[5] S. Mazur and W. Orlicz, *Sur les methodes lineaires de sommation*, C. R. Acad. Sci. Paris 196 (1933), pp. 32–34.
[6] — *On linear methods of summability*, Studia Math. 14 (1954), pp. 129–160.
[7] K. Zeller, *Faktorfolgen bei Limitierungsverfahren*, Math. Zeit. 56 (1952), pp. 134–151.

TEL AVIV UNIVERSITY
THE WEIZMANN INSTITUTE OF SCIENCE

Received October 5, 1970 (269)

STUDIA MATHEMATICA T. XLI. (1972)

Approximation von Elementen eines lokalkonvexen Raumes

von

EBERHARD SCHOCK (Bonn)

Zusammenfassung. Der Satz von Bernstein über die Approximationsgeschwindigkeit in Banachräumen wird auf lokalkonvexe Räume übertragen. Dabei zeigt sich, daß Schwartz–Räume durch ein günstiges Approximationsverhalten charakterisiert werden. Weiterhin wird eine Methode beschrieben, die für die Approximation günstigen Teilräume zu ermitteln.

Das (lineare) Approximationsproblem besteht bekanntlich darin, in einem linearen Raum F zu einem Punkt $x \notin F$ ein y zu finden, das bezüglich einer auf $x+F$ definierten Norm p von x minimalen Abstand hat. Dabei wählt man einen lokalkonvexen Raum E mit der Eigenschaft, daß $x+F$ Teilmenge von E ist und daß p die Topologie von E erzeugt.

Abweichend von dieser Auffassung wollen wir hier nicht verlangen, daß die Norm p die Topologie von E erzeugt, sondern lediglich, daß die Norm p auf E stetig ist.

Diese Abschwächung hat Konsequenzen weniger für Fragen der geometrischen Approximationstheorie, also für Aussagen, die invariant sind unter bezüglich p isometrischen Isomorphismen, sondern für Aussagen von mehr topologischem Charakter, die also invariant sind unter (linearen) topologischen Isomorphismen.

In dieser Arbeit sollen vor allem Aussagen untersucht werden, die zusammenhängen mit dem

Satz von Bernstein. *Es sei E ein unendlich dimensionaler Banachraum mit der Einheitskugel U. Dann gibt es für jede positive monotone Nullfolge $\{\alpha_n\}$ und für jede Folge $\{E_n\}$ von Teilräumen von E mit* $\dim E_n = n$ *ein $x \in E$ mit*

$$\varrho(x, U, E_n) := \inf\{p_U(x-y), y \in E_n\} = \alpha_n.$$

(Dabei bezeichnet p_U das Minkowski–Funktional von U, also die Norm von E.)

Banachräume zeigen also ein ungünstiges Approximationsverhalten, man muß daher die Frage nach „besseren" Räumen stellen (dazu vergleiche man auch das von I. M. Gelfand auf der 3. Konferenz über Funktionalanalysis, Moskau 1956, ([5], S. 6) gestellte Problem). Ebenfalls besagt dieser Satz, daß es in Banachräumen keine ausgezeichneten Folgen von Teilräumen E_n gibt, sondern daß alle Folgen von Teilräumen „gleichmäßig schlecht" sind.

Wir zeigen hier (vgl. auch [11]), daß Schwartzsche Räume ein besseres Verhalten aufweisen und daß es dort auch Folgen von Teilräumen gibt, die sich gegenüber anderen durch bessere Approximationseigenschaften auszeichnen.

Bezeichnungen und Definitionen. Im Folgenden sei E ein lokalkonvexer Raum, $\mathscr{U}$ sei eine Basis von absolutkonvexen und abgeschlossenen Nullumgebungen von E. Jedem $U \in \mathscr{U}$ wird die (stetige) Halbnorm p_U zugeordnet: $p_U(x) = \inf\{r > 0, x \in rU\}$.

Ist F ein linearer Teilraum von E, $U \in \mathscr{U}$ und A eine Teilmenge von U, so sei

$$\delta(A, U, F) = \inf\{\delta > 0, A \subset \delta U + F\}$$

und

$$\delta_n(A, U) = \inf\{\delta(A, U, F), F \subset E, \dim F \leqslant n\}.$$

$\delta_n(A, U)$ heißt *n-ter (Kolmogorov-) Durchmesser* von A bezüglich U.

Ist A eine beschränkte Teilmenge von E, so ist A genau dann präkompakt, wenn für alle $U \in \mathscr{U}$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n(A, U) = 0$.

E heißt *Schwartz-Raum* genau dann, wenn für alle $U \in \mathscr{U}$ ein $V \in \mathscr{U}$ existiert mit $V \subset U$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n(V, U) = 0$. In Schwartz-Räumen sind also beschränkte Teilmengen präkompakt.

E heißt *nuklear* genau dann, wenn für alle $U \in \mathscr{U}$ ein $V \in \mathscr{U}$ existiert mit $V \subset U$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \delta_n(V, U) < \infty$. (Diese Definition stammt von B. S. Mitiagin [9] und ist mit der von A. Pietsch [10] gegebenen äquivalent.)

Als Folgerung aus der Hölderschen Ungleichung erhält man als Charakterisierung:

E ist nuklear genau dann, wenn für ein $p > 0$ (bzw. für alle $p > 0$) und für alle $U \in \mathscr{U}$ ein $V \in \mathscr{U}$ existiert mit $V \subset U$ und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta_n(V, U)^p < \infty.$$

Mittels der n-ten Durchmesser definierten C. Bessaga, A. Pełczyński und S. Rolewicz [1] eine Isomorphie-Invariante, die *diametrale Dimension* $\Delta(E)$. $\Delta(E)$ ist die Menge aller positiven Zahlenfolgen $\{\delta_n\}$ mit der Eigenschaft: Für alle $U \in \mathscr{U}$ gibt es ein $V \in \mathscr{U}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(V, U)\, \delta_n^{-1} = 0.$$

Als Charakterisierungen erhält man die Aussagen:

E ist nuklear genau dann, wenn für ein $p > 0$ (bzw. für alle $p > 0$) gilt

$$\{(n+1)^{-p}\} \in \Delta(E).$$

E ist ein Schwartz-Raum genau dann, wenn $\Delta(E)$ eine beschränkte Zahlenfolge enthält.

Ist F ein linearer Teilraum von E, $U \in \mathscr{U}$ und $x \in E$, so sei

$$\varrho(x, U, F) = \inf\{p_U(x-y), y \in F\},$$

und für eine Teilmenge A von U sei

$$\varrho(A, U, F) = \sup\{\varrho(x, U, F), x \in A\}.$$

Dann gilt

$$\varrho(A, U, F) = \delta(A, U, F).$$

Bemerkungen zum Satz von Bernstein. Mit Hilfe der diametralen Dimension $\Delta(E)$ eines lokalkonvexen Raumes E läßt sich in einfacher Weise die Approximationsgeschwindigkeit beschreiben. Jedoch sind nur für Schwartz-Räume nichttriviale Aussagen möglich.

SATZ 1. *Sei E ein lokalkonvexer Raum mit einer Nullumgebungsbasis $\mathscr{U}$. Dann gibt es für alle Folgen $\{\delta_n\} \in \Delta(E)$ und für alle $U \in \mathscr{U}$ eine Folge von Teilräumen E_n von E mit $\dim E_n \leqslant n$, so daß für alle beschränkten Teilmengen A von E gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n^{-1} \varrho(A, U, E_n) = 0.$$

Beweis. Zu $U \in \mathscr{U}$ bestimme man $V \in \mathscr{U}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n(V, U)\, \delta_n^{-1} = 0$. Dann gibt es Teilräume E_n von E mit $\dim E_n \leqslant n$ und

$$\delta_n(V, U) \geqslant \delta(V, U, E_n) - \frac{\delta_n}{n}.$$

Daher gilt

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n^{-1} \delta(V, U, E_n) = 0.$$

Da A beschränkt ist, folgt daraus die Behauptung des Satzes. Diese Aussage ist aber nur dann nichttrivial, wenn $\Delta(E)$ eine beschränkte Folge enthält, also E ein Schwartz-Raum ist.

KOROLLAR 1. *Ist E nuklear, so gibt es für alle $p > 0$ und für alle $U \in \mathscr{U}$ eine Folge von Teilräumen E_n, so daß für alle beschränkten Teilmengen A von E gilt*

$$\lim_{n\to\infty} n^p \varrho(A, U, E_n) = 0.$$

Satz 1 liefert eine Aussage, die gleichmäßig für alle $U \in \mathcal{U}$ gilt. Verzichtet man auf diese Gleichmäßigkeit, so erhält man aus der Relation

$$\delta_{2n}(W, U) \leqslant \delta_n(W, V)\,\delta_n(V, U)$$

für drei Nullumgebungen U, V, W mit $W \subset V \subset U$ das

Korollar 2. *Es sei E ein Schwartz-Raum. Dann gibt es für alle $U \in \mathcal{U}$ eine Nullfolge $\{\alpha_n\}$ und Teilräume E_n von E mit $\dim E_n \leqslant n$, so daß für alle beschränkten Teilmengen A von E gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n^{-1}\varrho(A, U, E_n) = 0.$$

Diese Aussage ist für Schwartz-Räume charakteristisch. Es gilt nämlich der

Satz 2. *Es sei E ein tonnelierter lokalkonvexer Raum. Für alle $U \in \mathcal{U}$ gebe es (monotone) Nullfolgen positiver Zahlen α_n und Teilräume E_n von E mit $\dim E_n \leqslant n$, so daß für alle $x \in E$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n^{-1}\varrho(x, U, E_n) = 0.$$

Dann ist E ein Schwartz-Raum.

Beweis. Sei

$$V := \bigcap_{n\geqslant 0} \{x \in E,\ \varrho(x, U, E_n) \leqslant \alpha_n\}.$$

V ist abgeschlossen und absolutkonvex. Außerdem ist V absorbierend: Ist nämlich $x \in E$, so ist mit

$$m_x := \sup_{n\in N} \alpha_n^{-1}\varrho(x, U, E_n) < \infty$$

$x \in m_x V$. Da E tonneliert ist, ist V eine Nullumgebung. Aus der Definition von V folgt

$$\delta_n(V, U) \leqslant \delta(V, U, E_n) \leqslant \alpha_n,$$

also $\lim_{n\to\infty}\delta_n(V, U) = 0$. Daher ist E ein Schwartz-Raum. Als einfache Folgerung erhalten wir

Korollar 3. *Es sei E tonneliert. Es gebe ein $p > 0$, so daß für alle $U \in \mathcal{U}$ positive monotone Folgen $\{\alpha_n\} \in l^p$ und Teilräume E_n von E existieren so daß für alle $x \in E$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n^{-1}\varrho(x, U, E_n) = 0.$$

Dann ist E nuklear.

Da normierte Schwartz-Räume endlich dimensional sind, gilt

Korollar 4 (Satz von Bernstein). *Sei E ein tonnelierter normierter Raum. Dann folgt aus den Voraussetzungen von Satz 2, daß E endlich dimensional ist.*

Es sei bemerkt, daß es nicht vollständige tonnelierte normierte Räume gibt (vgl. G. Köthe [6], pag. 372). Auf die Voraussetzung der Tonneliertheit kann aber nicht verzichtet werden, wie die Sätze von D. Jackson zeigen (vgl. G. Meinardus [8]).

Extremale Teilräume. Wie schon in Korollar 2 erwähnt, gibt es in Schwartz-Räumen ausgezeichnete Folgen von Teilräumen. Diese Frage soll hier genauer untersucht werden.

Sei wieder E lokalkonvex, $U \in \mathcal{U}$ und $A \subset U$. Ein n-dimensionaler Teilraum F von E heißt *extremal* bezüglich A und U, wenn gilt

$$\delta_n(A, U) = \delta(A, U, F).$$

Wie schon von Kolmogorov bemerkt wurde, ist die Kenntnis der extremalen Teilräume für die Approximationstheorie sehr vorteilhaft.

Eine Folge von Teilräumen E_n von E mit $\dim E_n = n$ heißt *quasiextremal* bezüglich A und U, wenn es eine positive Zahl $c \geqslant 1$ gibt, so daß für alle $n \in N$ gilt

$$\delta(A, U, E_n) \leqslant c\,\delta_n(A, U).$$

Extremale und quasiextremale Teilräume lassen sich in übersichtlicher Weise angeben für gewisse Teilmengen von Folgenräumen und für volle Approximationsmengen.

Es sei P eine Menge von nichtnegativen Zahlenfolgen mit den Eigenschaften

(i) Für alle $n \in N$ gibt es ein $\varrho \in P$ mit $\varrho_n > 0$.

(ii) Für alle $\varrho, \sigma \in P$ gibt es ein $\tau \in P$ mit $\tau \geqslant \max(\varrho, \sigma)$.

Dann ist die Menge aller (reellen oder komplexen) Zahlenfolgen $\eta = \{\eta_n\}$

$$\Lambda_q(P) := \Big\{\eta;\ p_\varrho(\eta) := \Big(\sum_{n=1}^{\infty} |\eta_n|^q \varrho_n^q\Big)^{1/q} < \infty \text{ für alle } \varrho \in P\Big\}$$

ein linearer Raum, der in der durch die Halbnormen p_ϱ, $\varrho \in P$ erzeugten lokalkonvexen Topologie vollständig ist $(1 \leqslant q \leqslant \infty)$. $\Lambda_q(P)$ heißt *Folgenraum* (gestufter Raum q-ter Ordnung, G. Köthe [6]).

Es gilt (vgl. [4]) der

Satz 3. *Es sei $\Lambda_q(P)$ ein Folgenraum. Sei*

$$U_\sigma := \{\eta \in \Lambda_q(P),\ p_\sigma(\eta) \leqslant 1\},$$
$$U_\varrho := \{\eta \in \Lambda_q(P),\ p_\varrho(\eta) \leqslant 1\}$$

mit $U_\sigma \subset U_\varrho$. Ist dann

$$I := \{n \in N,\ \varrho_n/\sigma_n \geqslant \limsup_{i\to\infty} \varrho_i/\sigma_i, \quad \sigma_n \neq 0\}$$

und $n \to i_n$ eine Permutation von I, so daß die Folge $\{\varrho_{i_n}/\sigma_{i_n}\}$ monoton fallend ist, so gilt

$$\delta_n(U_\sigma, U_\varrho) = \begin{cases} \varrho_{i_n}/\sigma_{i_n} & \text{für } n < |I|, \\ \limsup\limits_{i\to\infty} \varrho_i/\sigma_i & \text{für } n \geqslant |I|, \text{ falls } I \text{ endlich ist.} \end{cases}$$

Der Beweis dieses Satzes macht davon Gebrauch, daß die von den Einheitsvektoren $e_{i_0}, e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n-1}}$ aufgespannten Teilräume extremal bezüglich U_σ und U_ϱ sind. Besonders einfach ist der Fall, wenn P *regulär*, d.h. wenn für alle $\varrho, \sigma \in P$ die Folge $\{\varrho_n/\sigma_n\}$ monoton ist (dieser Begriff stammt von M. M. Dragilev [3]).

KOROLLAR 5. *Sei $\Lambda_q(P)$ ein Schwartzscher Folgenraum mit regulärem Stufensystem P. Dann erhält man die bezüglich U_σ und U_ϱ extremalen Teilräume als Spann der ersten n Einheitsvektoren.*

Ebenso lassen sich die extremalen Teilräume in lokalkonvexen Räumen berechnen, die zu Folgenräumen isomorph sind. Ist nämlich E ein (F)-Raum mit Schauderbasis $\{e_n\}$ und biorthogonalen Funktionalen f_n, so heißt die Basis nach [11] *q-absolut* $(1 \leqslant q \leqslant \infty)$, wenn die Topologie von E erzeugt werden kann durch das Halbnormensystem

$$\pi_U(x) = \Big\{\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, f_n\rangle|^q p_U(e_n)^q\Big\}^{1/q},$$

dabei durchlaufe p_U ein Fundamentalsystem von stetigen Halbnormen von E. Ferner sei

$$\mathcal{U}_R := \{V,\ V = \{x \in E,\ \pi_U(x) \leqslant 1\},\ U \in \mathcal{U}\}.$$

Eine q-absolute Basis $\{e_n\}$ heißt *regulär*, wenn für alle $U, V \in \mathcal{U}$ die Folge $\{p_U(e_n)/p_V(e_n)\}$ monoton ist. Da ein (F)-Raum mit q-absoluter Basis einem Folgenraum $\Lambda_q(P)$ isomorph ist, gilt

KOROLLAR 6. *Sei E ein Schwartz-Raum mit q-absoluter regulärer Basis $\{e_n\}$. Dann gilt:*

(i) *Ist $V, U \in \mathcal{U}_R$, $V \subset U$, so ist $\delta_n(V, U) = p_U(e_n)/p_V(e_n)$.*

(ii) *Die extremalen Teilräume bezüglich $V, U \in \mathcal{U}_R$ werden von den ersten n Basisvektoren $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$ aufgespannt.*

Ebenso wie bei G. Lorentz [7] im Falle von Banachräumen lassen sich im Falle von lokalkonvexen Räumen die extremalen Teilräume von „vollen Approximationsmengen" berechnen.

Es sei $X := \{x_1, x_2, \ldots\}$ eine Fundamentalfolge linear unabhängiger Elemente eines (F)-Raumes E, d.h. eine Folge von Elementen, deren lineare Hülle in E dicht liegt. Ferner sei $\delta := \{\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots\}$ eine monoton fallende Folge positiver Zahlen, $U \in \mathcal{U}$ und $E_n = \operatorname{spann}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Dann ist die Menge

$$A(\delta, U, X) := \bigcap_{n\geqslant 0} \{x \in E,\ \varrho(x, U, E_n) \leqslant \delta_n\}$$

die *volle Approximationsmenge* bezüglich δ, U und X. Als einfache Folgerung aus der Definition erhält man:

Ist $V \subset U$, so gilt $A(\delta, V, X) \subset A(\delta, U, X)$.

Ist $\gamma < \delta$, so gilt $A(\gamma, U, X) \subset A(\delta, U, X)$.

In der gleichen Weise wie G. Lorentz beweist man den

SATZ 4. *Ist $A = A(\delta, U, X)$ die volle Approximationsmenge bezüglich δ, U und X, so gilt*

(i) $\delta_n(A, U) = \delta_n$,

(ii) *E_n ist extremaler Teilraum bezüglich A und U.*

Ist E ein normierter Raum und δ eine Nullfolge, so ist $A(\delta, U, X)$ präkompakt. Daß dies in Schwartz-Räumen nicht allgemein gilt, zeigt der folgende

SATZ 5. *Es sei E ein Schwartz-Raum mit q-absoluter regulärer Basis $X := \{e_1, e_2, \ldots\}$ und $U \in \mathcal{U}_R$. Dann ist die volle Approximationsmenge*

$$A = A(\delta, U, X)$$

genau dann präkompakt, wenn es keine Nullumgebung $V \subset U$ gibt, so daß für eine unendliche Teilmenge $\boldsymbol{I}$ von $\boldsymbol{N}$ gilt

$$\delta_n(V, U) \leqslant \delta_n \quad \text{für } n \in \boldsymbol{I}.$$

Beweis. Sei A präkompakt. Dann gilt für alle $V \subset U$, $V \in \mathcal{U}_R$,

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(A, V) = 0.$$

Also ist wegen

$$\delta_n(A, V) = \delta_n(V, U)^{-1}\delta_n(A, U) = \delta_n(V, U)^{-1}\delta_n,$$

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n(V, U)^{-1}\delta_n = 0,$$

daher kann die Relation $\delta_n(V, U) \leqslant \delta_n$ nicht bestehen. Ist aber A nicht präkompakt, so gibt es ein $V \subset U$ mit

$$2c = \limsup \delta_n(A, V) > 0.$$

Also ist $\delta_n(A, V) = \delta_n(V, U)^{-1}\delta_n \geqslant c$, d.h. $\delta_n(cV, U) \leqslant \delta_n$ für unendlich viele $n \in \boldsymbol{N}$.

Approximation von Hölder-stetigen Funktionen. Als Beispiel soll nun die Approximation von Hölder-stetigen Funktionen untersucht werden.

Eine stetige Funktion $f\colon [0,1] \to \boldsymbol{R}$ heißt *α-Hölder-stetig* $(0 < \alpha \leqslant 1)$, wenn gilt

$$\|f\|_\alpha = \sup\left\{\frac{|f(s)-f(t)|}{|s-t|^\alpha},\ s,t \in [0,1]\right\} < \infty.$$

Der lineare Raum $C_\alpha[0,1]$ aller α-Hölder-stetigen Funktionen f mit $f(0) = 0$ ist, versehen mit der Norm $\|\ \|_\alpha$, ein Banachraum. Wie in [13] gezeigt wurde, ist der Raum

$$H_{\alpha-}[0,1] := \operatorname*{proj}_{\beta<\alpha} C_\beta[0,1] = \bigcap_{\beta<\alpha} C_\beta[0,1],$$

versehen mit der Topologie des projektiven Limes, ein nicht nuklearer Schwartz-Raum.

$H_{\alpha-}[0,1]$ ist topologisch isomorph dem Folgenraum

$$(s_\alpha) = \{\eta,\ q_\beta(\eta) = \sup|\eta_n| n^\beta < \infty,\ \beta < \alpha\}.$$

Der Beweis macht Gebrauch von der Tatsache, daß das Schaudersche Funktionensystem $\{\varphi_n\}$ mit

$$\varphi_n(t) = \int_0^t \chi_n(\tau)\,d\tau,$$

$\{\chi_n\}$ das Haarsche Orthonormalsystem

$\chi_1 = 1,$

$$\chi_{2^n+k}(t) = \begin{cases} \sqrt{2^n}, & t \in \left(\dfrac{2k-2}{2^{n+1}}, \dfrac{2k-1}{2^{n+1}}\right), \\ -\sqrt{2^n}, & t \in \left(\dfrac{2k-1}{2^{n+1}}, \dfrac{2k}{2^{n+1}}\right), \\ 0 & \text{sonst in } [0,1], \end{cases} \quad k \in \{1,2,\ldots,2^n\},\ n \in \{0,1,2,\ldots\},$$

eine reguläre Basis in $H_{\alpha-}[0,1]$ bildet. (Die Partialsummen der Entwicklung nach dieser Basis bilden gerade den Polygonzug, der f an den Stellen $(2k-1)\cdot 2^{-(n+1)}$ interpoliert (vgl. Z. Ciesielski [2]).

Der Isomorphismus ist gegeben durch

$$P_\alpha\colon H_{\alpha-}[0,1] \to (s_\alpha),$$

$$f \to \left\{n^{-1/2} \int_0^1 \chi_n\,df\right\}$$

und es gilt mit positiven Konstanten m_β

$$q_\beta(P_\alpha f) \leqslant 2\|f\|_\beta \leqslant 2m_\beta q_\beta(P_\alpha f).$$

Ferner sei L die Projektion auf den n-ten Abschnitt der Basisentwicklung:

$$L_n f = \sum_{i=1}^n \int_0^1 \chi_i\,df \cdot \varphi_i.$$

Bezeichnet man mit $U_\beta = \{f \in H_{\alpha-}[0,1],\ \|f\|_\beta \leqslant 1\}$, so erhält man

Satz 6. *Sei* $0 < \beta < \gamma < \alpha \leqslant 1$. *Dann gilt*

(i) $\dfrac{1}{2m_\gamma}(n+1)^{\beta-\gamma} \leqslant \delta_n(U_\gamma, U_\beta) \leqslant 2m_\beta(n+1)^{\beta-\gamma}$.

(ii) *Die von den ersten n Schauder-Funktionen aufgespannten Teilräume E_n sind quasiextremal bezüglich U_γ und U_β.*

(iii) *Für jede beschränkte Teilmenge A von $H_{\alpha-}[0,1]$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)^{\gamma-\beta} \varrho(A, U_\beta, E_n) = 0.$$

(iv) *Für alle $f \in H_{\alpha-}[0,1]$ gilt*

$$\|f - L_n f\|_\beta \leqslant 2m_\beta \cdot (n+1)^{\beta-\gamma} \|f\|_\gamma.$$

Literatur

[1] C. Bessaga, A. Pełczyński and S. Rolewicz, *Approximate dimension and linear homogenity in F-spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. 9 (1961), S. 677–683.

[2] Z. Ciesielski, *On the Haar functions and on the Schauder basis of the space* $C[0,1]$, Bull. Acad. Polon. Sci. 7 (1959), S. 227–232.

[3] M. M. Dragilev, *Über reguläre Basen in nuklearen Räumen*, Mat. Sb. 68 (1965), S. 153–173 (Russisch).

[4] C. Fenske und E. Schock, *Nuklearität und lokale Konvexität von Folgenräumen*, Math. Nachr. 45 (1970), S. 327–335.

[5] I. M. Gelfand, *Über einige Probleme der Funktionalanalysis*, Usp. Mat. Nauk 11 (1956) S. 3–12 (Russisch).

[6] G. Köthe, *Topologische lineare Räume*, 1960.

[7] G. G. Lorentz, *Approximation of Functions*, New York 1966.

[8] G. Meinardus, *Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung*, 1964.

[9] B. S. Mitiagin, *Approximate dimension and bases in nuclear spaces*, Russ. Math. Surv. 16 (1961), S. 59–128.

[10] A. Pietsch, *Nukleare lokalkonvexe Räume*, Berlin 1965.

[11] E. Schock, *Lineare Approximationsoperatoren in (M)-Räumen*, J. Approx. Theory 1 (1968), S. 365–373, 2 (1969), S. 450.

[12] — *(F)-Räume mit p-absoluter Basis*, Schr. Ges. Math. Datenv. Bonn 10 (1969), S. 23–28.

[13] — *Montel-Räume von Hölder-stetigen Funktionen*, J. reine angew. Math. 239/240 (1970), S. 14–20.

UNIVERSITÄT BONN
INSTITUT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND INFORMATIK

Received October 31, 1970 (262)