13. Proof of Theorem 1. Formulae (10) and (51) which define $S_n^{[0]}$ and $S_n^{[5]}$ respectively allow us to state that (using the detailed notation)

$$G_n^{(m)[5]} = 2^{\mu+1} G_n^{(m)[0]} \quad \text{for } n \geqslant 2$$

and therefore

$$A_n^{(m)[0]} = 2^{\mu+1} A_n^{(m)[5]} \quad \text{for } n \geqslant 2.$$

Now, $2^\mu < n \leqslant 2^{\mu+1}$ for $n \geqslant 2$, hence

$$|A_{n;i,j}^{(m)[0]}| \equiv |A_{n;i,j}^{(m)}| \leqslant 2n |A_{n;i,j}^{(m)[5]}| \quad \text{for } i, j \in J_n^m,\ n \in \mathcal{N}.$$

According to Theorem 4, for each m, $m \geqslant 0$, there exist constants C_m and q_m, $0 < q_m < 1$ such that

$$|A_{n;i,j}^{(m)[0]}| \leqslant n C_m q_m^{|i-j|} \quad \text{for } i, j \in J_n^m,\ n \in \mathcal{N}.$$

Thus Theorem 1 is proved.

The author would like to express his gratitude to Professor Zbigniew Ciesielski for a suggestion of the problem and his help in the preparation of this work.

References

[1] Z. Ciesielski, A note in the Proceedings of the Conference on Constructive Function Theory, Varna, May 1970.

[2] — *Properties of the orthonormal Franklin system*, II, Studia Math. 27 (1966), pp. 289–323.

[3] — and J. Domsta, *Construction of an orthonormal basis in $C^m(I^d)$ and $W_p^m(I^d)$*, this volume, pp. 211–224.

[4] H. B. Curry and I. J. Schoenberg, *On Polýa frequency functions IV: The fundamental spline functions and their limits*, J. d'Analyse Math. 17 (1966), pp. 71–107.

[5] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear operators*, 2-nd part, Moskva 1966 (in Russian).

[6] А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, Москва–Ленинград 1952.

[7] I. J. Schoenberg, *Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions*, Quart. Appl. Math. 4 (1946), pp. 45–99, 112–141.

[8] I. J. Schoenberg, *Cardinal Interpolation and Spline Functions*, J. Approximation Theory 2 (1969), pp. 167–206.

[9] I. J. Schoenberg, *On Spline Functions*, with a supplement by T. N. E. Greville, Proc. of the Symp. "Inequalities", held August 1965 at the Wright Patterson Air Force Base, Ohio.

Received December 19, 1970 (278)

STUDIA MATHEMATICA T. XLI. (1972)

Applications des ultraproduits à l'étude des espaces et des algèbres de Banach

par

D. DACUNHA-CASTELLE et J. L. KRIVINE (Paris)

Sommaire. Un certain nombre de notions précisant les rapports entre les problèmes de caractérisation des classes d'espaces de Banach, et les problèmes de la théorie de la dimension linéaire. Nous posons le problème de caractérisation: une classe C d'espaces de Banach est-elle caractérisée par un ensemble de conditions du type

$$\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n \Big(\big(\|\sum_{i=1}^{n} a_i^j x_i\|\big)_{i=1,\ldots,m} \in F\Big)$$

ou F est un fermé (cône) de (R_+^n) et (a) des matrices réelles données?

La notion d'ultraproduit donne un critère d'étude de telles caractérisations à titre d'exemple nous donnons la caractérisation des espaces isomorphes à des sous-L^p. La méthode permet de bien situer le problème de la dimension linéaire en fonction des propriétés des sous-espaces de dimension finie. Nous l'appliquons à certains espaces d'Orlicz et aux sous algèbres de Banach des algèbres l^p.

Dans cet article, nous donnons des applications de la notion d'ultraproduit dans les espaces de Banach. Les classes d'espaces de Banach stables par ultraproduit, isomorphismes (ou isométries) et sous-espaces se caractérisent par des conditions d'un type simple portant sur la norme. Nous étendons par exemple à une classe $\mathscr{C}$ d'espaces d'Orlicz la propriété: Si B est un espace de Banach, pour qu'il soit isomorphe (avec des bornes données) à un espace C de la classe $\mathscr{C}$, il faut et il suffit que tout sous-espace de dimension finie de B ait cette même propriété. Ce type de conditions, a été trouvé sous des formes particulièrement simples par Grothendieck pour les espaces isomorphes à des espaces de Hilbert [1] et dans [2] et [3] pour les espaces isométriques à des sous-espaces d'espaces L^p.

Le problème est évidemment lié au problème de la dimension linéaire.

Le plan est le suivant:

§ 1. Notion d'ultraproduit dans les espaces de Banach.
§ 2. Compléments sur les Banach réticulés.
§ 3. Rappels et compléments sur les espaces d'Orlicz.
§ 4. Ultraproduits d'Orlicz.
§ 5. Problème de plongements et de finitude.

§ 6. Caractérisation par des conditions portant sur la norme de classes d'espaces stables par ultraproduit.

§ 7. Caractérisation des espaces isomorphes à des sous-L^p.

§ 8. Etude des algèbres de Banach l_F. Caractérisation des sous-algèbres.

Le paragraphe 6 est indépendant des autres paragraphes à l'exception du paragraphe 1.

§ 1. Définition de l'ultraproduit d'espaces normés et d'espaces de Banach réticulés. Soit $(B_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces normés indexés par I. Soit $\mathcal{D}$ un ultrafiltre sur I.

On considère l'espace vectoriel semi normé suivant

$$\Pi_0 = \{(f_i)_{i\in I}; f_i \in B_i, \text{ il existe } M \in \boldsymbol{R}^+ \text{ tel que } \|f_i\| < M \text{ pour tout } i\}$$

avec $\|(f_i)_{i\in I}\| = \lim\limits_{\mathcal{D}} \|f_i\|_i$.

L'ensemble $\mathcal{N}$ des éléments de semi norme 0 forme un sous-espace vectoriel de Π_0.

Définition. (1) *On appelle ultraproduit des espaces normés* $(B_i)_{i\in I}$ *et l'on note* $\prod\limits_{i\in I} B_i/\mathcal{D}$ *le quotient* $\Pi_0/\mathcal{N}$.

(2) *Cas particulier: si les* $(B_i)_{i\in I}$ *sont de plus des espaces de Banach, l'espace de Banach ultraproduit des* B_i *est le complété de* $\prod\limits_{i\in I} B_i/\mathcal{D}$, *on le notera* $\overline{\prod\limits_{i\in I} B_i/\mathcal{D}}$.

Si chacun des espaces B_i est réticulé, alors Π_0 est réticulé pour l'ordre suivant:

$$(f_i)_{i\in I} \geqslant (g_i)_{i\in I} \quad \text{si pour tout } i, \quad f_i \geqslant g_i$$

et $(f_i)_{i\in I} \cup (g_i)_{i\in I} = (f_i \cup g_i)_{i\in I}$. De plus si $(f_i)_{i\in I}, (g_i)_{i\in I}, (h_i)_{i\in I} \in \Pi_0/\mathcal{N}$, on a

$$\|f_i \cup h_i - g_i \cup h_i\| \leqslant \|f_i - g_i\| \quad \text{pour tout } i$$

donc

$$\|(f_i)_{i\in I} \cup (h_i)_{i\in I} - (g_i)_{i\in I} \cup (h_i)_{i\in I}\| \leqslant \|(f_i)_{i\in I} - (g_i)_{i\in I}\|,$$

donc si $(f_i)_{i\in I} \sim (g_i)_{i\in I}$ modulo $\mathcal{N}$, on a

$$(f_i)_{i\in I} \cup (h_i)_{i\in I} \sim (g_i)_{i\in I} \cup (h_i)_{i\in I} \text{ modulo } \mathcal{N}.$$

Donc $\prod\limits_{i\in I} B_i/\mathcal{D}$ est réticulé.

Comme

$$\|(f_i)_{i\in I} \cup (g_i)_{i\in I} - (f'_i)_{i\in I} \cup (g'_i)_{i\in I}\| \leqslant \|(f_i)_{i\in I} - (f'_i)_{i\in I}\| + \|(g_i)_{i\in I} - (g'_i)_{i\in I}\|$$

inégalité obtenue en passant à la limite suivant $\mathcal{D}$ à partir des inégalités:

$$\|f_i \cup g_i - f'_i \cup g'_i\| \leqslant \|f_i - f'_i\| + \|g_i - g'_i\|$$

on voit que l'opération $\cup$ de $\prod\limits_{i\in I} B_i/\mathcal{D} \times \prod\limits_{i\in I} B_i/\mathcal{D} \to \prod\limits_{i\in I} B_i/\mathcal{D}$ est continue, et donc que *le complété* $\overline{\prod\limits_{i\in I} B_i/\mathcal{D}}$ *est un espace de Banach réticulé.*

Si B est un espace normé, on peut noter $(B_F)_{F\in\mathfrak{F}}$ la famille de ses sous-espaces de dimension fini. Remarquons que si $X(F) = \{G \in \mathfrak{F}, G \supset F\}$, $X(F)$ est non vide $(F \in X(F))$ et que de plus $X(F_1) \cap \ldots \cap X(F_n) = X(F_1 + \ldots + F_n)$. Il existe donc un ultrafiltre $\mathcal{D}$ sur $\mathfrak{F}$ tel que $X(F) \in \mathcal{D}$ pour tout F. Soit $(f_F)_{F\in\mathfrak{F}}$ un élément de $\prod\limits_{F\in\mathfrak{F}} B_F/\mathcal{D}$. *Il existe alors une injection naturelle, linéaire et isométrique, de B dans* $\prod\limits_{F\in\mathfrak{F}} B_F/\mathcal{D}$. En effet on définit cette injection i par

$$i(f) = (f_F)_{F\in\mathfrak{F}} \text{ où } \quad f_F = f \text{ si } f \in F, \ f_F = 0 \text{ si } f \notin F.$$

i est évidemment linéaire puisque $\{F \in \mathfrak{F}, f, g \in F\} \in \mathcal{D}$ donc $i(f+g) = i(f) + i(g)$ (modulo $\mathcal{N}$), et de même $i(\lambda f) = \lambda i(f)$ (modulo $\mathcal{N}$).

$\|i(f)\| = \lim\limits_{\mathcal{D}} \|f_F\|$ et comme $\{F \in \mathfrak{F}, f \in F\} \in \mathcal{D}$ cette limite vaut $\|f\|$.

§ 2. Compléments sur la structure des espaces normés réticulés. Soit $\mathfrak{R}$ un espace vectoriel normé réticulé sur $\boldsymbol{R}$ vérifiant

(1) $0 \leqslant x \leqslant y \Rightarrow \|x\| \leqslant \|y\|$ et si de plus $x \neq y$ alors $\|x\| < \|y\|$.

(2) $\||x|\| = \|x\|$.

(3) Toute suite décroissante d'éléments $\geqslant 0$ converge.

Proposition 2.1. *Soit $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{R}$ une algèbre de Boole telle que*

1. *Pour tout $f \geqslant 0, f \in \mathfrak{R}$, il existe $e \in \mathfrak{B}$ avec $f \cap e \neq 0$.*
2. *Si $e \in \mathfrak{B}$ et $u \in \mathfrak{R}$, si $u \cap (e-u) = 0$ alors $u \in \mathfrak{B}$.*

Sous ces conditions, le sous-espace vectoriel $\mathfrak{R}_0$ engendré par $\mathfrak{B}$ est partout dense dans $\mathfrak{R}$.

Démonstration. Soit $f \in \mathfrak{R}, f \geqslant 0, f \neq 0$.

Lemme. *Il existe $v \in \mathfrak{B}$ et $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tel que $n_0 f \geqslant v$.*

En effet, il existe $e \in \mathfrak{B}$ tel que $g = f \cap e \neq 0$. Pour n_0 assez grand, $n_0 g \nleqslant e$ (car si pour tout n, $0 \leqslant g \leqslant \dfrac{e}{n}$, on aurait $\|g\| \leqslant \left\|\dfrac{e}{n}\right\|$ donc $\|g\| = 0$, donc $g = 0$). Posons alors $z = (n_0 g - e) \cup 0$, $v = \lim e \cap nz$ ($z \geqslant 0$ et $e \cap nz$ est une suite croissante majorée par e, donc $e - e \cap nz$ est décroissante positive donc convergente, et par suite $e \cap nz$ converge). z et v étant définis, on remarque que si $z \cap e = 0$, comme $g \leqslant e$ on a $n_0 g - e \leqslant (n_0 - 1)e$ alors $e = 0$ et donc $g = 0$. Donc $z \cap e > 0$, soit $v > 0$ (car $v \geqslant z \cap e$). Posons $w_k = (e-v) \cap kz$. On a $0 \leqslant w_k \leqslant kz$ et $0 \leqslant w_k \leqslant e - v \leqslant e - e \cap nz$. On vérifie par induction sur n, que $nw_k \leqslant e$.

En effet on a, si $nw_k \leqslant e$, $w_k \leqslant e - e \cap pz$ pour tout p, soit $w_k + e \cap pz \leqslant e$ soit $w_k + nw_k \cap nkz \leqslant e$, $w_k + n(w_k \cap kz) \leqslant e$, or $w_k \leqslant kz$ donc $(n+1) w_k \leqslant e$.

Donc $0 \leqslant nw_k \leqslant e$ pour tout n et donc, en passant par les normes, $w_k = 0$, donc $(e-v) \cap kz = 0$ où $(e-v) \cap e \cap kz = 0$. Lorsque $k \to \infty$,

$e \cap kz \to v$, donc $(e-v) \cap v = 0$ (car l'application $(x, y) \to x \cap y$, et continue). Donc $v \in \mathfrak{B}$ (hypothèse 2).

Soit alors $w = e \cap n(n_0 g - e)$, $w \leqslant e$, $w + ne \leqslant nn_0 g$ et donc $(n+1)w \leqslant nn_0 g$ ou $n_0 g \geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right) w$ et comme $g \geqslant 0$, $n_0 g \geqslant \left(1+\frac{1}{n}\right)(w \cup 0)$. Soit

$$n_0 g \geqslant w \cup 0 = e \cap n(n_0 g - e) \cup 0 = e \cap \big(n(n_0 g - e) \cup 0\big) = e \cap nz.$$

Faisons tendre n vers l'infini, il vient: $n_0 g \geqslant v$, donc $g \geqslant v/n_0$ et comme $f \geqslant g$, $f \geqslant v/n_0$ d'où le lemme. Supposons $\mathfrak{R}_0$ non dense dans $\mathfrak{R}$. Soit $f \in \mathfrak{R}$ et $f \notin \overline{\mathfrak{R}}_0$ avec $f \geqslant 0$. Soit $m = \sup\{\|\eta\|, (\eta \in \mathfrak{R}_0, 0 \leqslant \eta \leqslant f)\}$, et soit $\eta_n \geqslant 0$, $\eta_n \leqslant f$, avec $\|\eta_n\| \uparrow m$.

En remplaçant η_n par $\bigcup_{k \leqslant n} \eta_k$ on peut supposer η_n croissante. Comme $\eta_n \leqslant f$, η_n croît vers η, ou $\eta \in \overline{\mathfrak{R}}_0$, $0 \leqslant \eta \leqslant f$. $\eta \neq f$ puisque $f \notin \overline{\mathfrak{R}}_0$, donc $f - \eta > 0$ donc il existe $v \in \mathfrak{B}$ tel que $f - \eta \geqslant v/n$ pour un certain $n \in N$. Soit $f \geqslant \eta + v/n > 0$, mais $\|\eta + v/n\| > m$ ce qui est impossible car $\eta + v/n \in \overline{\mathfrak{R}}_0$. C.Q.F.D.

Proposition 2.2. *On peut toujours trouver dans $\mathfrak{R}$ une algèbre de Boole vérifiant les conditions* 1 *et* 2 *de la proposition précédente.*

En effet considérons les familles $(e_i)_{i \in I}$ d'éléments e_i tels que $\|e_i\| = 1$, étrangers deux à deux $e_i \cap e_j = 0$ si $i \neq j$, enfin $e_i \geqslant 0$. L'existence d'une famille maximale résulte du théorème de Zorn. Posons alors $\mathfrak{B}_i = \{x \in \mathfrak{R},\ x \cap e_i - x = 0\}$. $\mathfrak{B}_i$ est une algèbre de Boole. Soit

$$\mathfrak{B} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{B}_i = \{x \in \mathfrak{R};\ x = x_{i_1} \cup \ldots \cup x_{i_k} \text{ où } x_{i_1} \in \mathfrak{B}_{i_1}, \ldots, x_{i_k} \in \mathfrak{B}_{i_k}\}.$$

Alors $\mathfrak{B}$ est un anneau de Boole qui a les propriétés voulues. En effet:

(1) Soit $f \geqslant 0$, $f \in \mathfrak{R}$, on a $f \cap e_i \neq 0$ pour au moins un $i \in I$, d'après la maximalité de la famille $(e_i)_{i \in I}$.

(2) Soit $y \in \mathfrak{R}$, $e \in \mathfrak{B}$, $y \cap (e-y) = 0$. On a $e = x_1 \cup \ldots \cup x_k$, avec $x_i \in \mathfrak{B}_i$ et $x_i \cap x_j = 0$ $(i, j = 1, \ldots, k,\ i \neq j)$. On a $y = y \cap e$. Donc $y \cap e = y_1 \cup \ldots \cup y_k$, avec $y_i = y \cap x_i$ et comme $y \cap (e-y) = 0$, on a $y_i \cap (x_i - y_i) = 0$. Mais $x_i \cap (e - x_i) = 0$, donc $y_i \cap (e - y_i) = 0$ (car on a $0 \leqslant y \leqslant x_i \leqslant e$, or $(e - x_i) \cap (x_i - y_i) \leqslant (e_i - x_i) \cap x_i = 0$. Donc

$$(e - x_i) \cup (x_i - y_i) = (e - x_i) + (x_i - y_i) = e - y_i$$

et donc

$$(y_i \cap e - y_i) = \big(y \cap (e - x_i)\big) \cup \big(y_j \cap (x_i - y_i)\big) = 0$$

puisque $y_i \cap (e_i - x_i) \leqslant x_i \cap (e_i - x_i)$). Donc $y_i \in \mathfrak{B}_i$ et $y \in \mathfrak{B}$.

$\mathfrak{B}$ est un anneau de Boole. Pour le munir d'une structure d'algèbre de Boole, on peut par exemple identifier chacune des algèbres de Boole $\mathfrak{B}_i$ à une algèbre de parties d'un ensemble Ω_i, en utilisant le théorème de Stone, et alors $\mathfrak{B}$ est identifié à une algèbre de parties $\Omega = \bigoplus_{i \in I} \Omega_i$).

En général pour obtenir $\mathfrak{B}$, on pose $\mathfrak{B} = \bigoplus_{i \in I} \mathfrak{B}_i$ où chaque $\mathfrak{B}_i$ est une algèbre de Boole de $\mathfrak{R}$ telle que:

1. $x \in \mathfrak{R}$, $e \in \mathfrak{B}_i$, $x \cap e - x = 0 \Rightarrow x \in \mathfrak{B}_i$.
2. $x \in \mathfrak{B}_i$, $y \in \mathfrak{B}_j$, $i \neq j \Rightarrow x \cap y = 0$.
3. Pour tout $f \in \mathfrak{R}$, $f > 0$, il existe $x \in \mathfrak{B}_i$ tel que $f \cap x \neq 0$, ou ce qui revient au même

3'. La famille $(\mathfrak{B}_i)_{i \in I}$ est maximale parmi celles satisfaisant 1 et 2.

Alors si $\mathfrak{R}_i$ est le complété de l'espace des éléments $\mathfrak{B}_i$-étagés, $\bigoplus_{i \in I} \mathfrak{R}_i$ est dense dans $\mathfrak{R}$.

§ 3. Définition des espaces d'Orlicz et de classes d'espaces d'Orlicz.

Soit F: $\boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$ croissante convexe, $F(0) = 0$, $F(1) = 1$, $F(x) \neq 0$ pour $x \neq 0$. On supposera de plus ici que F satisfait la condition (Δ_2): $F(2x) \leqslant kF(x)$ pour $x \in \boldsymbol{R}^+$.

— Posons $\varphi(\lambda) = \sup_{x \in \boldsymbol{R}^+} \frac{F(\lambda x)}{(Fx)}$ pour tout $\lambda \in \boldsymbol{R}^+$. φ est croissante sur $\boldsymbol{R}^+$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\lambda) \neq 0$ pour $\lambda \neq 0$, φ est convexe, continue et strictement croissante, puisque

$$F\big((\theta\lambda + (1-\theta)\mu)x\big) \leqslant \theta F(\lambda x) + (1-\theta)F(\mu x) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1,$$

soit $\varphi\big(\theta\lambda + (1-\theta)\mu\big) \leqslant \theta\varphi(\lambda) + (1-\theta)\varphi(\mu)$. De $F(x) \leqslant \varphi(x)F(1) = \varphi(x)$, on tire $F(x) \leqslant \varphi(x)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $F(x) = \varphi(x)$ pour tout, x est que pour tout x, y on ait $F(xy) \leqslant F(x)F(y)$. La condition est évidemment nécessaire d'après la définition de φ. Elle est suffisante car $F(\lambda x) \leqslant F(\lambda)F(x)$ implique $\varphi(\lambda) \leqslant F(\lambda)$.

Si on note $\psi(\lambda) = 1/\varphi(1/\lambda)$. ψ est aussi continue, strictement croissante sur $\boldsymbol{R}^+$, $\psi(0) = 0$.

— Soit maintenant $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace mesuré.

Définition. *$L_F(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ est l'ensemble des classes de fonctions f mesurables telles que $\Phi(f) = \int_\Omega F(|f|)\,d\mu < \infty$.*

Si l'on pose $\|f\| = \inf\{\theta,\ \theta \in \boldsymbol{R}^+,\ \Phi\left(\frac{f}{\theta}\right) \leqslant 1\}$, comme l'application $\lambda \to \Phi(\lambda f)$ est continue strictement croissante de $\boldsymbol{R}^+$ dans $\boldsymbol{R}^+$ (automorphisme de $\boldsymbol{R}^+$) elle prend une fois et une seule la valeur 1. Donc $\|f\|$ est définie par $\Phi(f/\|f\|) = 1$. La convexité de F montre que:

$$\Phi(f+g) \geqslant \Phi(f) + \Phi(g) \quad \text{pour } f, g \geqslant 0.$$

La définition de $\|f\|$ montre immédiatement que c'est une norme sur L_F (et la propriété Δ_2 montre bien que L_F est une espace vectoriel).

Les propriétés suivantes nous seront utiles par la suite.

PROPOSITION 3.1. *$L_F(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ est un espace de Banach pour la norme définie ci-dessus. De plus les classes de fonctions étagées sont denses dans L_F. Enfin L_F est réticulé pour l'ordre naturel* [4].

— Nous allons maintenant donner quelques inégalités utiles dans la suite.

On a

$$\psi(\|f\|) \leqslant \Phi(f) \leqslant \varphi(\|f\|). \tag{3.1}$$

En effet $1 = \Phi\left(\frac{f}{\|f\|}\right) \leqslant \varphi\left(\frac{1}{\|f\|}\right)\Phi(f)$ d'où $\Phi(f) \geqslant \psi(\|f\|)$

$$\Phi(f) = \Phi\left(\|f\| \frac{f}{\|f\|}\right) \leqslant \varphi(\|f\|)\Phi\left(\frac{f}{\|f\|}\right) = \varphi(\|f\|).$$

On a, si $\|f-g\| < 1$ l'inégalité suivante

$$|\Phi(f)-\Phi(g)| \leqslant \|f-g\| + \varphi\left(\frac{1}{1-\|f-g\|} - 1\right)\Phi(|f| \cap |g|). \tag{3.2}$$

En effet:

$$\begin{aligned} |\Phi(f)-\Phi(g)| &= \Phi(|f|) \cup \Phi(|g|) - \Phi(|f|) \cap \Phi(|g|) \\ &\leqslant \Phi(|f| \cup |g|) - \Phi(|f| \cap |g|). \end{aligned}$$

Posons $|f| \cap |g| = z$, $|f| \cup |g| = z+h$, soit $h = |f-g|$.

On a:

$$\begin{aligned} \Phi(z+h) &= \Phi\left[(1-\|h\|)\frac{z}{1-\|h\|} + \|h\| \frac{h}{\|h\|}\right] \\ &\leqslant (1-\|h\|)\,\Phi\left(\frac{z}{1-\|h\|}\right) + \|h\|\,\Phi\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \\ &\leqslant \varphi\left(\frac{1}{1-\|h\|}\right)\Phi(z) + \|h\|. \end{aligned}$$

Donc

$$\Phi(z+h) - \Phi(z) \leqslant \|h\| + \left[\varphi\left(\frac{1}{1-\|h\|}\right) - 1\right]\Phi(z).$$

— Nous serons amenés dans la suite à définir plusieurs classes d'espaces d'Orlicz.

Si (Ω, μ) est tel que $\mu(\Omega) < \infty$, on notera $L_F^K(\Omega, \mu)$ l'espace correspondant. La notation K signifie donc que l'on a un espace de mesure finie. Si par contre $(\Omega, \mu) = (I, \delta_I)$ où I est un ensemble muni de la masse unité en chaque point, on notera $l_F(I)$ l'espace associé.

Remarquons que l'on a les relations d'équivalence suivantes sur les fonctions sur $\boldsymbol{R}^+$:

$F \overset{m}{\sim} G$ si et seulement s'il existe des constantes $a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$ telles que

$$b_1 G(a_1 x) \leqslant F(x) \leqslant b_2 G(a_2 x) \quad \text{pour } x \in \boldsymbol{R}^+.$$

Si la même relation est vraie seulement pour $x \in [0, 1]$ on la note $F \overset{m_0}{\sim} G$ et si elle vaut pour $x \in (1, \infty)$, on la note $F \overset{m_\infty}{\sim} G$. On a alors la proposition suivante:

PROPOSITION 3.2.

$$\begin{aligned} F \overset{m}{\sim} G &\Rightarrow L_F = L_G, \\ F \overset{m_\infty}{\sim} G &\Rightarrow L_F^K = L_G^K, \\ F \overset{m_0}{\sim} G &\Rightarrow l_F = l_G. \end{aligned}$$

Autrement dit L_F^K (resp. l_F) ne dépend que des valeurs de F sur $[1, \infty]$ (resp. $[0, 1]$).

Remarquons que la relation $b_1 G(a_1, x) \leqslant F(x)$ définit des relations d'ordre, notées $\precsim$, ${}^0\!\precsim$, ${}^\infty\!\precsim$, suivant qu'elle est vérifiée pour tout $x \in \boldsymbol{R}^+$, tout $x \in [0, 1]$, tout $x \in [1, \infty]$.

Si $G \precsim F$, on a $L_F(\Omega, \mu) \subset L_G(\Omega, \mu)$ l'injection étant continue. De même si

$$G \,{}^\infty\!\precsim F, \quad L_F^K(\Omega, \mu) \subset L_G^K(\Omega, \mu).$$

Toutes ces propriétés sont immédiates à vérifier.

§ 4. Ultraproduits d'espaces d'Orlicz. Soit $(B_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces d'Orlicz $B_i = L_F(\Omega_i, \mathfrak{A}_i, \mu_i)$, associés à une même fonction F. Soit $\mathscr{D}$ un ultrafiltre sur I et $B = \prod_{i \in I} B_i/\mathscr{D}$ l'espace de Banach ultraproduit des B_i. On sait que B s'obtient par quotient à partir des familles $(f_i)_{i \in I}$ telles que $\|f_i\|$ soit bornée. L'inégalité (3.1): $\psi(\|f_i\|) \leqslant \Phi(f_i) \leqslant \varphi(\|f_i\|)$ valable pour tout i, implique que $\Phi\big((f_i)_{i \in I}\big)$ est borné. On peut définir une fonction $\Phi\colon B \to \boldsymbol{R}^+$, par $\Phi\big((f_i)_{i \in I}\big) = \lim_{\mathscr{D}} \Phi(f_i)$. On vérifie que si $(f_i)_{i \in I} \sim (g_i)_{i \in I}$ (modulo $\mathscr{N}$), on a $\Phi\big((f_i)_{i \in I}\big) = \Phi\big((g_i)_{i \in I}\big)$.

En effet, on a pour $\|f_i-g_i\|<1$ d'après (3.2)

$$|\Phi(f_i)-\Phi(g_i)|\leqslant\|f_i-g_i\|+\left[\varphi\left(\frac{1}{1-\|f_i-g_i\|}\right)-1\right]\Phi(|f_i|\cap|g_i|)$$

or $\lim\limits_{\mathscr{D}}\|f_i-g_i\|=0$, donc

$$\lim_{\mathscr{D}}\Phi(f_i)=\lim_{\mathscr{D}}\Phi(g_i).$$

On voit en particulier que Φ est continue sur B.

— Les propriétés suivantes, vraies sur chacun des B_i sont vraies sur B par passage à la limite.

(1) $\Phi(u)=\Phi(|u|)$.

(2) $\Phi(u+v)\geqslant\Phi(u)+\Phi(v)$, $u,v\geqslant 0$ et $\Phi\big(\theta u+(1-\theta)v\big)\geqslant\theta\Phi(u)+$ $+(1-\theta)\varphi(v)$, $0<\theta<1$.

(3) Si $u\cap v=0$, $\Phi(u+v)=\Phi(u)+\Phi(v)$.

(4) $\Phi(u)=0\Leftrightarrow u=0$.

(5) $\psi(\|u\|)\leqslant\Phi(u)\leqslant\varphi(\|u\|)$.

(6) $\Phi\left(\dfrac{u}{a}\right)=1$ si et seulement si $\|u\|=a$.

Remarquons que si $u\cap v=0$, $u=(f_i)_{i\in I}$, $v=(g_i)_{i\in I}$, on peut choisir $u=(f_i')_{i\in I}$ et $v=(g_i')_{i\in I}$ tels que $f_i'\cap g_i'=0$ (poser $f_i'=f_i-f_i\cap g_i$ et $g_i'=g_i-f_i\cap g_i$).

De plus dans B on a $0\leqslant u<v$ implique $\|u\|<\|v\|$. En effet si $\|u\|$ $=\|v\|$ on a:

$$1=\Phi\left(\frac{u}{\|u\|}\right)=\Phi\left(\frac{v}{\|u\|}\right),\quad\text{or}\quad\Phi\left(\frac{v}{\|u\|}\right)\geqslant\Phi\left(\frac{v-u}{\|u\|}\right)+\Phi\left(\frac{u}{\|u\|}\right)>1$$

puisque Φ est strictement croissante.

Enfin dans B, toute suite décroissante d'éléments $\geqslant 0$ converge.

En effet soit $u_n\geqslant 0$, $u_n\downarrow$, donc $\Phi(u_n)\downarrow a$. Soit N tel que $n\geqslant N$ $\Rightarrow\Phi(u_n)\leqslant a+\delta$. Soit $m,n\geqslant N$. On a,

$$a+\delta\geqslant\Phi(u_n)\geqslant\Phi(u_m)+\Phi(u_n-u_m)\geqslant a+\Phi(u_n-u_m).$$

Donc $\Phi(u_n-u_m)\leqslant\delta$. Choisissons δ tel que $\psi(x)\leqslant\delta\Rightarrow x\leqslant\varepsilon$. Alors comme $\Phi(u_n-u_m)\leqslant\delta\Rightarrow\psi(\|u_n-u_m\|)<\delta$ on a $\|u_n-u_m\|\leqslant\varepsilon$. La suite u_n est de Cauchy.

L'espace B vérifie donc les conditions (1), (2), (3) du paragraphe 2.

Soit $\mathfrak{B}_0$ l'ensemble des éléments de B qui ont une représentation $(e_i)_{i\in I}$ où e_i est la fonction indicatrice d'un ensemble $A_i\in\mathfrak{A}_i$ (avec $\mu(A_i)$ $=\|e_i\|<M$). $\mathfrak{B}_0$ est un anneau de Boole et $\Phi\colon\mathfrak{B}_0\to\boldsymbol{R}^+$ est une mesure additive sur $\mathfrak{B}_0$. De plus le complété $\overline{\mathfrak{B}}_0$ de $\mathfrak{B}_0$ dans B est un σ-anneau sur lequelle Φ est σ-additive puisque Φ est continue sur B.

Montrons que $\mathfrak{B}_0$ satisfait la propriété (1) de la proposition (2.1). On a:

$$u\in B,\ e\in\mathfrak{B}_0,\ u\cap(e-u)=0\quad\text{implique}\quad u\in\mathfrak{B}_0.$$

En effet, on pose $e=(e_i)_{i\in I}$, $u=(u_i)_{i\in I}$ comme $0\leqslant u\leqslant e$, on peut supposer $0\leqslant u_i\leqslant e_i$ pour tout $i\in I$.

Soit $f_i=1_{\{u_i>\frac12\}}$

$$f_i\leqslant e_i.$$

Or $|f_i-u_i|=u_i\cap(e_i-u_i)$:

en effet sur $\{u_i>\frac12\}$, $u_i\cap(e_i-u_i)=e_i-u_i$ (puisque e_i ne prend que les valeurs 0 et 1) donc $u_i\cap(e_i-u_i)=f_i-u_i$ sur $\{u_i>\frac12\}$. De même sur $\{u_i\leqslant\frac12\}$ on a $u_i\cap(e_i-u_i)=u_i=-|f_i-u_i|$ puisque $f_i-x_i=-x_i$. Par suite, puisque $\|u_i\cap(e_i-u_i)\|\to 0$ par hypothèse, on a $\|f_i-u_i\|\to 0$, donc $(f_i)_{i\in I}\sim(u_i)_{i\in I}$ modulo $\mathscr{N}$, or $(f_i)_{i\in I}\in\mathfrak{B}_0$ donc aussi u.

Posons pour $e\in\overline{\mathfrak{B}}_0$, $\mu_0(e)=\Phi(e)$. Le couple $(\overline{\mathfrak{B}}_0,\mu_0)$ peut donc être interprété comme une mesure μ_0 sur une σ-algèbre $\overline{\mathfrak{B}}_0$ isomorphe au quotient d'une σ-algèbre de parties d'un ensemble par un σ-idéal d'éléments μ_0-nuls. On considèrera dorénavant $\overline{\mathfrak{B}}_0$ comme une σ-algèbre de parties d'un ensemble Ω_0. L'espace $\mathfrak{R}_0$ des fonctions étagées sur $\overline{\mathfrak{B}}_0$ est isomorphe à l'espace $\mathscr{E}$ des fonctions étagées sur (Ω_0,μ_0). Mais Φ est additive pour les éléments étrangers, et

$$\Phi(\lambda e)=\lim_{\mathscr{D}}\Phi(\lambda e_i)=F(|\lambda|)\lim_{\mathscr{D}}\Phi(e_i)=F(|\lambda|)\Phi(e).$$

Donc sur $\mathscr{E}(\Omega_0,\mu_0)$, Φ se calcule comme pour $L_F(\Omega_0,\mu_0)$. Comme $L_F(\Omega_0,\mu_0)$ est le complété de $\mathscr{E}(\Omega_0,\mu_0)$, on a:

PROPOSITION 4.1. *Le sous-espace $\overline{\mathfrak{R}}_0$ de B, complété de l'espace $\mathfrak{R}_0$ engendré par $\mathfrak{B}_0$ est isomorphe à $L_F(\Omega_0,\mu_0)$.*

Considérons maintenant le sous-espace de Banach $\mathfrak{R}_1$ de B, engendré par les éléments étrangers à $\mathfrak{B}_0$. Donc si $(f_i)_{i\in I}\in\mathfrak{R}_1$, alors pour toute $(e_i)_{i\in I}\in\mathfrak{B}_0$ on a:

$$\lim_{\mathscr{D}}\Phi(|f_i|\cap e_i)=0;$$

soit $(f_i)_{i\in I}\in\mathfrak{R}_1$ si et seulement si, pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$, $A_i\in\mathfrak{B}_i$ telle que $\big(\mu_i(A_i)\big)$ soit bornée en i, on a

$$\int_{A_i}F(|f_i|\cap 1)\underset{\mathscr{D}}{\to}0.$$

On a aussi $\int_{A_i}F(|f_i|\cap M)\underset{\mathscr{D}}{\to}0$ pour tout $M>0$, puisque

$$F(|f_i|\cap M)\leqslant\varphi(M)\,F\left(\frac{|f_i|}{M}\cap 1\right)\leqslant\varphi(M)F(|f_i|\cap 1)\quad\text{si}\quad M\geqslant 1$$

et si $M\leqslant 1$, $F(f_i\cap M)\leqslant F(f_i\cap 1)$.

On a alors $B = \overline{\mathfrak{R}}_0 \oplus \mathfrak{R}_1$ soit

$$B = L_F(\Omega_0, \mu_0) \oplus \mathfrak{R}_1.$$

Nous allons identifier $\mathfrak{R}_1$ pour une classe particulière d'espaces d'Orlicz.

ÉTUDE DES FONCTIONS À VARIATION RÉGULIÈRE

Supposons que F soit à variation régulière, suivant la terminologie introduite par Karamata, c'est-à-dire que l'on ait des fonctions L_1 et L_2 telles que:

sur $[0,1]$, $F(x) = x^p L_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{L_1(\lambda x)}{L_1(x)} = 1$ pour tout $\lambda > 0$, $L_1(1) = 1, p \geqslant 1$;

sur $[1, \infty]$, $F(x) = x^q L_2(x)$, $q \geqslant 1$, $L_2(1) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{L_2(\lambda x)}{L_2(x)} = 1$ pour tout $\lambda > 0$.

Soit S_1 le sous-espace de $\mathfrak{R}_1$ formé des éléments qui ont un représentant $(f_i)_{i\in I}$ tel qu'il existe $M > 0$ et $|f_i| \leqslant M$ sur Ω_i pour tout i. Il est clair que S_1 est réticulé et que si $0 \leqslant u \leqslant v \in S_1$, alors $u \in S_1$.

L'espace de Banach réticulé $\mathfrak{R}_1$ est donc somme de directe de $\overline{S}_1$ et de l'espace des éléments étrangers à S_1.

LEMME. *Soit $f = (f_i)_{i\in I} \in S_1$, $f \geqslant 0$, et a réel > 0, alors*

$$\Phi(f) = \lim_{\mathscr{D}} \int_{\{f_i < a\}} F(f_i)\, d\mu_i.$$

En effet, soit $A_i = \{f_i > a\}$. On a $\int_{\Omega_i} F(f_i)\, d\mu_i < K$ donc $\mu(A_i) \leqslant \dfrac{K}{F(a)}$. Par ailleurs $(f_i)_{i\in I} \in \mathfrak{R}_1$ et donc $\int_{\{f_i > a\}} F(f_i \cap M)\, d\mu_i \underset{\mathscr{D}}{\to} 0$. On choisit M tel que $0 \leqslant f_i \leqslant M$ pour tout i et donc $\lim\limits_{\mathscr{D}} \int_{\{f_i > a\}} F(f_i)\, d\mu_i = 0$.

LEMME. *Soit $f \geqslant 0$ et $f \in S_1$, alors $\Phi(\lambda f) = |\lambda|^p \Phi(f)$.*

D'après le lemme précédent on a, pour $\lambda \geqslant 0$:

$$\Phi(\lambda f) - \lambda^p \Phi(f) = \lim_{\mathscr{D}} \int_{\{f_i \leqslant a\}} [F(\lambda f_i) - \lambda^p F(f_i)]\, d\mu_i.$$

Soit $a < 1 \cap 1/\lambda$. Comme $\dfrac{L_1(\lambda x)}{L_1(x)} \to 1$ $(x \to 0)$, on peut choisir a tel que $|f_i| \leqslant a \Rightarrow \left| \dfrac{L_1(\lambda f_i)}{L_1(f_i)} - 1 \right| < \varepsilon$. On a alors $F(\lambda f_i) - \lambda^p F(f_i) \leqslant \lambda^p \varepsilon F(f_i)$ et

$$\left| \int_{\{f_i \leqslant a\}} [F(\lambda f_i) - \lambda^p F(f_i)]\, d\mu_i \right| \leqslant \lambda^p \varepsilon \int_K F(f_i)\, d\mu_i \leqslant \lambda^p \varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, le lemme est démontré.

PROPOSITION 4.2. *$\overline{S}_1$ est isomorphe à un espace $L^p(\Omega_1, \mu_1)$.*

En effet, l'espace $\overline{S}_1$ satisfait les conditions d'application des propositions 2.1 et 2.2 et donc il existe une algèbre de Boole $\mathfrak{B}_1$ d'éléments $\geqslant 0$ de $\overline{S}_1$ telle que l'espace des éléments $\mathfrak{B}_1$-étagés soit dense dans S_1. Comme Φ est additive sur $\mathfrak{B}_1$ et que $\Phi(\lambda f) = \lambda^p \Phi(f)$ pour $f \in \mathfrak{B}_1$, on voit que $\overline{S}_1$ est isomorphe à $L^p(\Omega_1, \mu_1)$.

Remarque. *Supposons que $\mu_i(\Omega_i) \leqslant 1$ pour tout i. Alors $\overline{S}_1 = \{0\}$.*

En effet, si $(f_i)_{i\in I} \in \mathfrak{R}_1$, on a $\int_{\Omega_i} F(f_i \cap M)\, d\mu_i \underset{\mathscr{D}}{\to} 0$ (comme $\mu(\Omega_i) \leqslant 1$) et donc $\int_{\{f_i < a\}} F(f_i)\, d\mu_i \underset{\mathscr{D}}{\to} 0$; et donc $\Phi\big((f_i)_{i\in I}\big) = 0$.

Nous allons maintenant étudier l'espace S_2 des éléments étrangers à $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{R}_0 \oplus \overline{S}_1$.

LEMME. *$\mathfrak{R}_2$ est le sous-espace constitué des éléments admettant une représentation $(f_i)_{i\in I}$ telle qu'il existe $M > 0$ avec $|f_i| \leqslant M$.*

En effet, il est clair d'après ce qui précède que tout élément de $\mathfrak{R}_1$ est de cette forme. Inversement soit $f \geqslant 0$, $f = (f_i)_{i\in I}$ avec $|f_i| \leqslant M$. On a $f = g + h$ avec $g \in \mathfrak{R}_0$, h étranger à $\mathfrak{R}_0$, $g, h \geqslant 0$. Donc si $h = (h_i)_{i\in I}$, $0 \leqslant h_i \leqslant f_i$, donc $|h_i| \leqslant M$ sur Ω_i. Donc $(h_i) \in S_1$. On déduit de ce lemme que *si $(f_i)_{i\in I} \in S_2$ on a $\lim\limits_{\mathscr{D}} \Phi(f_i \cap M) = 0$ pour tout $M > 0$.*

LEMME. *Si $f \in S_2$, alors $\Phi(\lambda f) = |\lambda|^q \Phi(f)$.*

En effet, soit $f = (f_i)_{i\in I} > 0$. On a

$$\Phi(\lambda f) - \lambda^q \Phi(f) = \lim_{\mathscr{D}} \big(\Phi(\lambda f_i) - \lambda^q \Phi(f_i)\big).$$

Or $\lim\limits_{\mathscr{D}} [\Phi(\lambda(f_i \cap M))] - \lambda^q \Phi(f_i \cap M) = 0$ et donc

$$\Phi(\lambda f) - \lambda^q \Phi(f) = \lim_{\mathscr{D}} \int_{\{f_i > M\}} \big(F(\lambda f_i) - \lambda^q F(f_i)\big)\, d\mu_i.$$

Choisissons $M > 1 \cup \dfrac{1}{\lambda}$ assez grand pour que

$$x \geqslant M \Rightarrow \left| \frac{L_2(\lambda x)}{L_2(x)} - 1 \right| \leqslant \varepsilon.$$

On a alors $|\Phi(\lambda f) - \lambda^q \Phi(f)| \leqslant \lim\limits_{\mathscr{D}} \lambda^q \varepsilon \int_{\{f_i > M\}} F(f_i)\, d\mu_i \leqslant \lambda^q \varepsilon \Phi(f)$. D'où le résultat.

On en déduit, comme dans le cas de S_1, que $\overline{S}_2$ est isomorphe à $L^q(\Omega_2, \mu_2)$.

Remarque. Si $L_F(\Omega_i, \mu_i) = l_F(E_i)$, espace de familles F-sommables sur E_i. Comme les suites F-sommables sont bornées, on a $\int_{\{f_i > M\}} F(f_i)\, d\mu_i = 0$ pour M assez grand, et donc $S_2 = 0$.

On peut résumer les résultats dans le théorème suivant:

THÉORÈME 4.1. *Soit* $B_i = L_F(\Omega_i, \mu_i)$ *et* $B = \prod_{i\in I} B_i/\mathscr{D}$ *avec*

$$F(x) = x^p L_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$
$$F(x) = x^q L_2(x), \quad 1 \leqslant x < \infty,$$

F, L_1, L_2 ayant les propriétés indiquées plus haut. Alors B est isomorphe à l'espace de Banach réticulé

$$L_F(\Omega_0, \mu_0) \oplus L^p(\Omega_1, \mu_1) \oplus L^q(\Omega_2, \mu_2).$$

Si de plus il existe $K > 0$ avec $\mu_i(\Omega_i) < K$ pour tout i, $B = L_F^K \oplus L^q$. Enfin si $B_i = l_F(E_i)$ pour tout i, alors $B = L_F \oplus L^p$.

§ 5. Problèmes de plongement et de finitude. Rappelons d'abord que si B et C sont des espaces de Banach, un λ-isomorphisme T: $B \to C$ est un isomorphisme de B sur C tel que

$$\|T\|\,\|T^{-1}\| \leqslant \lambda \quad (\lambda \geqslant 1).$$

On notera $B \xrightarrow{\lambda} C$ l'existence d'un tel isomorphisme.

Notation. Si $\mathscr{C}$ est une classe d'espaces de Banach, et B un espace de Banach on notera $B \xrightarrow{\lambda} \mathscr{C}$ s'il existe un espace C dans $\mathscr{C}$ avec $B \xrightarrow{\lambda} C$.

$\lambda = 1$ correspond aux isométries.

DÉFINITION. *On dit que $\mathscr{C}$ a la propriété de λ-finitude si les deux propriétés suivantes sont équivalentes pour tout espace de Banach B*

1. $B \xrightarrow{\lambda} \mathscr{C}$.

2. *Pour tout B_F, sous-espace de B de dimension finie, $B_F \xrightarrow{\lambda} \mathscr{C}$.*

THÉORÈME 5.1. *Tout classe $\mathscr{C}$ d'espaces de Banach stable par sous-espace, isométrie et ultraproduit a la propriété de λ-finitude pour tout λ.*

En effet, soit B un espace de Banach. $\mathscr{C}$ étant stable par sous-espace on a évidemment $1 \Rightarrow 2$.

Soit maintenant $(B_F)_{F\in\mathfrak{F}}$ la famille des sous-espaces de dimension finie de B. Nous avons défini au paragraphe 1 une injection isométrique i: $B \to \prod_{F\in\mathfrak{F}} B_F/\mathscr{D}$ où $\mathscr{D}$ est un ultrafiltre convenable sur $\mathfrak{F}$.

Comme B_F est dans $\mathscr{C}$ par hypothèse et que $\mathscr{C}$ est stable par ultraproduit, B est dans $\mathscr{C}$ comme sous-espace de $\prod_{F\in\mathfrak{F}} B_F/\mathscr{D}$.

Remarque. Une classe peut avoir la propriété de finitude sans être stable par ultraproduit.

EXEMPLE. La classe $\mathscr{C}$ des espaces dont tous les sous-espaces de dimension finie, sont isométriques à un sous-espace d'un certain $L^p(0,1)$, $2 < p < \infty$: $\mathscr{C}$ a la propriété de finitude.

De plus $L^p(0,1)$ est dans $\mathscr{C}$ pour $2 < p < \infty$, $L^\infty(0,1) \xrightarrow{1} \prod_{p\in[2,\infty[} L^p(0,1)/\mathscr{D}$, car $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$ si $f \in L^\infty(0,1)$. Il est facile de voir (sur des espaces de dimension 2 bien choisis) que $L^\infty(0,1)$ n'est pas dans $\mathscr{C}$.

Soit maintenant F une fonction du type de celles étudiées au § 4 ($F(x) = x^p L_1(x)$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, $F(x) = x^q L_2(x)$ pour $1 \leqslant x \leqslant \infty$). On a vu que $\prod_{i\in I} L_F(\Omega_i, \mu_i)/\mathscr{D} = L_F(\Omega_0, \mu_0) \oplus L_p(\Omega_1, \mu_1) \oplus L_q(\Omega_2, \mu_2)$ et $\prod_{i\in I} L_F^K(\Omega_i, \mu_i)/\mathscr{D} = L_F^K(\Omega_0, \mu_0) \oplus L_q(\Omega_1, \mu_1)$. On en déduit immédiatement

THÉORÈME 5.2. *Les classes $L_F \oplus L_p \oplus L_q$ et $L_F^K \oplus L_q^1$ sont stables par ultraproduit.*

Designons par SL_F la classe des sous-espaces d'un espace L_F. Nous allons maintenant construire un exemple de classe L_F, différente de toute classe SL_p, qui possède la condition de finitude, ce qui permet de répondre par la négative à une conjecture assez classique. Soit $F(x) = x^2\big(L_1(x) + L_2(x)\big)$.

PROPOSITION 5.3. *La classe SL_F a alors la propriété de finitude.*

En effet $SL_F \oplus L_2$ a la propriété de finitude. Mais tout espace de Hilbert H est isométrique à un sous-espace d'un espace L_F. H est en effet isométrique à un espace de variables aléatoires gaussiennes centrées définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathfrak{A}, p)$. On a donc $H \subset L^2(\Omega, \mathfrak{A}, p)$. Soit $\xi \in H$; si $\|\xi\|_H = \|\xi\|_{L^2(\Omega,\mathfrak{A},p)} = \sigma$, la loi de ξ (image de p par ξ) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp -\frac{x^2}{2\sigma^2}$. On a

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{R} F(x) \exp -\frac{x^2}{2\sigma^2}\, dx < \infty.$$

Soit c tel que $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int F(cy) e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1$ alors $\Phi\left(\frac{c}{\sigma}\xi\right) = 1$; donc $\frac{1}{\sigma} \|\sigma\xi\|_{L_F(\Omega,\mathfrak{A},p)} = 1$, et l'application $\xi \to \frac{\xi}{\sqrt{c}}$ est une isométrie $H \to L_F(\Omega, \mathfrak{A}, p)$.

Donc la classe $SL_F \oplus L_2$ est identique à la classe SL_F.

Remarque. On en déduira, après les résultats du paragraphe 6 que la classe SL_F ci-dessus se caractérise par des conditions portant sur la norme du type (*) (théorème 6.1).

§ 6. Classes d'espaces de Banach stables par ultraproduit.

THÉORÈME 6.1. *Soit $\mathscr{C}$ une classe d'espaces normés. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *$\mathscr{C}$ est stable par isométrie, sous espaces (chaque fois que C est dans $\mathscr{C}$, les sous-espaces de C sont aussi dans $\mathscr{C}$) et ultraproduit.*

(2) *$\mathscr{C}$ est la classe des espaces normés qui satisfait un ensemble Γ de conditions du type suivant:*

$$(*)\qquad \forall x_1 \ldots \forall x_n\Big[\Big(\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|, \Big\|\sum_{i=1}^n a_1^i x_i\Big\|, \ldots, \Big\|\sum_{i=1}^n a_m^i x_i\Big\|\Big) \in F\Big]$$

les a_j^i étant réels et F un cône fermé de $(\boldsymbol{R}^+)^{m+n}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) est évident puisque la classe des espaces normés qui satisfont une condition du type considéré est stable par ultraproduit.

Avant de montrer (1) $\Rightarrow$ (2), on montre:

THÉORÈME 6.2. *Soit $\mathscr{C}$ une classe d'espaces normés, stable par ultraproduit. La propriété pour un espace normé de se plonger isométriquement dans un espace de la classe $\mathscr{C}$ s'exprime par un ensemble de conditions du type*

$$(6.1)\qquad \forall x_1, \ldots, \forall x_n\Big[\|x_1\| \neq \delta_1, \text{ ou } \ldots \text{ ou } \|x_n\| \neq \delta_n \text{ ou } \Big\|\sum_{i=1}^n a_1^i x_i\Big\| \neq \varepsilon_1 \text{ ou } \ldots \text{ ou } \Big\|\sum_{i=1}^n a_m^i x_i\Big\| \neq \varepsilon_m\Big](*)$$

avec $\delta_1, \ldots, \delta_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m \in \boldsymbol{R}^+$.

Démonstration. Soit Γ_0 l'ensemble des conditions de la forme (6.1) écrite ci-dessus, satisfaites pour tout espace de $\mathscr{C}$. Tout espace B tel que $B \xrightarrow{1} \mathscr{C}$ satisfait Γ_0.

Inversement soit E satisfaisant Γ_0. Pour toute partie finie $X = \{a_1, \ldots, a_n\}$ de E, il existe B_X dans $\mathscr{C}$, $\{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n\} \subset B_X$, tel que $\|a_i\| = \|\bar{a}_i\|$, et $\bar{a}_i + \bar{a}_j = \bar{a}_k$ si $a_i + a_j = a_k$ et $\bar{a}_l = \lambda \bar{a}_m$ si $a_l = \lambda a_m$, $1 \leqslant i, j, k, l, \quad m \leqslant n, \quad \lambda \in R$.

S'il n'en était pas ainsi, tout espace de $\mathscr{C}$ satisferait la condition:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n(\|x_1\| \neq \|a_1\| \text{ ou } \ldots \text{ ou } \|x_n\| \neq \|a_n\| \text{ ou } \ldots \text{ ou } \|x_i + x_j - x_k\| \neq 0 \text{ ou } \ldots \text{ ou } \|x_l - \lambda x_m\| \neq 0 \text{ ou } \ldots).$$

Cette condition serait alors dans Γ_0; or elle n'est pas satisfaite par E (puisque contredite par $a_1, \ldots, a_n \in E$), ce qui contredit l'hypothèse.

Soit alors $\mathscr{D}$ un ultrafiltre sur l'ensemble S des parties finies de E tel que pour tout $X \in S$, $\{Y \in S,\ Y \supset X\} \in \mathscr{D}$.

Soit $B = \prod_{X \in S} B_X / \mathscr{D}$; B est par hypothèse dans $\mathscr{C}$.

On définit une application linéaire isométrique $T\colon E \to B$ par $T(a) = (u_X)_{X \in S}$ avec $u_X = 0$ si $a \notin X$, $u_X = \bar{a}$ si $a \in X$ d'où le théorème 6.2.

Démontrons maintenant le théorème 6.1. Pour chaque matrice $A = (a_j^i)_{j=1,\ldots,m}^{i=1,\ldots,n}$, soit U_A l'ensemble des $(\delta_1, \ldots, \delta_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) \in (\boldsymbol{R}^+)^{m+n}$ qui apparaissent dans Γ_0, associés à A.

Soit $F_A = (\boldsymbol{R}^+)^{m+n} - U_A$.

L'ensemble Γ_0 peut être remplacé par l'ensemble Γ des conditions suivantes:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\Big[\Big(\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|, \Big\|\sum_{i=1}^n a_1^i x_i\Big\|, \ldots, \Big\|\sum_{i=1}^n a_m^i x_i\Big\|\Big) \in F_A\Big]$$

Il reste à montrer que F_A est un cône fermé de $(\boldsymbol{R}^+)^{m+n}$. Il est évident que c'est un cône. Soit $(\delta_1^k, \ldots, \delta_n^k, \varepsilon_1^k, \ldots, \varepsilon_m^k)$ une suite d'éléments de F_A qui converge vers $(\delta_1, \ldots, \delta_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ pour $k \to \infty$. Pour chaque k, il existe $E_k \in \mathscr{C}$ et $a_1^k, \ldots, a_n^k \in E_k$ tels que $\|\sum_{i=1}^n a_j^i a_i^k\| = \varepsilon_j^k$, $j = 1, \ldots, m$, et $\|a_i^k\| = \delta_i^k$ $(i = 1, \ldots, n)$. Sinon, tout espace de la classe $\mathscr{C}$ satisfait la condition

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n\Big[\|x_1\| \neq \delta_1^k \text{ ou } \ldots \text{ ou } \|x_n\| \neq \delta_n^k \text{ ou } \ldots \text{ ou } \Big\|\sum_{i=1}^n a_1^i x_i\Big\| \neq \varepsilon_1^k \text{ ou } \ldots \text{ ou } \Big\|\sum_{i=1}^n a_m^i x_i\Big\| \neq \varepsilon_m^k\Big]$$

et par définition de F_A, on aurait $(\delta_1^k, \ldots, \delta_n^k, \varepsilon_1^k, \ldots, \varepsilon_m^k) \notin F_A$ contrairement à l'hypothèse.

Soit alors $\mathscr{D}$ un ultrafiltre non trivial sur $\boldsymbol{N}$ et $E = \prod_{k \in \boldsymbol{N}} E_k/\mathscr{D}$. Comme $\mathscr{C}$ est stable par ultraproduit, $E \in \mathscr{C}$. Pour chaque i, $1 \leqslant i \leqslant n$, la suite $(a_i^k)_{k \in \boldsymbol{N}}$ définit un élément a_i de E avec $\|a_i\| = \lim_{\mathscr{D}} \|a_i^k\| = \delta_i$. De plus

$$\Big\|\sum_{i=1}^n a_j^i a_i\Big\| = \lim_{\mathscr{D}} \Big\|\sum_{i=1}^n a_j^i a_i^k\Big\| = \varepsilon_j.$$

Finalement on a dans E

$$\Big(\|a_1\|, \ldots, \|a_n\|, \Big\|\sum_{i=1}^n a_1^i a_i\Big\|, \ldots, \Big\|\sum_{i=1}^n a_m^i a_i\Big\|\Big) = (\delta_1, \ldots, \delta_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$$

ce qui montre que $(\delta_1, \ldots, \delta_n, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m) \in F_A$. C.Q.F.D.

On a un théorème analogue pour les algèbres de Banach qui se démontre de la même façon:

THÉORÈME 6.3. *Soit $\mathscr{C}$ une classe d'algèbres normées. Alors les conditions suivantes sont équivalentes:*

1° *$\mathscr{C}$ est stable par isomorphisme, sous-algèbres, ultraproduit;*

2° *$\mathscr{C}$ est la classe des algèbres normées qui satisfont un ensemble de conditions du type suivant:*

$$(*)\qquad \forall x_1 \ldots \forall x_n\big[\big(\|x_1\| \ldots \|x_n\|, \|P_1(x_1, \ldots, x_n)\| \ldots \|P_m(x_1, \ldots, x_n)\|\big) \in F\big],$$

où F est un fermé de $(\mathbf{R}^+)^{m+n}$, et $P_1, \ldots, P_m$ des polynômes à n variables à coefficients dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ (suivant qu'on a affaire à des algèbres sur $\mathbf{R}$ ou sur $\mathbf{C}$).

§ 7. Conditions pour qu'un espace normé se plonge par un λ-isomorphisme dans un espace L^p.

Le résultat exposé ici n'est pas neuf, il est dû à Lindenstrauss et Pełczyński [1]. Nous le donnons avec une démonstration un peu différente, qui s'étend à $L^p, p<1$, parce qu'il illustre bien le type de conditions du paragraphe 6. Monsieur Kwapień nous a fait remarquer qu'il pouvait aussi s'exprimer en termes d'opérateurs p-sommants.

THÉORÈME 7.1. *Soit Ω un espace compact, $\mathscr{E}$ un Q-espace de fonctions continues sur Ω. On suppose qu'il existe $f_0>0$ sur $\Omega, f_0 \in \mathscr{E}$. Si T est une application $\mathbf{Q}$-linéaire, $T\colon \mathscr{E}\to\mathbf{R}$, $T\geqslant 0$ sur $\mathscr{E}$ ($f\in\mathscr{E}, f\geqslant 0$ implique $T(f)\geqslant 0$) alors il existe une mesure $\mu\geqslant 0$ sur Ω telle que $T(f)=\int_\Omega f\,d\mu$ pour $f\in\mathscr{E}$.*

THÉORÈME 7.2. *Soit $\mathscr{E}$ un Q-espace vectoriel, $e\in\mathscr{E}$, C un cône convexe de $\mathscr{E}$ tel que $-e\notin C$, archimédien pour $(\mathscr{E}, e)$, c'est-à-dire pour toute $f\in\mathscr{E}$, il existe $n\in N$ tel que $ne-f\in C$. Alors il existe une application $T\colon \mathscr{E}\to\mathbf{R}$ $\mathbf{Q}$-linéaire, $T(e)=1, T\geqslant 0$ sur C.*

On a:

THÉORÈME 7.3. *Soit $\mathscr{E}$ un Q-espace vectoriel, C un cône convexe de $\mathscr{E}$, $\mathscr{G}$ un système de générateurs de $\mathscr{E}$ (sur $\mathbf{Q}$). A chaque $f\in\mathscr{G}$ on associe deux réels m_f et M_f. Pour qu'il existe une application $\mathbf{Q}$-linéaire $T\colon \mathscr{E}\to\mathbf{R}$, $T\geqslant 0$ sur C telle que $m_f\leqslant Tf\leqslant M_f$ pour $f\in\mathscr{G}$ il faut et il suffit que quels que soient $f_i, g_i\in\mathscr{G}$, $a_i, b_j\in\mathbf{Q}^+$:*

$$\sum_{i=1}^n a_i f_i-\sum_{j=1}^m b_j g_j\in C \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i M_{f_i}-\sum_{j=1}^m b_j m_{g_j}\geqslant 0.$$

Démonstration. Condition nécessaire: Si

$$\sum_{i=1}^n a_i f_i-\sum_{j=1}^m b_j g_j\in C \quad \text{alors} \quad \sum_{i=1}^n a_i T(f_i)-\sum_{j=1}^m b_j T(g_j)\geqslant 0.$$

Condition suffisante: On prend un symbole nouveau e et soit $\mathscr{E}'=\mathscr{E}\oplus\mathbf{Q}e$. Soit C' le cône convexe de $\mathscr{E}'$, engendré par e, C et $\{M_f e-f, f-m_f e, f\in g\}$. Ce cône est archimédien sur $\mathscr{E}'$ puisque $\mathscr{G}$ engendre $\mathscr{E}$ de plus $-e\notin C'$, sinon on aurait:

$$-e=\lambda e+\sum_{i=1}^n a_i(M_{f_i}e-f_i)+\sum_{j=1}^m b_j(g_j-m_{g_j}e)+h$$

où $\lambda\in\mathbf{Q}$, $a_i, b_j\in\mathbf{Q}^+$, $f_i, g_j\in\mathscr{G}$, $h\in C$. D'où $\sum_{i=1}^m a_i f_i-\sum_{j=1}^m b_j g_j=h\in C$ et

$$\sum_{i=1}^n a_i M_{f_i}-\sum_{j=1}^m b_j m_{g_j}=-(\lambda+1)<0,$$

ce qui est impossible par hypothèse.

On peut alors appliquer le théorème 7.2, il existe $T\colon \mathscr{E}'\to\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$ linéaire $\geqslant 0$ sur C' telle que $T(e)=1$ et la restriction de T à $\mathscr{E}$ donne l'application cherchée. C.Q.F.D.

THÉORÈME 7.4. *Soit E un espace normé, m, M deux réels $\geqslant 0$, $m\leqslant M$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *Il existe un espace $L^p(\Omega,\mu)$ contenant E tel que*

$$m\|f\|^p\leqslant\int|f|^p\,d\mu\leqslant M\|f\|^p \quad \textit{pour } f\in E.$$

(2) *Quels que soient les rationnels σ_j, a_{ij}, $1\leqslant j\leqslant m$, $1\leqslant i\leqslant n$ tels que $\sum_j\sigma_j|\sum a_{ij}x_i|^p\geqslant 0$ pour tous $x_1,\ldots,x_n\in\mathbf{R}$, on a*

$$\sum_j m_j\sigma_j\Big\|\sum a_{ij}f_i\Big\|^p\geqslant 0 \quad \textit{quels que soient} \quad f_1,\ldots,f_n\in E$$

(où $m_j=M$ si $\sigma_j\geqslant 0$, et $m_j=m$ si $\sigma_j<0$).

Condition nécessaire. On a $\sum_j\sigma_j|\sum a_{ij}f_i|^p\geqslant 0$ sur Ω, donc $\sum_j\sigma_j\int_\Omega|\sum a_{ij}f_i|^p\,d\mu\geqslant 0$.

Condition suffisante. On peut supposer E de dimension finie d'après la propriété de finitude de SL_p

Soient $(e_1,\ldots,e_n)$ une base de E, S la sphère unité de E^*. $S=\{t\in E^*, \|t\|=1\}$ pour une norme arbitraire sur E^*.

Pour chaque $f\in E$, $t\in S$, on pose $f(t)=\langle f,t\rangle$. Donc E est un espace de fonctions continues sur S. Soit $\mathscr{E}$ le Q-espace de fonctions continues sur S engendré par les fonctions $|f|^p$ $(t\to|\langle f,t\rangle|^p)$.

On applique à $\mathscr{E}$ le théorème 7.2 en prenant pour C le cône des fonctions $\geqslant 0$ de $\mathscr{E}$, pour $\mathscr{G}$ l'ensemble $\{|f|^p, f\in E\}$, $m_{|f|^p}=m\|f\|^p$, $M_{|f|^p}=M\|f\|^p$. Si on a $\sum_j\sigma_j|f_j|^p\geqslant 0$ sur S, on a en posant $f_j=\sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$,

$$\sum_j\sigma_j\Big|\sum_i a_{ij}\langle e_i,t\rangle\Big|^p\geqslant 0 \quad \text{sur} \quad S$$

donc sur E^*, tout entier par homogénéité. Or les $\langle e_i,t\rangle=x_i$ forment pour $i=1,\ldots,n$ un n-uplet arbitraire de réels puisque les e_i sont indépendants. On a donc $\sum_j\sigma_j|\sum a_{ij}x_i|^p\geqslant 0$ quels que soient $x_1,\ldots,x_n\in\mathbf{R}$, d'où par hypothèse $\sum_j m_j\sigma_j\|\sum a_{ij}e_i\|^p\geqslant 0$ soit $\sum_j m_j\sigma_j\|f_j\|^p\geqslant 0$. Le théorème (7.3) donne donc une forme linéaire $T: \mathscr{E} \to \boldsymbol{R}, \geqslant 0$ sur c, telle que $m\|f\|^p \leqslant T(|f|^p) \leqslant M\|f\|^p$ pour $f \in E$. Or dans $\mathscr{E}$, il existe $f_0 > 0$ sur S, $f_0 = |e_1|^p + \ldots + |e_n|^p$. D'après le théorème 7.1 il existe $\mu \geqslant 0$ sur S telle que $T(\varphi) = \int_S \varphi\, d\mu$ pour tout $\varphi \in \mathscr{E}$. Donc

$$m\|f\|^p \leqslant \int |f|^p d\mu \leqslant M\|f\|^p. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

§ 8. Caractérisation des sous-algèbres de $l_F(E)$. Soit E un ensemble, F une fonction satisfaisant la condition Δ_2 *du* § 3, c'est à dire $F: \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}^+$ est croissante, convexe, et il existe k tel que $F(2x) \leqslant kF(x)$.

L'espace l_F est alors l'espace des familles F-sommables, soit

$$l_F(E) = \Big\{(\lambda_i)_{i\in E}, \sum_{i\in E} F(|\lambda_i|) < \infty\Big\}.$$

Nous allons caractériser les espaces l_F considérés comme algèbres de Banach.

PROPOSITION 8.1. *Pour F satisfaisant Δ_2, $l_F(E)$ est une algèbre de Banach pour la multiplication: $(a_i)_{i\in E}(b_i)_{i\in E} = (a_i b_i)_{i\in E}$ et pour la norme d'espace d'Orlicz.*

Immédiat.

Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille d'ensembles, on appelle ultra-produit $E = \prod_{i\in I} E_i/\mathscr{D}$ des ensembles E_i le quotient du produit cartésien $\prod_{i\in I} E_i$ par la relation d'équivalence modulo l'ultrafiltre $\mathscr{D}$: $(x_i)_{i\in I} = (y_i)_{i\in I}$ modulo $\mathscr{D}$ si et seulement si $\{i, x_i = y_i\} \in \mathscr{D}$.

THÉORÈME 8.2. *On a:*

$$\prod_{i\in I} l_F(E_i)/\mathscr{D} = l_F\Big(\prod_{i\in I} E_i/\mathscr{D}\Big) \oplus \mathfrak{R}$$

où $\mathfrak{R}$ est un certain espace de Banach; cette égalité est une égalité entre algèbres de Banach réticulées, le second membre ayant pour multiplication: $(f+g)(f'+g') = ff'$ si $f, f' \in l_F(E)$ et $g, g' \in \mathfrak{R}$.

Démonstration: Soit $E = \prod_{i\in I} E_i/\mathscr{D}$, $A = \prod_{i\in I} l_F(E_i)/\mathscr{D}$, soit $\varphi = (\varphi_i)_{i\in I}$, $\varphi \in \prod_{i\in I} E_i$, $\bar{\varphi} = (1_{\varphi_i})_{i\in I} \in A$. On a évidemment $\bar{\varphi} = \bar{\psi} \Leftrightarrow \varphi = \psi$ (modulo $\mathscr{D}$). Le sous espace fermé engendré par $\{\bar{\varphi}; \varphi \in \prod_{i\in I} E_i\}$ est isomorphe à $l_F(E)$ car si $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in E$ et si pour $f = (f_i)_{i\in I} \in A$ on définit

$$\Phi(f) = \lim_{\mathscr{D}} \Phi(f_i) = \lim_{\mathscr{D}} \sum_{j\in E_i} F(|\lambda_j^i|), \quad \text{pour } f_i = (\lambda_j^i)_{j\in E_i}$$

on a:

$$\Phi(\lambda_1\bar{\varphi}_1 + \ldots + \lambda_n\bar{\varphi}_n) = \Phi(\lambda_1\bar{\varphi}_1) + \ldots + \Phi(\lambda_k\bar{\varphi}_k) = F(\lambda_1) + \ldots + F(\lambda_k)$$

(avec $\bar{\varphi}_i \cap \bar{\varphi}_j = 0$ pour $i \neq j$).

Les éléments de A de la forme $\bar{\varphi}_1 \cup \ldots \cup \bar{\varphi}_k$ engendrent l'anneau de Boole $\mathfrak{B}_0$ du paragraphe (4.1); il en résulte que l'on a, d'aprés le théorème (4.1) l'égalité suivante entre espaces réticulés: $A = l_F(E) \oplus \mathfrak{R}$, ou les éléments de $\mathfrak{R}$ sont les éléments étrangers à $\mathfrak{B}_0$, donc tels que si $\varphi \in \prod_{i\in I} E_i$, $(f_i)_{i\in I} \in \mathfrak{R}$, on ait

$$\lim_{\mathscr{D}} \|f_i \cap 1_{\varphi_i}\|_F = 0.$$

Or (si $F(1) = 1$), $\|f_i \cap 1_{\varphi_i}\|_F = 1 \cap |f_i(\varphi_i)|$, d'où

$$\lim_{\mathscr{D}} 1 \cap |f_i(\varphi_i)| = 0.$$

Montrons alors que $(f_i)_{i\in I} \in \mathfrak{R} \Leftrightarrow \|f_i\|_\infty \xrightarrow{\mathscr{D}} 0$.

En effet si $\|f_i\|_\infty \to 0$, comme $1 \cap f_i(\varphi_i) \leqslant \|f_i\|_\infty$, $1 \cap |f_i(\varphi_i)| \to 0$ pour tout φ. Réciproquement si $\|f_i\| \nrightarrow 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $X = \{i \in I, \|f_i\| > \delta\} \in \mathscr{D}$. Pour tout $i \in X$, il existe donc $\varphi(i)$ tel que $f_i(\varphi_i) > \dfrac{\delta}{2}$ donc $1 \cap |f_i(\varphi_i)| > \dfrac{\delta}{2}$. De plus si $(f_i)_{i\in I}, (g_i)_{i\in I} \in A$, on a

$$\|(f_i)(g_i)\|_F = \lim \|f_i g_i\|_F = \lim \|f_i\|_F \|g_i\|_\infty$$

ce qui montre que si $(g_i)_{i\in I} \in \mathfrak{R}$, on a $(f_i)(g_i) = 0$. C.Q.F.D.

Donnons maintenant un résultat pour l^∞ qui suggère que l'hypothèse $F \in \Delta_2$ est superflue.

THÉORÈME 8.3. *Il existe une isométrie de $A = \prod_{i\in I} l^\infty(E_i)/\mathscr{D}$ dans $l^\infty(E)$.*

Démonstration. Soit $f = (f_i)_{i\in I} \in A$. Soit $(e_i)_{i\in I} \in E$. Considérons l'application $\hat{f}$, $E \to \boldsymbol{R}$, définie par

$$\hat{f}\big((e_i)_{i\in I}\big) = \lim_{\mathscr{D}} f_i(e_i).$$

Cette application $f \to \hat{f}$ de A dans $l^\infty(E)$ est clairement linéaire et isométrique car

$$\|\hat{f}\|_\infty = \sup_{\{(e_i)\in E\}} \lim_{\mathscr{D}} |f_i(e_i)| \quad \text{or} \quad |f_i(e_i)| \leqslant \|f_i\|_\infty,$$

donc $\lim_{\mathscr{D}} |f_i(e_i)| = \lim_{\mathscr{D}} \|f_i\|_\infty = \|f\|_\infty$ soit $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. Par ailleurs, soit ε une fonction $I \to \boldsymbol{R}_*^+$ telle que $\lim_{\mathscr{D}} \varepsilon(i) = 0$. Pour tout i il existe $e_i' \in E_i$ tel que $|f_i(e_i')| > \|f_i\|_\infty - \varepsilon(i)$ et donc $\|\hat{f}\|_\infty \geqslant \lim_{\mathscr{D}} (\|f_i\|_\infty - \varepsilon(i)) = \|f\|_\infty$. C.Q.F.D.

PROPOSITION 8.4. *Soit A' une sous-algèbre A de la forme de celles concernées par le thèoreme* (8.2) *et telle que $x \in A'$ et $x^2 = 0$ implique $x = 0$. Alors $A' \subset l_F(E)$.*

Démonstration. Soit $h \in A'$, $h = f+g$, $g \in \Re$, $f \in l_F(E)$ et $f = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n 1_{E_n}$ avec des λ_n distincts deux à deux, $\neq 0$, des E_n disjoints deux à deux. On a: $\Phi(f) = \sum_n F(\lambda_n)\overline{\overline{E}}_n$ (donc E_n est fini pour tout n). $1_{E_n} \in A'$: en effet, choisissons un polynome $P(x)$ sur $\boldsymbol{R}$, avec $P(\lambda_n) = 1$ et $P(\lambda_m) \leqslant \frac{1}{2}$ pour $m \neq n$. On a alors $\lim_{k\to\infty} [P(f)]^k = 1_{E_n}$. Mais $h^2 = f^2$ donc $h^k = f^k$ pour tout $k \geqslant 2$, donc $f^2 Q(f) \in A'$ pour tout polynome Q; A' étant fermé, $\lim_k f^2 P(f)^k = f^2 1_{E_n} \in A'$ donc $1_{E_n} \in A'$. Donc aussi $f \in A'$ et $g \in A'$. Or $g^2 = 0$ donc $g = 0$ et $h \in l_F(E)$.

PROPOSITION 8.5. *La condition pour une algèbre normée de se plonger dans une algèbre de type $l_F \oplus \Re$ (avec $fg = 0$ pour tout $f \in \Re$ et tout g) s'exprime par un ensemble de conditions de la forme de celles énoncées au théorème* (6.4).

THÉORÈME 8.6. *La condition pour une algèbre de Banach de se plonger isométriquement dans une algèbre $l_F(E)$ s'exprime par un ensemble de conditions du type de celles énoncées au théorème* (6.4) *plus la condition* $\forall x (x^2 = 0 \Rightarrow x = 0)$.

(8.5) et (8.6) résultent immédiatement des résultats du paragraphe 6 et de (8.2), (8.3), (8.4).

Remarque. Les sous-algèbres de $l_F(E)$ sont de la forme suivante: soit $E_i \ldots E_n \ldots$ des parties finies disjointes de E, alors

$$A' = \{\lambda_1 1_{E_1} + \ldots + \lambda_n 1_{E_n} + \ldots\} \quad \text{avec} \quad \sum_{l=1}^{\infty} F(|\lambda_i|)\overline{\overline{E}}_i < \infty.$$

Bibliographie

[1] J. Lindenstrauss et A. Pełczyński, *Absolutely summing operators in $\mathscr{L}_p$ spaces and their applications*, Studia Math. 29 (1968) p. 275–326.

[2] J. Bretagnolle, D. Dacunha-Castelle et J. L. Krivine, *Lois stables et espaces L^p*, Ann. Inst. H. Poincaré 2 (1966), p. 231–263.

[3] J. L. Krivine, Thèse, Paris.

[4] M. A. Krasnoselski et J. B. Ruticki, *Convex functions and Orlicz spaces*, Moscow 1958.

U. E. R. MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ PARIS

Received ~~February~~ 10, 1971 (296)