STUDIA MATHEMATICA T. XLI. (1972)

Устойчивость процесса ортогонализации и её применения

З. А. ЧАНТУРИЯ (Тбилиси)

Резюме. Работа состоит из двух частей. В первой части основными являются оценки отклонений в нормах гильбертова пространства и пространства $C(0,1)$ систем полученных от данных систем методом ортогонализаций Шмидта.

Во второй части полученные результаты применяются к задаче о порядке роста степеней ортогонального полиномиального базиса в пространствах $L(0,1)$ и $C(0,1)$ (аналогичная задача для $L_p(0,1)$ лишена интереса так как известно, что тригонометрическая система является базисом во всех $L_p(0,1)$ при $1 < p < \infty$). Доказано, что в обеих пространствах можно построить ортогональные полиномиальные базисы с порядком роста $n^{2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$ в тригонометрическом случае и $n^{3+\varepsilon}$ в случае алгебраическом.

Рассмотрим следующую задачу: пусть дана полная система $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве Гильберта H, и $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ система близкая в каком-либо смысле к системе $\{\chi_n\}$. Пусть $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ ортонормальные системы, полученные соответственно из $\{\chi_n\}$ и $\{\varphi_n\}$ методом треугольной ортогонализации Шмидта. Когда будут близки системы $\{\omega_n\}$ и $\{\psi_n\}$?

Для того, чтобы $\{\omega_n\}$ и $\{\psi_n\}$ были однозначно определены надо предположить, что $(\omega_n, \chi_n) > 0$ и $(\varphi_n, \psi_n) > 0$ для любого n. Мы всегда будем полагать, что это условие выполнено.

Следующая теорема показывает, что только малость норм $\|\chi_n - \varphi_n\|_H = \varrho_n$ недостаточна.

Теорема I. *Какова бы ни была последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно построить полную нормированную систему $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и нормированную систему $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ такую, что $\|\chi_n - \varphi_n\|_H = \varrho_n \leqslant \varepsilon_n < \sqrt{2}$ а*

$$\lim_{n\to\infty} \|\omega_n - \psi_n\|_H > 0.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно взять пространство l_2. Определим последовательности $\{\chi_n\}$ и $\{\varphi_n\}$ следующим образом

$$\chi_1 = (1, 0, 0, \ldots),$$

$$\chi_n = \Big(\sqrt{1 - \frac{\varepsilon_n^2}{2}}, 0, \ldots, 0, \underset{n}{\frac{\varepsilon_n}{\sqrt{2}}}, 0, \ldots\Big), \qquad n > 1$$

соответственно

$$\varphi_1=(1,0,0,\ldots),$$

$$\varphi_n=\Big(\sqrt{1-\frac{\varepsilon_n^2}{2}},0,\ldots,0,\underset{n+1}{\frac{\varepsilon_n}{\sqrt{2}}},0,\ldots\Big),\qquad n>1.$$

Очевидно, что

$$\|\chi_n-\varphi_n\|_{l_2}=\varepsilon_n,\qquad n>1.$$

Между тем

$$\omega_n=(0,\ldots,0,\underset{n}{1},0,\ldots),\qquad n>1,2,\ldots$$

и

$$\psi_1=(1,0,\ldots),\qquad \psi_n=(0,\ldots,0,\underset{n+1}{1},0,\ldots),\qquad n>1,$$

т.е.

$$\|\omega_n-\psi_n\|_{l_2}=\sqrt{2},\qquad n>1$$

теорема доказана.

Между тем, если система $\{\chi_n\}_{n=1}^\infty$ ортонормальная, то можно доказать

Теорема 2. *Пусть, система $\{\chi_n\}_{n=1}^\infty$ ортонормальная, а система $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет условию*

$$(1)\qquad \sum_{n=1}^\infty\|\chi_n-\varphi_n\|_H^2<\infty$$

тогда справедливо также

$$(2)\qquad \sum_{n=1}^\infty\|\chi_n-\psi_n\|^2<\infty.$$

Доказательство. Так как $\{\varphi_n\}$ удовлетворяет условию (1), то она базис Бари (см. [9], стр. 385) и сопряженная система $\{\overline{\varphi}_n\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет условию (см. [9], стр. 386)

$$\sum_{n=1}^\infty\|\chi_n-\overline{\varphi}_n\|^2<\infty.$$

Но тогда по Теореме 2 работы [14], получаем

$$(3)\qquad \sum_{n=1}^\infty\|\varphi_n-\psi_n\|^2<\infty.$$

Из (1) и (3) следует (2).

Рассмотрим теперь случай, когда $\{\chi_n\}_{n=1}^\infty$ не является ортогональной системой. Пусть $\varDelta_n$ и $\mathscr{D}_n$ $(n=1,2,\ldots)$ последовательность определителей Грамма соответственно систем $\{\chi_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$. Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть $\{\chi_n\}_{n=1}^\infty$ — полная нормированная система такая, что $\varDelta_n/\varDelta_{n-1}=1-\gamma_n>0$. А система $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет условию $\|\chi_n-\varphi_n\|=\varrho_n<1$ и $\mathscr{D}_n/\mathscr{D}_{n-1}=1-\beta_n>0$, тогда*

$$\|\omega_n-\psi_n\|_H=C_1(\sqrt{\varrho_n}+\sqrt{|\beta_n|}+\sqrt{\gamma_n})\ (^1)$$

и значит при $\gamma_n,\beta_n,\varrho_n\to 0$

$$\lim_{n\to\infty}\|\omega_n-\psi_n\|=0.$$

Доказательство. Так как $\{\omega_n\}$ получается из $\{\chi_n\}$ методом ортогонализации Шмидта, то

$$\chi_n=\sum_{i=1}^n\nu_{in}\omega_i,\qquad \nu_{nn}=\sqrt{\frac{\varDelta_n}{\varDelta_{n-1}}}.$$

Так как $\|\chi_n\|=1$, а $\{\omega_n\}$ — ортонормальна, то

$$\sum_{i=1}^n\nu_{in}^2=1$$

в силу того, что $\nu_{nn}^2=1-\gamma_n$, то отсюда получаем

$$\sum_{i=1}^{n-1}\nu_{in}^2=\gamma_n.$$

Используя последнее равенство будем иметь

$$(4)\qquad \|\chi_n-\omega_n\|=\Big\|\sum_{i=1}^{n-1}\nu_{in}\omega_i+(\nu_{nn}-1)\omega_n\Big\|=\Big[\sum_{i=1}^{n-1}\nu_{in}^2+(\nu_{nn}-1)^2\Big]^{\frac12}\leqslant\sqrt{2\gamma_n}.$$

Имеем аналогично

$$(5)\qquad \varphi_n=\sum_{i=1}^n\mu_{in}\psi_i,\qquad \mu_{nn}=\sqrt{\frac{\mathscr{D}_n}{\mathscr{D}_{n-1}}}.$$

Далее

$$\|\varphi_n\|^2=\sum_{i=1}^n\mu_{in}^2$$

---

(1) C_i — здесь и в дальнейшем обозначают абсолютные положительные постоянные.

но так как $\|\varphi_n-\chi_n\|=\varrho_n$, то

$$1-\varrho_n\leqslant\|\varphi_n\|\leqslant 1+\varrho_n$$

и значит

(6) $$(1-\varrho_n)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mu_{in}^2\leqslant(1+\varrho_n)^2.$$

Используя соотношение

$$\mu_{nn}^2=\frac{\mathcal{D}_n}{\mathcal{D}_{n-1}}=1-\beta_n$$

получим

(7) $$\sum_{i=1}^{n-1}\mu_{in}^2\leqslant(1+\varrho_n)^2-\mu_{nn}^2=2\varrho_n+\varrho_n^2+\beta_n.$$

Отсюда имеем

(8) $$\|\varphi_n-\psi_n\|=\Big[\sum_{i=1}^{n-1}\mu_{in}^2+(\mu_{nn}-1)^2\Big]^{\frac{1}{2}}\leqslant\sqrt{3\varrho_n}+\sqrt{2|\beta_n|}.$$

Используя (4) и (8) будем иметь

$$\|\omega_n-\psi_n\|\leqslant\|\omega_n-\chi_n\|+\|\chi_n-\varphi_n\|+\|\varphi_n-\psi_n\|\leqslant$$
$$\leqslant\sqrt{2\gamma_n}+\varrho_n+\sqrt{3\varrho_n}+\sqrt{2|\beta_n|}\leqslant C_1(\sqrt{\varrho_n}+\sqrt{|\beta_n|}+\sqrt{\gamma_n}),$$

теорема доказана.

В пространстве непрерывных функций $C(0,1)$ справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть $\{\chi_n\}_{n=1}^\infty$ — полная ортонормальная (в $L_2(0,1)$) система непрерывных функций, а система непрерывных функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет условиям*

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}\|\chi_n-\varphi_n\|_{L_2}<\infty,$$

(2) $$\frac{\mathcal{D}_n}{\mathcal{D}_{n-1}}=1-\beta_n>0\quad и\quad\sum_{n=1}^{\infty}|\beta_n|<\infty,$$

тогда справедливо соотношение

$$\|\chi_n-\psi_n\|_C\leqslant C_2\Big\{\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{\varrho_k+|\beta_k|}\sum_{i=1}^{k-1}\|\varphi_i\|_C+\|\varphi_k\|_C)^2\Big\}^{\frac{1}{2}}(\sqrt{\varrho_n}+\sqrt{|\beta_n|})+\|\chi_n-\varphi_n\|_C.$$

Доказательство. Из (5) получим применяя (8)

(9) $$\|\varphi_n-\psi_n\|_C=\Big\|\sum_{i=1}^{n-1}\mu_{in}\psi_i+(\mu_{nn}-1)\psi_n\Big\|_C\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{n-1}|\mu_{in}|\,\|\psi_i\|_C+|\mu_{nn}-1|\cdot\|\psi_n\|_C\leqslant$$
$$\leqslant\Big[\sum_{i=1}^{n-1}\mu_{in}^2+(\mu_{nn}-1)^2\Big]^{\frac{1}{2}}\cdot\Big[\sum_{i=1}^{n}\|\psi_i\|_C^2\Big]^{\frac{1}{2}}\leqslant$$
$$\leqslant(\sqrt{3\varrho_n}+\sqrt{2|\beta_n|})\Big[\sum_{i=1}^{n}\|\psi_i\|_C^2\Big]^{\frac{1}{2}}.$$

Оценим теперь $\|\psi_i\|_C$. Так как обратная к матрице

$$\begin{bmatrix}\mu_{11} & 0, & 0, & & \dots\\ \mu_{12} & \mu_{22} & 0 & & \dots\\ \mu_{13} & \mu_{23} & \mu_{33} & 0 & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\end{bmatrix}$$

имеет вид

$$\begin{bmatrix}\lambda_{11} & 0 & 0 & & \dots\\ \lambda_{12} & \lambda_{22} & 0 & & \dots\\ \lambda_{13} & \lambda_{23} & \lambda_{33} & 0 & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\end{bmatrix}$$

где

$$\lambda_{ij}=(-1)^{i+j}\begin{bmatrix}\mu_{i,i+1} & \mu_{i+1,i+1} & 0 & \dots & 0\\ \mu_{i,i+2} & \mu_{i+1,i+2} & \mu_{i+2,i+2} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mu_{ij} & \mu_{i+1,j} & \mu_{i+2,j} & \dots & \mu_{j-1,j}\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\mu_{ii}\dots\mu_{jj}},\qquad i<j$$

а $\lambda_{ii}=1/\mu_{ii}$, то в силу неравенства Адамара ([10], стр. 49), имеем

$$|\lambda_{ij}|\leqslant\prod_{r=i+1}^{j-1}\Big(\sum_{k=i}^{r}\mu_{k,r}^2)^{\frac{1}{2}}\cdot\Big(\sum_{k=i}^{j-1}\mu_{kj}^2\Big)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\mu_{ii}\dots\mu_{jj}}.$$

Используя неравенства (6) и (7), получим

(10) $$|\lambda_{ij}|\leqslant\prod_{k=i+1}^{j-1}(1+\varrho_k)\cdot\prod_{k=i}^{j}\frac{1}{\sqrt{1-\beta_k}}\cdot\sqrt{2\varrho_j+\beta_j+\varrho_j^2}.$$

Но так как

(11) $$\psi_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{in}\varphi_i$$

то применением неравенства (10) получаем

$$\|\psi_n\|_C \leqslant \sum_{i=1}^{n} |\lambda_{in}|\,\|\varphi_i\|_C \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{2\varrho_n+\beta_n+\varrho_n^2}\,\Big(\sum_{i=1}^{n-1}\prod_{k=i+1}^{n-1}(1+\varrho_k)\cdot\prod_{k=i}^{n}\frac{1}{\sqrt{1-\beta_k}}\cdot\|\varphi_n\|_C\Big)+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{1-\beta_n}}\cdot\|\varphi_i\|_C.$$

В силу того, что $\sum_{k=1}^{\infty}\varrho_k<\infty$ и $\sum_{k=1}^{\infty}|\beta_k|<\infty$, то

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1+\varrho_k)=\varrho<\infty \quad \text{и} \quad \prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1-\beta_k}}=\beta<\infty,$$

поэтому существует некоторая константа C_3 такая, что

$$\|\psi_n\|_C\leqslant C_3\Big(\sqrt{\varrho_n+|\beta_n|}\sum_{i=1}^{n-1}\|\varphi_i\|_C+\|\varphi_n\|_C\Big),\qquad n=1,2,\ldots$$

откуда

(12) $$\Big(\sum_{k=1}^{n}\|\psi_k\|_C^2\Big)^{1/2}\leqslant C_4\Big\{\sum_{k=1}^{n}\Big(\|\varphi_k\|_C+\sqrt{\varrho_k+|\beta_k|}\cdot\sum_{i=1}^{k-1}\|\varphi_i\|_C\Big)^2\Big\}^{1/2}.$$

Из (9) и (12) получим утверждение теоремы.

Теорема 5. *Пусть $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — полная ортонормальная система непрерывных функций, а система непрерывных функций $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям*

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\|\chi_n-\varphi_n\|_{L_2}}<\infty$,

(2) $\frac{\mathscr{D}_n}{\mathscr{D}_{n-1}}=1-\beta_n>0$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{|\beta_n|}<\infty$,

тогда справедливо соотношение

$$\|\chi_n-\psi_n\|_C\leqslant C_5(\sqrt{\varrho_n}+\sqrt{|\beta_n|})\Big\|\sum_{k=1}^{n}|\varphi_k(x)|\Big\|_C+\|\chi_n-\varphi_n\|_C.$$

Доказательство. Из (5) имеем

(13) $$\|\varphi_n-\psi_n\|_C=\Big\|\sum_{i=1}^{n-1}\mu_{in}\psi_i+(\mu_{nn}-1)\psi_n\Big\|_C\leqslant$$
$$\leqslant\Big\|\sum_{i=1}^{n-1}|\mu_{in}|\,|\psi_i(x)|+|\mu_{nn}-1|\,|\psi_n(x)|\Big\|_C\leqslant$$
$$\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n-1}\{|\mu_{in}|,|\mu_{nn}-1|\}\cdot\Big\|\sum_{i=1}^{n}|\psi_i(x)|\Big\|_C.$$

Из (7) вытекает, что при $1\leqslant i\leqslant n-1$

$$|\mu_{in}|\leqslant C_6(\sqrt{\varrho_n}+\sqrt{|\beta_n|})$$

а так как

$$|\mu_{nn}-1|=\Big|\sqrt{\frac{\mathscr{D}_n}{\mathscr{D}_{n-1}}}-1\Big|=|\sqrt{1-\beta_n}-1|<C_7|\beta_n|,$$

то получаем

(14) $$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{|\mu_{in}|,|\mu_{nn}-1|\}\leqslant C_8(\sqrt{\varrho_n}+\sqrt{|\beta_n|}).$$

Далее, используя (11) будем иметь

(15) $$\sum_{k=1}^{n}|\psi_k(x)|=\sum_{k=1}^{n}\Big|\sum_{i=1}^{k}\lambda_{ik}\varphi_i(x)\Big|\leqslant\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}|\lambda_{ki}|\,|\varphi_k(x)|,$$

но в силу условий теоремы из (10) вытекает, что

$$|\lambda_{ij}|\leqslant C_9\big(\sqrt{\varrho_j}+\sqrt{|\beta_i|}\big),\qquad i<j$$

откуда

$$\sum_{i=k}^{n}|\lambda_{ki}|\leqslant 1+C_9\sum_{i=k}^{n}(\sqrt{\varrho_i}+\sqrt{|\beta_i|})\leqslant C_{10}.$$

Из последнего неравенства и из (15) вытекает

(16) $$\sum_{k=1}^{n}|\psi_k(x)|\leqslant C_{10}\sum_{k=1}^{n}|\varphi_k(x)|.$$

Из (13) применением (14) и (16) следует

$$\|\varphi_n-\psi_n\|_C\leqslant C_5\left(\sqrt{\varrho_n}+\sqrt{|\beta_n|}\right)\cdot\Big\|\sum_{k=1}^{n}|\varphi_k(x)|\Big\|_C$$

а отсюда в силу неравенства

$$\|\chi_n-\psi_n\|_C\leqslant\|\chi_n-\varphi_n\|_C+\|\varphi_n-\psi_n\|_C$$

следует утверждение теоремы.

В теоремах 3, 4 и 5 мы пользовались определителями Грамма. Поэтому представляет интерес оценки определителей Грамма. Теорема 6 дает как-раз такую оценку снизу.

Теорема 6. *Пусть $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормальная полная система, а минимальная система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varrho_n^2<\infty,$$

где $\varrho_n=\|\chi_n-\varphi_n\|_H$. Далее, пусть $(\varphi_i,\chi_n)=\gamma_{in}+\delta_{in}$, $i,n=1,2,\ldots$, δ_{in} — символ Кронекера; тогда, если $\mathscr{D}_n$ — определитель Грамма n-ого порядка системы $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$, то

$$\frac{\mathscr{D}_n}{\mathscr{D}_{n-1}}\geqslant 1-\Big(2\varrho_n+C_{11}\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_{in}^2\Big).$$

Доказательство. Так как $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|\chi_n-\varphi_n\|^2<\infty$$

то она является базисом Бари и тем более базисом Рисса ([9], стр. 385) и значит имеет сопряженную систему $\{\bar\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$(\varphi_i,\bar\varphi_n)=\delta_{in}.$$

Далее, так как $(\varphi_i,\chi_n)=\gamma_{in}+\delta_{in}$ то $(\varphi_i,\chi_n-\bar\varphi_n)=\gamma_{in}$.

Так как $\{\varphi_i\}$ базис Рисса, то существует такая константа C_{12}, что (см. [9], стр. 375)

$$\|\chi_n-\bar\varphi_n\|^2\leqslant C_{12}\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_{in}^2.$$

Из равенства

$$\|\varphi_n-\bar\varphi_n\|^2=(\varphi_n-\bar\varphi_n,\varphi_n-\bar\varphi_n)=\|\varphi_n\|^2+\|\bar\varphi_n\|^2-2$$

получаем

$$\|\bar\varphi_n\|^2=2-\|\varphi_n\|^2+\|\varphi_n-\bar\varphi_n\|^2. \tag{17}$$

Далее

$$\|\varphi_n\|^2=\|\varphi_n-\chi_n+\chi_n\|^2= \tag{18}$$
$$=\|\chi_n\|^2+\|\varphi_n-\chi_n\|^2+2(\varphi_n-\chi_n,\chi_n)\geqslant 1-2\varrho_n+\varrho_n^2.$$

Имеем также

$$\|\varphi_n-\bar\varphi_n\|^2=\|\varphi_n-\chi_n+\chi_n-\bar\varphi_n\|^2\leqslant(\|\varphi_n-\chi_n\|+\|\chi_n-\bar\varphi_n\|)^2\leqslant \tag{19}$$
$$\leqslant 2\|\varphi_n-\chi_n\|^2+2\|\chi_n-\bar\varphi\|^2.$$

Если теперь использовать (18) и (19) из (17) получим

$$\|\bar\varphi_n\|^2\leqslant 1+2\varrho_n+\varrho_n^2+2\|\chi_n-\bar\varphi_n\|^2\leqslant 1+2\varrho_n+\varrho_n^2+2C_{12}\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_{in}^2. \tag{20}$$

Но так как (см. [9], стр. 388)

$$\frac{\mathscr{D}_n}{\mathscr{D}_{n-1}}\geqslant\|\bar\varphi_n\|^{-2}$$

то из (20) получим

$$\frac{\mathscr{D}_n}{\mathscr{D}_{n-1}}\geqslant 1-\Big(2\varrho_n+C_{11}\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_{in}^2\Big).$$

Теорема доказана. Как следствие Теорем 3 и 6 получаем

Теорема 7. *Если $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют условиям Теоремы 6, то*

$$\|\chi_n-\psi_n\|_H\leqslant C_{13}\sqrt{\varrho_n}+C_{14}\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_{in}^2}.$$

Доказательство. В силу Теоремы 6 и неравенства (6)

$$1-\Big(2\varrho_n+C_{11}\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_{in}^2\Big)\leqslant\frac{\mathscr{D}_n}{\mathscr{D}_{n-1}}=1-\beta_n=\mu_{nn}^2\leqslant(1+\varrho_n)^2$$

откуда

$$|\beta_n|\leqslant 3\varrho_n+C_{11}\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_{in}^2.$$

В силу Теоремы 3 отсюда следует утверждение Теоремы 7. Из Теорем 5 и 7 также получим

Теорема 8. *Если системы $\{\chi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют условиям Теоремы* 5, *то справедливо соотношение*

$$\|\chi_n-\psi_n\|_C \leqslant C_{15}\left(\sqrt{\varrho_n}+\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_{in}^2}\right)\cdot\left\|\sum_{k=1}^{n}|\varphi_k(x)|\right\|_C+\|\chi_n-\varphi_n\|_C.$$

Применим теперь полученные результаты к задаче о порядке роста степеней ортогонального полиномиального базиса в пространствах $C(0,1)$ и $L(0,1)$. Существование таких базисов в $C(0,1)$ (и значит в $L(0,1)$) впервые было доказано К. М. Шайдуковым ([16], см. также [13]). А задача эта была поставлена П. Л. Ульяновым в [17] (см. также [18], [8], [4], [5]). Мы рассматриваем как алгебраический, так и тригонометрический случаи.

В пространстве суммируемых функций $L(0,1)$ справедлива

Теорема 9. *Для любого $\varepsilon>0$ в пространстве $L(0,1)$ можно построить ортонормированный полиномиальный (тригонометрический) базис $\{\tilde{T_n}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ такой, что степень полинома $\{\tilde{T_n}(x)$ не больше, чем $n^{2+\varepsilon}$ при $n>n_0(\varepsilon)$.*

Доказательство. Возьмем ортонормированную систему Франклина $\{\Phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ ([3], стр. 142). Как известно, она образует базис пространства $C(0,1)$ и значит $L(0,1)$.

Пусть $n=2^S+k+1\geqslant 2$, $S=0,1,2,\ldots$, $k=0,1,\ldots,2^S-1$. Тогда $\Phi_n(x)$ линейна на интервалах $\left(\frac{r}{2^{S+1}},\frac{r+1}{2^{S+1}}\right)$, $r=0,1,\ldots,2^{S+1}-1$. Обозначим через $\overline{\Phi}'_n(x)$ функцию равную $\Phi'_n(x)$ в тех точках, где эта последняя существует и равную 0, где $\Phi'_n(x)$ не существует. Ясно, что $E\{x;\Phi'_n(x)$ существует$\}\supset\bigcup_{r=0}^{2^{S+1}-1}\left(\frac{r}{2^{S+1}},\frac{r+1}{2^{S+1}}\right)$. Тогда в силу кусочно-линейности функции $\Phi_n(x)$ и оценки ([3], стр. 148)

$$\|\Phi_n(x)\|_C\leqslant C_{16}\sqrt{2^S}$$

имеем

$$\max_{0\leqslant x\leqslant 1}|\overline{\Phi}'_n(x)|\leqslant C_{18}\cdot 2^S\sqrt{2^S}. \tag{21}$$

Функция $\overline{\Phi}'_n(x)$ постоянна в интервалах $I_r=\left(\frac{r}{2^{S+1}},\frac{r+1}{2^{S+1}}\right)$ $r=0,1,\ldots,2^{S+1}-1$. Обозначим ее значение в интервале I_r через $a_r^{(n)}$.

Далее, используя неравенство ([3], стр. 148)

$$\operatorname*{Var}_{[0,1]}\Phi_n\leqslant\frac{7}{4}\operatorname*{Var}_{\left[\frac{k}{2^S},\frac{k+1}{2^S}\right]}\Phi_n$$

будем иметь

$$\operatorname*{Var}_{[0,1]}\Phi_n=\sum_{r=0}^{2^{S+1}-1}\left|\Phi_n\left(\frac{r+1}{2^{S+1}}\right)-\Phi_n\left(\frac{r}{2^{S+1}}\right)\right|=\sum_{r=0}^{2^{S+1}-1}|a_r^{(n)}|\cdot\frac{1}{2^{S+1}}\leqslant\frac{7}{4}\operatorname*{Var}_{\left[\frac{k}{2^S},\frac{k+1}{2^S}\right]}\Phi_n=$$
$$=\frac{7}{4}\left(\left|\Phi_n\left(\frac{2k+1}{2^{S+1}}\right)-\Phi_n\left(\frac{k}{2^S}\right)\right|+\left|\Phi_n\left(\frac{k+1}{2^S}\right)-\Phi_n\left(\frac{2k+1}{2^{S+1}}\right)\right|\right)=$$
$$=\frac{7}{4}(|a_{2k}^{(n)}|+|a_{2k+1}^{(n)}|)\cdot\frac{1}{2^{S+1}}$$

откуда

$$\sum_{r=0}^{2^{S+1}-1}|a_r^{(n)}|\leqslant\frac{7}{4}(|a_{2k}^{(n)}|+|a_{2k+1}^{(n)}|). \tag{22}$$

Имеем далее применяя (21) и (22)

$$\operatorname{Var}\overline{\Phi}'_n(x)= \tag{23}$$
$$=\sum_{r=1}^{2^{S+1}-1}\left|\Phi'_n\left(\frac{r}{2^{S+1}}+0\right)-\Phi'_n\left(\frac{r}{2^{S+1}}-0\right)\right|+|\Phi'_n(0+0)-\overline{\Phi}'_n(0)|+$$
$$+|\Phi'_n(1)-\Phi'_n(1-0)|\leqslant\sum_{r=1}^{2^{S+1}-1}|a_r^{(n)}-a_{r-1}^{(n)}|+4\cdot C_{18}\cdot 2^S\sqrt{2^S}\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{r=1}^{2^{S+1}-1}|a_r^{(n)}|+\sum_{r=1}^{2^{S+1}-1}|a_{r-1}^{(n)}|+4\cdot C_{18}\cdot 2^S\sqrt{2^S}\leqslant\frac{7}{2}(|a_{2k}^{(n)}|+|a_{2k+1}^{(n)}|)+$$
$$+4\cdot C_{18}2^S\sqrt{2^S}\leqslant C_{19}\cdot 2^S\sqrt{2^S}.$$

Теперь, так как коэффициенты Фурье функции ограниченной вариации удовлетворяют неравенству ([2], стр. 81)

$$|a_m(f)|\leqslant\frac{\operatorname{Var}f}{2m}$$

то применяя (23) получим

$$|C_m^{(n)}|=\left|\int_0^1\Phi_n(t)\cos\pi mt\,dt\right|=\left|\frac{1}{\pi m}\int_0^1\overline{\Phi}'_n(t)\sin\pi mt\,dt\right|\leqslant C_{20}\frac{2^{3S/2}}{m^2}. \tag{24}$$

Пусть теперь $T_n(x)$ частная сумма ряда Фурье функции $\Phi_n(x)$, в разложении по системе $\{\cos\pi mx\}_{m=0}^{\infty}$

$$T_n(x)=\sum_{m=0}^{\nu_n}2(\Phi_n,\cos\pi mx)\cdot\cos\pi mx. \tag{25}$$

Используя оценку (24) будем иметь

$$\|\Phi_n - T_n\|_{L_2} = 2\cdot\left\{\sum_{m=\nu_n+1}^{\infty} |C_m^{(n)}|^2\right\}^{1/2} \leqslant C_{21}\cdot\frac{2^{3S/2}}{\nu_n^{3/2}} \leqslant C_{21}\frac{n^{3/2}}{n^{3/2}}. \tag{26}$$

Оценим теперь числа

$$\gamma_{in} = (T_i, \Phi_n) - \delta_{in} = (T_i - \Phi_i, \Phi_n).$$

Имеем в силу (26)

$$|\gamma_{in}| \leqslant \|T_i - \Phi_i\|_{L_2} \leqslant C_{21}\frac{i^{3/2}}{\nu_i^{3/2}}. \tag{27}$$

Далее, так как ([3], стр. 155)

$$|(T_i, \Phi_n)| \leqslant \frac{C_{22}}{\sqrt{n}}\,\omega\left(\frac{1}{n}, T_i\right) \leqslant \frac{C_{22}\|T_i'\|_C}{n\sqrt{n}},$$

где $\omega(\delta, f)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$, а в силу (24)

$$\|T_i'(x)\|_C = \left\|\pi\sum_{m=1}^{\nu_i} C_m^{(i)}\cdot m\cdot\sin\pi m x\right\| \leqslant C_{23}\, i^{3/2}\sum_{m=1}^{\nu_i}\frac{1}{m} \leqslant C_{24}\, i^{3/2}\cdot\ln\nu_i$$

то

$$|(T_i, \Phi_n)| \leqslant C_{25}\frac{i^{3/2}\ln\nu_i}{n\sqrt{n}}. \tag{28}$$

Возьмем теперь $\alpha = 2+\varepsilon$,

$$\nu_n = \begin{cases} \nu_2 \overline{\overline{S}}_0 & \text{при } n < 2^{S_0}, \\ [n^\alpha] & \text{при } n \geqslant 2^{S_0}, \end{cases} \tag{29}$$

$N = [n^{1/\alpha}(\ln n)^{-2/3\alpha}]$ ($[a]$ — целая часть числа a), $\overline{\overline{S}}_0 > 1$ подберем позже.

Оценим сумму

$$\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_{in}^2 = \sum_{i=0}^{N}\gamma_{in}^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty}\gamma_{in}^2.$$

В первой сумме применим оценки (28), а во второй (27), будем иметь

$$\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_{in}^2 \leqslant C_{25}\sum_{i=0}^{N}\frac{i^3\ln^2\nu_i}{n^3} + C_{21}\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{i^3}{\nu_i^3} \leqslant \tag{30}$$

$$\leqslant C_{26}\left(\frac{N^4\ln^2 N}{n^3} + \frac{1}{N^{3\alpha-4}}\right) \leqslant C_{26}\frac{\ln^2 n}{n^{3-4/\alpha}}.$$

Пусть теперь $\{\tilde{T}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — ортонормальная система тригонометрических полиномов полученная из системы $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ методом ортогонализации Шмидта.

Так как в силу (26) и (29)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|\Phi_n - T_n\|_{L_2}^2 < \infty$$

то можно применить Теорему 7 и использовав также оценку (30 будем иметь при $n > 2^{S_0}$

$$\|\Phi_n - \tilde{T}_n\|_L \leqslant \|\Phi_n - T_n\|_{L_2} \leqslant C_{27}\cdot\frac{\ln n}{n^{3/2-2/\alpha}} \tag{31}$$

а при $n \leqslant 2^{S_0}$ получится

$$\|\Phi_n - \tilde{T}_n\|_L \leqslant C_{28}\cdot\frac{1}{2^{S_0(1+\varepsilon)}}. \tag{32}$$

Теперь используя неравенство ([3], стр. 153)

$$\left\|\sum_{i=2^S+1}^{2^{S+1}}|\Phi_i(x)|\right\|_C \leqslant C_{29}\cdot\sqrt{2^S}$$

получим для $f(t)\in L(0,1)$

$$\sum_{i=2^S+1}^{2^{S+1}}|(f, \Phi_i)| \leqslant \sum_{i=2^S+1}^{2^{S+1}}\int_0^1|f(t)|\cdot|\Phi_i(t)|\,dt \leqslant \left\|\sum_{i=2^S+1}^{2^{S+1}}|\Phi_i(t)|\right\|_C\cdot\|f\|_L \leqslant \tag{33}$$

$$\leqslant C_{29}\cdot\sqrt{2^S}\|f\|_L = C_{29}\cdot\sqrt{2^S}\left\|\sum_{i=0}^{\infty}(f, \Phi_i)\Phi_i\right\|_L.$$

Пусть $\{a_n\}$ произвольная конечная совокупность действительных чисел; тогда применяя (32), (31) и (33) будем иметь

$$\left\|\sum_n a_n(\Phi_n - \tilde{T}_n)\right\|_L \leqslant \sum_{S=0}^{S_0-1}\sum_{n=2^S+1}^{2^{S+1}}|a_n|\cdot\|\Phi_n - \tilde{T}_n\|_L + \sum_{S>S_0-1}\sum_{n=2^S+1}^{2^{S+1}}|a_n|\,\|\Phi_n - \tilde{T}_n\|_L \leqslant$$

$$\leqslant C_{30}\left\{\sum_{S=0}^{S_0-1}\frac{1}{2^{S_0(1+\varepsilon)}}\sum_{n=2^S+1}^{2^{S+1}}|a_n| + \sum_{S\geqslant S_0}\frac{S}{2^{S(3/2-2/\alpha)}}\cdot\sum_{n=2^S+1}^{2^{S+1}}|a_n|\right\} \leqslant$$

$$\leqslant C_{31}\cdot\left\|\sum_n a_n\Phi_n\right\|_L\cdot\left\{\frac{\sum_{S=0}^{S_0-1}\sqrt{2^S}}{2^{S_0(1+\varepsilon)}} + \sum_{S\geqslant S_0}\frac{S}{2^{S\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)}}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant C_{32}\left(\frac{1}{2^{S_0(\frac{1}{2}+\varepsilon)}} + \sum_{S\geqslant S_0}\frac{S}{2^{\frac{S\varepsilon}{\alpha}}}\right)\cdot\left\|\sum_n a_n\Phi_n\right\|_L.$$

Подбирая S_0 так, чтобы

$$(34)\qquad C_{32}\left(\frac{1}{2^{S_0(\frac{1}{3}+\varepsilon)}}+\sum_{S>S_0}\frac{S}{2^{S\varepsilon/\alpha}}\right)<\theta<1$$

получим неравенство

$$\Big\|\sum_n a_n(\Phi_n-T_n^{\sim})\Big\|_L\leqslant\theta\Big\|\sum_n a_n\Phi_n\Big\|_L$$

из которого, в силу теоремы Бабенко [1], следует, что система $\{T_n^{\sim}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ базис пространства $L(0,1)$, причем степень полинома $T_n(x)$ не превосходит $n^{2+\varepsilon}$ при $n>n_0(\varepsilon)=2^{S_0}$. Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства можно усмотреть, что можно построить ортогональный полиномиальный базис с порядком роста $\nu_n\sim n^2(\ln n)^{8/3+\varepsilon}$, $\varepsilon>0$.

Мы теперь докажем, что если в построенной в Теореме 9 системе $\{T_n^{\sim}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ заменить лишь конечное число функций, то получим базис пространства $C(0,1)$.

Покажем сперва, что система (25) при условии

$$\nu_n=\begin{cases}\nu_{2^{S_0}}, & n<2^{S_1},\\ [n^{2+\varepsilon}], & n\geqslant 2^{S_1}\end{cases}$$

является базисом пространства $C(0,1)$.
В силу (24) имеем

$$\|\Phi_n(x)-T_n(x)\|_C=\Big\|\sum_{m=\nu_n+1}^{\infty}2C_m^{(n)}\cos\pi mx\Big\|\leqslant C_{20}\frac{2^{3S/2}}{\nu_n}.$$

Применяя полученное неравенство и неравенство ([3], стр. 155)

$$|(f,\Phi_n)|\leqslant\frac{C_{33}}{\sqrt{2^S}}\|f\|_C$$

получим для произвольной конечной числовой последовательности $\{a_n\}$

$$\Big\|\sum_n a_n(\Phi_n-T_n)\Big\|_C\leqslant\sum_n|a_n|\cdot\|\Phi_n-T_n\|_C\leqslant$$

$$\leqslant C_{34}\left(\sum_{n=0}^{2^{S_1}}\frac{n}{\nu_{2^{S_1}}}+\sum_{n>2^{S_1}}\frac{1}{n^{1+\varepsilon}}\right)\cdot\Big\|\sum_n a_n\Phi_n\Big\|_C\leqslant C_{35}\frac{1}{2^{S_1\varepsilon}}\cdot\Big\|\sum_n a_n\Phi_n\Big\|_C$$

выбирая S_1 так, чтобы было

$$\frac{C_{35}}{2^{S_1\varepsilon}}<\theta<1$$

получим

$$\Big\|\sum_n a_n(\Phi_n-T_n)\Big\|_C<\theta\Big\|\sum_n a_n\Phi_n\Big\|_C$$

т.е. система $\{T_n\}$ базис пространства $C(0,1)$ и значит она замкнута в $C(0,1)$ и тогда система $\{T_n^{\sim}(x)\}$ также будет замкнута в пространстве $C(0,1)$.

Возьмем теперь $S_2=\max\{S_0,S_1\}$

$$\nu_n=\begin{cases}\nu_{2^{S_2}} & \text{при } n<2^{S_2},\\ [n^{2+\varepsilon}] & \text{при } n\geqslant 2^{S_2},\end{cases}$$

тогда полиномы (25) образуют базис пространства $C(0,1)$ и значит полиномы $\{T_n^{\sim}(x)\}$ полученные из $\{T_n(x)\}$ методом ортогонализации Шмидта замкнуты в пространстве $C(0,1)$, а в силу Теоремы 9, система $\{T_n^{\sim}(x)\}$ базис пространства $L(0,1)$. Но известно, что ортонормальная система замкнутая в $C(0,1)$, которая образует базис пространства $L(0,1)$, образует также базис и в пространстве $C(0,1)$. Итак, система $\{T_n^{\sim}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является базисом пространства непрерывных функций, т.е. доказана

Теорема 10. *Для любого $\varepsilon>0$ в пространстве $C(0,1)$ можно построить ортогональный полиномиальный (тригонометрический) базис $\{T_n^{\sim}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ такой, что степень полинома $T_n^{\sim}(x)$ не больше, чем $n^{2+\varepsilon}$ при $n>n_0(\varepsilon)$.*

Докажем теперь аналогичные теоремы для алгебраического случая.

Теорема 11. *Для любого $\varepsilon>0$ в пространстве $L(0,1)$ можно построить ортонормированный полиномиальный (алгебраический) базис $\{P_n^{\sim}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ такой, что степень полинома $P_n^{\sim}(x)$ не больше чем $n^{3+\varepsilon}$ при $n>n_0(\varepsilon)$.*

Доказательство. Возьмем опять систему Франклина $\{\Phi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ и наряду с функцией $\Phi_n(x)$ рассмотрим функцию

$$\Psi_n(x)=\Phi_n\left(\frac{1+\cos\pi x}{2}\right).$$

Пусть

$$T_n(x)=\sum_{m=0}^{\nu_n}2(\Psi_n,\cos\pi mx)\cdot\cos\pi mx$$

тогда $P_n(x)=T_n\left(\frac{1}{\pi}\arccos(2x-1)\right)$ алгебраический полином степени не выше ν_n.

Легко видеть, что оценка (23) сохраняется и для $\overline{\Psi}_n'(x)$ и тогда справедливы аналогичные (24) и (26) оценки; тогда

$$\|\Phi_n - P_n\|_{L_2} = \left\{\frac{\pi}{2}\int_0^1 \left[\Phi_n\left(\frac{1+\cos\pi t}{2}\right) - T_n(t)\right]^2 \sin\pi t\,dt\right\}^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,\|\Psi_n - T_n\|_{L_2} \leqslant C_{36}\frac{n^{3/2}}{\nu_n^{3/2}}.$$

Оценивая теперь числа

$$\gamma_{in} = (P_i, \Phi_n) - \delta_{in} = (P_i - \Phi_i, \Phi_n)$$

получим

(35) $$|\gamma_{in}| \leqslant \|P_i - \Phi_i\|_{L_2} \leqslant C_{36}\cdot\frac{i^{3/2}}{\nu_i^{3/2}}.$$

Покажем теперь, что

(36) $$\|P_i'(x)\|_C \leqslant C_{37}\cdot\nu_i\cdot i^{3/2}.$$

Действительно

(37) $$P_i'(x) = -T_i'\left(\frac{1}{\pi}\arccos(2x-1)\right)\cdot\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-x^2}} = -T_n'(t)\cdot\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\sin\pi t},$$

где $t = \frac{1}{\pi}\arccos(2x-1)$.

Пусть $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$. Тогда имеем $(0 < \theta_t < 1)$

$$|T_i'(t)| = |T_i'(t) - T_i'(0)| = |T''(\theta_t\cdot t)|\cdot t =$$
$$= \left|\sum_{m=1}^{\nu_i} 2\cdot(\Psi_i, \cos\pi m x)\cdot m^2\cdot\cos\pi m\theta_t\cdot t\right|\cdot t \leqslant C_{38}\cdot i^{3/2}\cdot\nu_i\cdot t.$$

Откуда с использованием (37) получается

$$\max_{\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1} |P_i'(x)| \leqslant C_{39}\, i^{3/2}\cdot\nu_i.$$

Также получается, что аналогичная оценка справедлива для $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$ т.е. $\frac{1}{2} < t \leqslant 1$ и тем самым (36) доказана. Далее надо следовать как при доказательстве Теоремы 9. Из (36) получим

(38) $$(P_i, \Phi_n) \leqslant C_{40}\frac{i^{3/2}\nu_i}{n\sqrt{n}}.$$

Возьмем теперь $\alpha = 3 + \varepsilon$.

$$\nu_n = \begin{cases} \nu_{2^{S_0}} & \text{при } n < 2^{S_0}, \\ [n^\alpha] & \text{при } n \geqslant 2^{S_0}, \end{cases}$$

$N = [n^{3/5\alpha}]$, а $S_0 > 1$ подберем позже. Если теперь для $i \leqslant N$ использовать оценку (38), а для $i > N$ оценку (35) получим

(39) $$\sum_{i=0}^{\infty}\gamma_{in}^2 \leqslant C_{40}\sum_{i=0}^{N}\frac{i^3\nu_i^2}{n^3} + C_{36}\cdot\sum_{i=N+1}^{\infty}\frac{i^3}{\nu_i^3} \leqslant C_{41}\cdot\frac{1}{n^{\frac{9}{5}-\frac{12}{5\alpha}}}.$$

Пусть теперь $\{P_n^{\sim}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ — ортонормальная система алгебраических полиномов полученная из системы $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ методом ортогонализации Шмидта. Как и в Теореме 9 получим для $n > 2^{S_0}$

(40) $$\|\Phi_n - P_n^{\sim}\|_L \leqslant C_{42}\cdot\frac{1}{n^{9/10-6/5\alpha}}$$

а при $n \leqslant 2^{S_0}$ получим

(41) $$\|\Phi_n - P_n^{\sim}\|_L \leqslant C_{43}\cdot\frac{1}{2^{2S_0}}.$$

Используя оценки (33), (40) и (41), для произвольной конечной совокупности чисел $\{a_n\}$, получим как и в Теореме 9

$$\left\|\sum a_n(\Phi_n - P_n^{\sim})\right\|_L \leqslant C_{44}\left(\frac{1}{2^{3/2 S_0}} + \sum_{S\geqslant S_0}\frac{1}{2^{2\varepsilon/5\alpha}}\right)\cdot\left\|\sum_n a_n\Phi_n\right\|_L.$$

Подбирая S_0 так, чтобы

$$C_{44}\left(2^{-\frac{3}{2}S_0} + \sum_{S\geqslant S_0}2^{-2\varepsilon/5\alpha}\right) < \theta < 1$$

получим неравенство

$$\left\|\sum_n a_n(\Phi_n - P_n^{\sim})\right\|_L < \theta\left\|\sum_n a_n\Phi_n\right\|_L$$

из которого в силу теоремы Бабенко следует, что система $\{P_n^{\sim}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ базис пространства $L(0,1)$, причем при $n \geqslant 2^{S_0}$ степень полинома $P_n^{\sim}(x)$ не превосходит $n^{3+\varepsilon}$.

Также как Теорема 10 доказывается

Теорема 12. *Для любого $\varepsilon > 0$ в пространстве $C(0,1)$ можно построить ортонормированый полиномиальный (алгебраический) базис $\{P_n^{\sim}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ такой, что степень полинома $P_n(x)$ не больше, чем $n^{3+\varepsilon}$ при $n > n_0(\varepsilon)$.*

Литература

[1] К. И. Бабенко, *О базисах в гильбертовом пространстве*, Докл. АН СССР, 57, № 5 (1947), стр. 427–430.

[2] Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды*, Москва 1961.

[3] Z. Ciesielski, *Properties of orthonormal Franklin system*, Studia Math. 23 (1963), стр. 141–157.

[4] З. А. Чантурия, *О базисах пространства непрерывных функций*, Докл. АН СССР, 187, № 2 (1969), стр. 284–286.

[5] — *Об одном обобщении теоремы Г. Фабера о полиномиальных базисах*, Матем. заметки, 2, № 2 (1967), стр. 187–190.

[6] — *Об ортогональных полиномиальных базисах*, Сообщения АН Грузинской ССР, 60, № 1 (1970), стр. 15–16.

[7] — *Об устойчивости процесса ортогонализации*, Тбилиси, Семинар ин-та прикладной математики, аннотации докладов, IV (1971), стр. 19–21.

[8] C. Foiaş, I. Singer, *Some remarks on strongly linearly independent sequences and bases in Banach spaces*, Revue de Math. pures et apll. VI, N. 3 (1961), стр. 589–594.

[9] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов*, Москва 1965.

[10] Г. Харди, Дж. Литтльвуд, Г. Полиа, *Неравенства*, Москва 1948.

[11] С. Качмаж, Г. Штейнгауз, *Теория ортогональных рядов*, Москва 1958.

[12] М. Г. Крейн, *О базисах Бари пространства Гильберта*, Успехи математ. наук, 12, № 3 (1957), стр. 333–341.

[13] А. М. Олевский, *Об устойчивости оператора ортогонализации Шмидта*, Изв. АН СССР, сер. матем. 34, № 3 (1970), стр. 803–826.

[14] В. А. Пригорский, *О некоторых классах базисов гильбертова пространства*, Успехи матем. наук, 20, № 5 (1965), стр. 231–236.

[15] I. Schauder, *Eine Eigenschaft der Haarschen Orthogonalsystems* Math. Zeitschr. 28 (1928), стр. 317–320.

[16] К. М. Шайдуков, *О существовании ортонормированного базиса в классе полиномов*, Науч. труды Казанского ин-та инж. строит. нефт. пром. 5 (1957), 119–151.

[17] П. Л. Ульянов, *О некоторых решенных и нерешенных проблемах теории ортогональных рядов*, Тр. IV Всесоюзного матем. съезда т. II, Ленинград (1964), стр. 694–704.

[18] — *Решенные и нерешенные проблемы теории тригонометрических и ортогональных рядов*, Успехи матем. наук, 19, № 1 (1964), стр. 3–69.

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
ТБИЛИССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Received November 19, 1970 (271)

STUDIA MATHEMATICA T. XLI. (1972)

A theorem on B-splines

by

J. DOMSTA (Sopot)

Abstract. In this paper we investigate a special family of partitions of unity on $I = \langle 0, 1\rangle$. Each partition of unity is formed by B-splines of order m, $m \geqslant 0$, corresponding to a given dyadic partition of I. The partitions of unity are linearly independent sets of functions and therefore their Gram matrices are invertible. The aim of this work is to give exponential estimates of elements of the inverse matrices. This result plays the central role in the construction of bases in $C^m(I^d)$ and $W_p^m(I^d)$, [3].

1. Introduction. In this paper we investigate a special sequence of partitions of unity on $I = \langle 0, 1\rangle$. The nth partition of unity is the (linearly independent) set of B-splines of order m corresponding to the nth dyadic partition of I for $n \in \mathcal{N} = \{1, 2, \ldots\}$. Thus the Gram matrix $\boldsymbol{G}_n^{(m)}$ of the nth partition of unity is non-singular and therefore is invertible. Let $\boldsymbol{A}_n^{(m)}$ denote the matrix inverse to $\boldsymbol{G}_n^{(m)}$.

The $(n+m+1)$-dimensional space spanned by elements of the nth spline partition of unity is denoted by $\mathscr{S}_n^m(I)$ for $n \in \mathcal{N}$.

Let us further denote by $\mathscr{S}_n^m(I)$, $n = -m, \ldots, 0$, the subspace spanned by the functions $1, t, \ldots, t^{n+m}$. Applying the Schmidt orthonormalization procedure to the sequence of functions $\{h_n^{(m)}\}$, defined as follows: $h_n^{(m)} \in \mathscr{S}_n^m(I) \setminus \mathscr{S}_{n-1}^m(I)$ for $n \geqslant -m+1$ and $h_{-m}^{(m)} = 1$, we obtain an orthonormal complete in $L_2(I)$ set $\{f_n^{(m)}\colon n \geqslant -m\}$. The exponential estimate of the elements of $\boldsymbol{A}_n^{(m)}$ established in Theorem 1 (cf. Section 3) can be used to obtain exponential bounds for the Dirichlet kernel of the orthonormal set $\{f_n^{(m)}\}$. By means of this argument it was shown in [3] that the d-fold tensor product of $\{f_n^{(m)}\}$ is an orthogonal basis in $C^m(I^d)$ and $W_p^m(I^d)$ for $d \geqslant 1, m \geqslant 0, 1 \leqslant p < \infty$.

Theorem 1 was conjectured by Ciesielski and the result was announced at the Conference on Constructive Function Theory in Varna, May 1970 [1].

2. The B-splines. Let $S = \{s_i\colon i \in \mathscr{Z}\}$, where $\mathscr{Z} = \{0, \pm 1, \ldots\}$, be a partition of $(-\infty, \infty)$, i.e. let $s_{i+1} > s_i$ for $i \in \mathscr{Z}$ and $\lim\limits_{i\to\infty} s_i = -\lim\limits_{i\to\infty} s_{-i} = \infty$.

DEFINITION 1. The function $f \in C^m(-\infty, \infty)$ is said to be a *spline* (*-function*) of order m corresponding to S, whenever all the restrictions