порожденный функцией h, то есть $\boldsymbol{h}x=h(x(\cdot), \cdot)$. Пусть, далее, φ и ψ-предгенфункции, A и B-непустые множества положительных чисел. Положим $P(a, r, t)=\varphi(ar, t)$, $Q(\beta, r, t)=\psi[\beta h(r, t), t]$. Легко проверить, что функции P и Q удовлетворяют условиям 1–4 из § 2. Поэтому все предложения из § 2 можно перенести на рассматриваемый случай. Таким образом получаются различные факты о действии оператора $\boldsymbol{h}$ из классов, порождаемых функцией φ, в классы, порождаемые функцией ψ (см. [4], 2.6). Приведем несколько таких утверждений.

3.1. Если $L^a_\varphi(\Delta)\neq\emptyset$, то $\boldsymbol{h}[L^a_\varphi(\Delta)]\subset L^{*\psi}$ тогда и только тогда, когда существуют такие $\beta>0$, $\gamma>0$ и $\bar{\bar{c}}\in L$, что почти при каждом $t\in E$ и всех $r\in\Delta(t)$

$$\psi[\beta h(r, t), t]\leqslant\gamma\varphi(ar, t)+\bar{\bar{c}}(t). \tag{3.1}$$

Это утверждение вытекает из следствий 2.1 и 2.2.

3.2. Найдем с помощью теоремы 2.2 критерий действия оператора $\boldsymbol{h}$ из $L^I_\varphi(\Delta)$ в $L^{*\psi}$ (предполагая, что $L^I_\varphi(\Delta)\neq\emptyset$). В данном случае $A=B=(0, \infty)$. Положим

$$E'=\{t\colon d_\varphi(t)=\infty\},\qquad E''=E\setminus E',$$

и заметим, что $\Delta^A(t)=\Delta(t)$ п.в. на E', и $\Delta^A(t)=\{0\}$ п.в. на E''. Следовательно, п.в. на E'' неравенство (2.13) принимает такой вид:

$$\psi[\beta h(0, t), t]\leqslant\gamma\varphi(0, t)+\bar{\bar{c}}(t).$$

В результате получаем следующий критерий: $\boldsymbol{h}[L^I_\varphi(\Delta)]\subset L^{*\psi}$ тогда и только тогда, когда функция $\psi[\beta h(0, \cdot), \cdot]$ суммируема на E'', и существуют такие положительные α, β, γ и суммируемая на E' функция $\bar{\bar{c}}$, что почти при каждом $t\in E'$ и всех $r\in\Delta(t)$ выполняется (3.1).

3.3. Если $\mu E''=0$ и $\boldsymbol{h}[L^I_\varphi(\Delta)\cap\underline{\underline{V}}(\bar{\bar{x}}_0, a_0, \varrho)]\subset L^{*\psi}$, где $x_0\in L^I_\varphi(\Delta)$, $a_0>0$, $\varrho>0$, то $\boldsymbol{h}[L^a_\varphi(\Delta)]\subset L^\beta_\psi(\Delta)$ при некоторых a и β.

Это утверждение вытекает из теоремы 2.1.

Приведем еще несколько результатов, связанных с вложением, предполагая, что $\Delta(t)=R$ при всех t.

3.4. Ясно, что $L^{*\varphi}\subset L^{*\psi}$ тогда и только тогда, когда $L^\varphi\subset L^{*\psi}$. Отсюда и из следствий 2.1 и 2.2 вытекает, что $L^{*\varphi}\subset L^{*\psi}$ тогда и только тогда, когда для некоторых $\beta>0$, $\gamma>0$ и $\bar{\bar{c}}\in L$

$$\psi(\beta r, t)\leqslant\gamma\varphi(r, t)+\bar{\bar{c}}(t)$$

при всех $t\in E$ и $r\in R$.

Отметим, что этот критерий содержится в [6] (в предположении, что $\varphi(0, t)=0$ п.в.) и в [4] (предложения 2.4 и 2.2).

3.5. Очевидно, класс Орлича L^φ линеен тогда и только тогда, когда $L^{*\varphi}=L^\varphi$. Это равносильно тому, что $L^1_\varphi(=L^\varphi)\subset L^2_\varphi$. Отсюда, применяя следствие 2.1, получаем необходимое и достаточное условие линейности класса L^φ: существуют такие $\gamma>0$ и $\bar{\bar{c}}\in L$, что при всех $t\in E$ и $r\in R$

$$\varphi(2r, t)\leqslant\gamma\varphi(r, t)+c(t).$$

Это условие (которое установлено в [6]), является обобщением хорошо известного Δ_2-условия.

3.6. Пусть $\mu E''=0$ и $L^I_\varphi\cap\{x\colon \int\limits_{\{t\colon x(t)\neq 0\}}\varphi(a_0x(t), t)\,d\mu\leqslant\varrho\}\subset L^{*\psi}$ при некоторых положительных a_0 и ϱ. Тогда $L^{*\varphi}\subset L^{*\psi}$.

В самом деле, согласно теореме 2.1 (роль x_0 здесь играет θ) существуют такие a и β, что $L^a_\varphi\subset L^\beta_\psi$ (в данном случае $\Delta^A(t)=R$), откуда следует, что $L^{*\varphi}\subset L^{*\psi}$.

Заметим, кстати, что в аналогичном предложении из [9] (критерий 4, стр. 64) имеется неточность, которая устраняется, если предположить, что (в обозначениях [9]) $M(0, x) = 0$ п.в.

Определение 3.3 [9], [10]. Функция $\varphi\colon R^* \times E \to [0, \infty]$ называется *генфункцией*, если выполнены условия: 1) она является $\underline{C}_w$-функцией; 2) почти при каждом t функция $\varphi(\cdot, t)$ четна на R^* и не убывает на $[0, \infty]$; 3) п.в. $\varphi(0, t) = 0$, а $\varphi(\infty, t) > 0$; 4) $\lim\limits_{r\to 0}\varphi(r, t) = 0$ п.в. на $\{t\colon d_\varphi(t) > 0\}$.

Если φ — генфункция, то в пространство $L^{*\varphi}$ может быть введена F-норма [7], [8], [5]

$$\|x\|_\varphi = \inf\{\varepsilon > 0\colon I_\varphi(\varepsilon^{-1}x) \leqslant \varepsilon\}.$$

Положим $B_\varrho = \{x \in L^{*\varphi}\colon \|x\|_\varphi \leqslant \varrho\}$. Как легко убедиться, $B_\varrho = \{x \in L^{*\varphi}\colon I_\varphi(\varrho^{-1}x) \leqslant \varrho\}$, то есть $B_\varrho = \underline{\underline{V}}(\theta, \varrho^{-1}, \varrho) \cap S$.

Пусть φ — генфункция, а ψ — предгенфункция. Тогда имеют место следующие факты (предполагается, что $\Delta = R \times E$).

3.7. Если $\boldsymbol{h}(B_\varrho) \subset L^{*\psi}$ при каком-либо $\varrho > 0$, то $\boldsymbol{h}(L_\varphi^{1/\varrho}) \subset L_\psi^\beta$ при некотором β.

Это вытекает из следствия 2.3, если взять $x_0 = \theta$.

3.8. Если $\mu E'' = 0$ и $\boldsymbol{h}(L_\varphi^f \cap B_\varrho) \subset L^{*\psi}$ при каком-либо $\varrho > 0$, то $\boldsymbol{h}(L_\varphi^\alpha) \subset L_\psi^\beta$ при некоторых α и β.

Этот результат есть частный случай предложения 3.3.

3.9. Если $\mu E'' = 0$ и $L_\varphi^f \cap B_\varrho \subset L^{*\psi}$ при каком-либо $\varrho > 0$, то $L^{*\varphi} \subset L^{*\psi}$ (см. 3.6).

§ 4. Об ограниченности оператора $\boldsymbol{h}$. Пусть φ и ψ — генфункции.

Лемма 4.1. *Если $x_0 \in L_\varphi^f$, $\alpha > 0$ и $0 < \varrho < 1/\alpha$, то*

$$\sup\{I_\varphi(\alpha x)\colon \|x - x_0\|_\varphi \leqslant \varrho\} < \infty.$$

Доказательство. Если $\|x - x_0\|_\varphi \leqslant \varrho$, то

$$\begin{aligned} I_\varphi(\alpha x) &\leqslant I_\varphi\big(\alpha\varrho\cdot\varrho^{-1}|x - x_0| + (1-\alpha\varrho)\alpha(1-\alpha\varrho)^{-1}|x_0|\big) \\ &\leqslant I_\varphi(\varrho^{-1}|x - x_0|) + I_\varphi\big(\alpha(1-\alpha\varrho)^{-1}x_0\big) \\ &\leqslant \varrho + I_\varphi\big(\alpha(1-\alpha\varrho)^{-1}x_0\big) < \infty. \end{aligned}$$

Рассмотрим оператор суперпозиции $\boldsymbol{h}$, определенный в § 3, предполагая, что $\Delta = R \times E$.

Теорема 4.1. *Если $\boldsymbol{h}(L_\varphi^\alpha) \subset L^{*\psi}$, то $\sup\{\|\boldsymbol{h}x\|_\psi\colon \|x\|_\varphi \leqslant 1/\alpha\} < \infty$ и $\sup\{\|\boldsymbol{h}x\|_\psi\colon \|x - x_0\|_\varphi \leqslant \varrho\} < \infty$, где $x_0 \in L_\varphi^f$ и $0 < \varrho < 1/\alpha$.*

Доказательство. Так как $\boldsymbol{h}(L_\varphi^\alpha) \subset L^{*\psi}$, то существуют такие $\beta, \gamma > 0$ и $\bar{\bar{c}} \in L$, что почти при каждом $t \in E$ и всех $r \in R$ имеет место (3.1). Тогда для любой функции $x \in S$

$$I_\psi(\beta\boldsymbol{h}x) \leqslant \gamma I_\varphi(\alpha x) + \int \bar{\bar{c}}(t)\,d\mu.$$

Отсюда и из леммы 4.1 следует, что $\underline{\underline{K}} = \sup\{I_\psi(\beta\boldsymbol{h}x)\colon \|x - x_0\|_\varphi \leqslant \varrho\} < \infty$. Тогда $\sup\{\|\boldsymbol{h}x\|_\psi\colon \|x - x_0\|_\varphi \leqslant \varrho\} \leqslant \max(\beta^{-1}, \underline{\underline{K}}) < \infty$. Кроме того, если $\|x\|_\varphi \leqslant 1/\alpha$, то $I_\varphi(\alpha x) \leqslant 1/\alpha$, так что и $\sup\{\|\boldsymbol{h}x\|_\psi\colon \|x\|_\varphi \leqslant 1/\alpha\} < \infty$.

Следствие 4.1. *Если $\boldsymbol{h}(L^{*\varphi}) \subset L^{*\psi}$, то при любом $\varrho > 0$ $\sup\{\|\boldsymbol{h}x\|_\psi\colon \|x\|_\varphi \leqslant \varrho\} < \infty$, то есть оператор $\boldsymbol{h}$ ограничен.*

Теорема 4.2. *Пусть $d_\varphi(t) = \infty$ п.в. Тогда для любого $\varrho > 0$*

$$\sup\{\|\boldsymbol{h}x\|_\psi\colon x \in B_\varrho \cap L_\varphi^f\} = \sup\{\|\boldsymbol{h}x\|_\psi\colon x \in B_\varrho\}.$$

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда $\underline{\underline{C}}_\varrho = \sup\{\|\boldsymbol{h}x\|_\psi\colon x \in B_\varrho \cap L_\varphi^f\} < \infty$. Возьмем произвольное $\lambda > \underline{\underline{C}}_\varrho$. В силу теоремы 4 из [10], существуют такие множества $E_n \in \mathfrak{A}$, $n = 1, 2, \ldots$, что $E_n \nearrow E$ и характеристические функции множеств E_n принадлежат L_φ^f. Пусть $x \in B_\varrho$. Положим при $n = 1, 2, \ldots$

$$x_n(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } t \in E_n \text{ и } |x(t)| \leqslant n, \\ 0, & \text{при остальных значениях } t \text{ из } E. \end{cases}$$

Тогда $x_n \in L_\varphi^f$ и $\|x_n\|_\varphi \leqslant \|x\|_\varphi \leqslant \varrho$, то есть $x_n \in B_\varrho \cap L_\varphi^f$, $n = 1, 2, \ldots$ Это значит, что $\|\boldsymbol{h}x_n\|_\psi < \lambda$, откуда $\int \psi\big[\lambda^{-1}h\big(x_n(t), t\big), t\big]\,d\mu \leqslant \lambda$, $n = 1, 2, \ldots$ Далее, п.в. $\psi\big[\lambda^{-1}h\big(x_n(t), t\big), t\big] \to \psi\big[\lambda^{-1}h\big(x, (t), t\big), t\big]$ при $n \to \infty$. Применяя лемму Фату, получаем, что $\int \psi\big[\lambda^{-1}h\big(x(t), t\big), t\big]\,d\mu \leqslant \lambda$, откуда $\|\boldsymbol{h}x\|_\psi \leqslant \lambda$ и, следовательно, $\sup\{\|\boldsymbol{h}x\|_\psi\colon x \in B_\varrho\} = \underline{\underline{C}}_\varrho$.

Следствие 4.2. *Если $d_\varphi(t) = \infty$ п.в. и $\sup\{\|\boldsymbol{h}x\|_\psi\colon x \in B_\varrho \cap L_\varphi^f\} < \infty$ для любого $\varrho > 0$, то $\boldsymbol{h}(L^{*\varphi}) \subset L^{*\psi}$.*

Таким образом, если $d_\varphi(t) = \infty$ п.в. и оператор $\boldsymbol{h}$ действует из L_φ^f в $L^{*\psi}$, но не действует из $L^{*\varphi}$ в $L^{*\psi}$, то он не ограничен. Этот результат интересно сопоставить со следствием 4.1.

Из теоремы 4.2 и 3.7 вытекает

Следствие 4.3. *Если $d_\varphi(t) = \infty$ п.в. и $\sup\{\|\boldsymbol{h}x\|_\psi\colon x \in B_\varrho \cap L_\varphi^f\} < \infty$, то $\boldsymbol{h}(L_\varphi^{1/\varrho}) \subset L_\psi^\beta$ при некотором $\beta > 0$.*

Этот результат интересно сравнить с 3.8. Заметим еще, что при доказательстве леммы 4.1, теоремы 4.2 и следствия 4.2 неатомичность меры не использовалась.

§ 5. Условия открытости и замкнутости класса Орлича. Выясним условия, при которых класс L^φ, порожденный генфункцией φ, явля-

ется открытым или замкнутым множеством в пространстве $L^{*\varphi}$, снабженном F-нормой $\|\cdot\|_\varphi$.

Так как $\{x \in L^{*\varphi}\colon \|x\|_\varphi \leqslant 1\} \subset L^\varphi$, то θ является внутренней точкой в L^φ. Отсюда следует, что если $x \in \overline{L^\varphi}$ (замыкание L^φ), то $\alpha x \in \operatorname{int} L^\varphi$ (внутренность L^φ) при любом $\alpha \in (0, 1)$ ([1], гл. 2, § I, Предложение 15). Используя этот факт, получаем, что $\operatorname{int} L^\varphi = \bigcup_{1<\alpha<\infty} L^\alpha_\varphi$, $\overline{L^\varphi} = \bigcap_{0<\alpha<1} L^\alpha_\varphi$. Следовательно, класс L^φ открыт тогда и только тогда, когда $L^\varphi \subset \bigcup_{1<\alpha<\infty} L^\alpha_\varphi$, то есть, в силу следствия 2.2, когда $L^\varphi \subset L^\alpha_\varphi$ при некотором $\alpha > 1$, а это равносильно совпадению $L^{*\varphi}$ с L^φ. Таким образом, имеет место

Теорема 5.1. *Класс L^φ открыт тогда и только тогда, когда $L^{*\varphi} = L^\varphi$.*

Так как $\overline{L^\varphi} = \bigcap_{0<\alpha<1} L^\alpha_\varphi$, то замкнутость L^φ эквивалентна вложению $\bigcap_{0<\alpha<1} L^\alpha_\varphi \subset L^\varphi$.

Теорема 5.2. *Следующие утверждения попарно эквивалентны:*

(1) *Класс L^φ замкнут.*

(2) *Существуют такие $\alpha \in (0, 1)$, $\gamma > 0$ и $\bar{\bar{c}} \in L$, что почти при каждом t*

$$\varphi(r, t) \leqslant \gamma\varphi(\alpha r, t) + \bar{\bar{c}}(t)$$

для всех $r \in [-d_\varphi(t), d_\varphi(t)]$.

(3) $L^\varphi = \{x \in L^{*\varphi}\colon |x(t)| \leqslant d_\varphi(t)$ *п.в.*$\}$.

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2): Так как $\bigcap_{0<\alpha<1} L^\alpha_\varphi \subset L^\varphi$, то (2) имеет место согласно теореме 2.2 ($A = (0, 1)$, $B = \{1\}$, $\Delta(t) = R$, $P(\alpha, r, t) = \varphi(\alpha r, t)$, $Q(\beta, r, t) = \varphi(\beta r, t)$, $\Delta^A(t) = R$, если $d_\varphi(t) = \infty$, и $\Delta^A(t) = [-d_\varphi(t), d_\varphi(t)]$, если $d_\varphi(t) < \infty$).

(2) $\Rightarrow$ (3): Пусть $x \in L^{*\varphi}$, причем $|x(t)| \leqslant d_\varphi(t)$ п.в. Так как $x \in L^{*\varphi}$, то $I_\varphi(\alpha_0 x) < \infty$ при некотором $\alpha_0 > 0$. Найдем такое натуральное n, что $\alpha^n \leqslant \alpha_0$. Тогда п.в.

$$\varphi\big(x(t), t\big) \leqslant \gamma^n \varphi\big(\alpha^n x(t), t\big) + \bar{\bar{c}}(t) \sum_{k=0}^{n-1} \gamma^k,$$

откуда вытекает, что $I_\varphi(x) < \infty$, то есть $x \in L^\varphi$. Таким образом, $\{x \in L^{*\varphi}\colon |x(t)| \leqslant d_\varphi(t)$ п.в.$\} \subset L^\varphi$. Так как обратное вложение всегда имеет место, то (3) доказано.

(3) $\Rightarrow$ (1): Пусть $x \in \bigcap_{0<\alpha<1} L^\alpha_\varphi$. Тогда при любом $\alpha \in (0, 1)$ п.в. $\alpha|x(t)| \leqslant d_\varphi(t)$, откуда $|x(t)| \leqslant d_\varphi(t)$ п.в. В силу (3), $x \in L^\varphi$. Таким образом, $\bigcap_{0<\alpha<1} L^\alpha_\varphi \subset L^\varphi$, то есть класс L^φ замкнут.

Следствие 5.1. *Если $\mu\{t\colon 0 < d_\varphi(t) < \infty\} = 0$, то класс L^φ замкнут тогда и только тогда, когда $L^{*\varphi} = L^\varphi$.*

Следствие 5.2. *Если класс L^φ замкнут, то $\varphi\big(d_\varphi(t), t\big) < \infty$ п.в. на $\{t\colon d_\varphi(t) < \infty\}$.*

Цитированная литература

[1] Н. Бурбаки, *Топологические векторные пространства*, Москва 1959.

[2] М. М. Вайнберг и И. В. Шрагин, *Оператор Немыцкого и его потенциал в пространствах Орлича*, Докл. Акад. наук СССР, 120 (1958), ст. 941–944.

[3] — — *Оператор Немыцкого в обобщенных пространствах Орлича*, Ученые записки Моск. обл. пед. инст. 77 (1959), ст. 145–159.

[4] L. Drewnowski and W. Orlicz, *A note on modular spaces* XI, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys., 16 (1968), ст. 877–882.

[5] T. Itô, *A generalization of Mazur — Orlicz theorem on function spaces*, J. Fac. sci. Hokkaido Univ., Ser. I. Math. 15 (1961), ст. 221–232.

[6] S. Koshi and T. Shimogaki, *On quasi-modular spaces*, Studia Math. 21 (1961), ст. 15–35.

[7] S. Mazur and W. Orlicz, *On some classes of linear spaces*, Studia Math. 17 (1958), ст. 97–119.

[8] J. Musielak and W. Orlicz, *On modular spaces*, Studia Math. 18 (1959), ст. 49–65.

[9] И. В. Шрагин, *Оператор Немыцкого в пространствах, порожденных генфункциями*, Докл. Акад. наук СССР, 189 (1969), ст. 63–66.

[10] — *Пространства, порожденные генфункциями*, ibidem, 193 (1970), ст. 53–56.

[11] — *Оператор суперпозиции в координатных пространствах типа Орлича*, Труды Тамбовского института химического машиностроения, 6 (1971), ст. 80–88.

ТАМБОВСКИЙ ИНСТИТУТ
ХИМИЧЕСКОГО МАШИНОСТРОЕНИЯ

Received June 15, 1971 (355)