STUDIA MATHEMATICA, T. XL. (1971)

Algèbres de fonctions à orthogonal purement atomique

par

L. CHEVALIER (Grenoble)

Résumé. Dans cet article, nous montrons que toute sous-algèbre fermée de $C(X)$ (où X est un espace topologique compact), dont l'orthogonal est constitué de mesures purement atomiques, est auto-adjointe (résultat conjecturé par A. Pełczyński). L'essentiel de notre démonstration consiste à prouver, en utilisant des mesures représentatives "maximales", que si on suppose de plus que l'algèbre A contient les fonctions constantes et sépare les points de X, alors la frontière de Choquet de A coïncide avec X.

Soit X un espace topologique compact; on note $C(X)$ l'algèbre des applications continues de X dans $\boldsymbol{C}$, munie de la norme de la convergence uniforme dans X. Le but de ce qui suit est de montrer que toute sous-algèbre fermée de $C(X)$ dont l'orthogonal est purement atomique est auto-adjointe (résultat conjecturé par A. Pełczyński dans [1]).

Dans le cas où l'espace X est métrisable, ce résultat découle assez aisément de l'application du théorème de Choquet (Cf. A. Pełczyński, Proposition 2.2 de [1]). En revanche, il ne semble pas qu'il en soit de même dans le cas général.

On utilisera néanmoins une technique très proche de celle — introduite pour la démonstration du théorème de Choquet — qui consiste à "représenter" tout point d'un convexe compact K par une mesure "maximale" de masse 1 sur K; cette dernière technique se trouve décrite dans [2]. On utilisera également la caractérisation classique de la "frontière de Choquet" d'une algèbre uniforme sur un compact au moyen des points "pics faibles" (Cf. [2], p. 53).

DÉFINITION 1. Soit μ une mesure de Radon sur un espace topologique compact X. On dit que μ est *purement atomique* si μ est égale à la somme de la famille absolument sommable $\big(\mu(\{x\})\varepsilon_x\big)_{x\in X}$, où ε_x désigne la mesure de Dirac au point x.

THÉORÈME. *Soient X un espace topologique compact et A une sous-algèbre fermée de $C(X)$. Si l'orthogonal de A est purement atomique (i. e. si toute mesure orthogonale à A est purement atomique), alors A est auto-adjointe.*

Soient X un espace topologique compact et A une sous-algèbre fermée de $C(X)$ qui contient les fonctions constantes et sépare les points de X. On munit A^* de la topologie faible $\sigma(A^*, A)$; on note $K(A)$ l'ensemble convexe compact des formes linéaires $l \in A^*$ telles que $l(1) = \|l\| = 1$, i_A l'application de X dans $K(A)$ qui associe à tout point $x \in X$ la restriction à A de la mesure de Dirac ε_x, et j_A l'application de $M(X)$ (dual de $C(X)$) dans $M(K(A))$ (dual de $C(K(A))$) qui associe à toute mesure μ sur X la mesure $f \to \mu(f \circ i_A)$ sur $K(A)$.

Définition 2. Nous dirons qu'une mesure positive μ sur $K(A)$ est *maximale sur* $i_A(X)$ si son support est inclus dans $i_A(X)$ et si, pour toute mesure positive ν sur $K(A)$, de support inclus dans $i_A(X)$, les relations $\mu(f) \leqslant \nu(f)$ pour toute fonction numérique f convexe et continue dans $K(A)$ entraînent $\mu = \nu$.

Lemme 1. *Soit ν une mesure sur $K(A)$ maximale sur $i_A(X)$. Tout atome de ν est point extrémal de $K(A)$.*

Démonstration. Supposons le contraire; il existe alors un point $k \in i_A(X)$ tel que $\nu(\{k\}) > 0$, et deux points distincts k_1 et k_2 de $K(A)$ tels que $k = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$. On peut, à l'aide du théorème de Hahn–Banach, prolonger chaque k_i en une mesure μ_i sur X, positive et de masse 1. Posons $a = \nu(\{k\})$, $\nu_i = j_A(\mu_i)$ $(i = 1, 2)$ et $\nu' = \frac{a}{2}(\nu_1 + \nu_2 - 2\varepsilon_k) + \nu$. La mesure ν' est positive et son support est inclus dans $i_A(X)$; de plus on a, pour toute fonction numérique f convexe et continue dans $K(A)$

$$\nu'(f) \geqslant \frac{a}{2}\big(f(k_1) + f(k_2) - 2f(k)\big) + \nu(f) \geqslant \nu(f),$$

puisque f est convexe et k_i est le barycentre de ν_i $(i = 1, 2)$. Comme ν' est distincte de ν, ν n'est pas maximale sur $i_A(X)$, ce qui est absurde, C.Q.F.D.

Lemme 2. *Soient X un espace topologique compact et A une sous-algèbre fermée de $C(X)$ qui contient les fonctions constantes et sépare les points de X. Si μ est une mesure orthogonale à A, alors $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout point x de la frontière de Choquet $\mathrm{Ch}_A(X)$ de A.*

Démonstration. Soient μ une mesure orthogonale à A, x un point de la frontière de Choquet de A et μ' la mesure $\mu - \mu(\{x\})\varepsilon_x$. Soit ε un nombre réel > 0. Comme $|\mu'|$ est une mesure régulière telle que $|\mu'|(\{x\}) = 0$, il existe un ouvert U de X contenant x tel que $|\mu'|(U) < \frac{\varepsilon}{2}$. D'autre part x appartient à la frontière de Choquet de A, donc est un point "pic faible" (Cf. [2], p. 53); il existe par suite une fonction $f \in A$ telle que $f(x) = \|f\| = 1$ et $\sup\limits_{y \in X \setminus U} |f(y)| < 1$. Comme A est une algèbre on peut, en remplaçant au besoin f par f^n, où n est un entier convenable, supposer que f vérifie de plus $\|\mu'\| \cdot \sup\limits_{y \in X \setminus U} |f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. On a alors, puisque μ est orthogonale à A:

$$0 = \int f d\mu = \mu(\{x\}) + \int f d\mu' = \mu(\{x\}) + \int f\chi_U d\mu' + \int f(1 - \chi_U) d\mu',$$

et par suite

$$|\mu(\{x\})| \leqslant |\mu'|(U) + \|\mu'\| \cdot \sup_{y \in X \setminus U} |f(y)| < \varepsilon.$$

Comme on peut choisir ε arbitrairement petit, $\mu(\{x\}) = 0$, C.Q.F.D.

Lemme 3. *Soient X un espace topologique compact et A une sous-algèbre fermée de $C(X)$ qui contient les fonctions constantes et sépare les points de X. Pour qu'un point $x \in X$ appartienne à la frontière de Choquet de A, il suffit que toute mesure positive de masse 1 sur X, représentative du point x pour l'algèbre A, soit purement atomique.*

Démonstration. Soient x un point de X dont toute mesure représentative est purement atomique et $k = i_A(x)$. On voit facilement, en utilisant un argument de faible compacité et le théorème de Zorn (Cf. [2], p. 25), qu'il existe une mesure ν sur $K(A)$, positive et de masse 1, maximale sur $i_A(X)$ et admettant le point k pour barycentre. La mesure $\mu = j_A^{-1}(\nu)$, positive et de masse 1, représentative du point x pour l'algèbre A, est donc purement atomique, et on a $1 = \mu(X) = \sum\limits_{y \in X} \mu(\{y\})$. Mais, comme ν est maximale sur $i_A(X)$, on a $\nu(\{l\}) = 0$ pour tout point l non extrémal dans $K(A)$ (Cf. Lemme 1) ou, ce qui est équivalent, $\mu(\{y\}) = 0$ pour tout point $y \in X \setminus \mathrm{Ch}_A(X)$; on a par suite:

$$\sum_{y \in \mathrm{Ch}_A(X)} \mu(\{y\}) = 1. \tag{1}$$

Considérons alors la mesure $\mu - \varepsilon_x$; comme elle est orthogonale à A on a, pour tout point $y \in \mathrm{Ch}_A(X)$, $(\mu - \varepsilon_x)(\{y\}) = 0$ (Cf. Lemme 2), ou encore $\mu(\{y\}) = \varepsilon_x(\{y\})$. On a donc, compte-tenu de (1),

$$\sum_{y \in \mathrm{Ch}_A(X)} \varepsilon_x(\{y\}) = 1,$$

ce qui prouve que $x \in \mathrm{Ch}_A(X)$, C.Q.F.D.

Démonstration du théorème. En remplaçant au besoin A par la sous-algèbre fermée A_1 engendrée par A et les fonctions constantes, et X par un quotient convenable X_1 de X, on se ramène au cas où l'algèbre A contient les fonctions constantes et sépare les points de X. Il suffit alors de prouver que, si A vérifie les hypothèses du théorème, alors $A = C(X)$; or il résulte immédiatement des lemmes 2 et 3 que l'orthogonal de A est réduit à $\{0\}$; comme A est fermée, $A = C(X)$, et la démonstration est achevée.

Bibliographie

[1] A. Pełczyński, *Uncomplemented function algebras with separable annihilators*, Duke Math. J. Vol. 33, (1966), pp. 605–612.

[2] R. R. Phelps, *Lectures on Choquet's theorem*, New York 1966.

Reçu par la Rédaction le 15. 9. 1970 (240)

STUDIA MATHEMATICA, T. XL. (1971)

On complementably universal Banach spaces

by

M. I. KADEC (Kharkov)

Abstract. A Banach space X is said to have BAP if the identity operator on X is the pointwise limit of a sequence of finite dimensional bounded linear operators. It is shown that there exists a separable Banach space E with the property that any Banach space X with BAP is isomorphic to a complemented subspace of E.

The classical example of a universal Banach space — the space $C([0;1])$ — has the following negative property which considerably depreciates the universality of $C([0;1])$: any infinite-dimensional subspace of the space $C([0;1])$ which does not contain a subspace isomorphic to the space c_0 of scalar valued sequences converging to zero is not complemented in $C([0;1])$, cf. [1].

DEFINITION 1. A Banach space Z is *complementably universal* for the class $\mathfrak{M}$ of Banach spaces if for every $X \in \mathfrak{M}$ there exists a complemented subspace of Z isomorphic to X.

It was recently proved by Pełczyński [2] that among all Banach spaces with a basis (unconditional basis) there exists a complementably universal space B (resp. U) unique up to isomorphisms. This suggests the question whether there exists a complementably universal Banach space in the class of all separable Banach spaces. The negative answer on this question combined with the result of [2] would imply the negative solution of the basis problem.

DEFINITION 2. A Banach space X has the *Banach Approximation Property* (shortly BAP) if there exists a sequence of finite dimensional bounded linear operators which converges pointwise to the identity operator on X.

Obviously any Banach space with BAP is separable. We do not know whether there exists a seperable Banach space without BAP.

The main result of the present paper is the following

THEOREM. *There exists a separable Banach space E which is complementably universal for all Banach spaces with* BAP.