Or, l'hypothèse faite sur Z implique, en vertu de la propriété de Baire, l'existence d'un point x appartenant à Z en lequel l'ensemble $E-Z$ est de I-re catégorie. Soit donc G un ensemble ouvert tel que $x \in G$ et $G-Z$ est de I-re catégorie. Nous allons prouver que $G \subset Z$.

Supposons, par contre, que $y \in G-Z$. Soit h une automorphie (appartenant à $\mathcal{H}$) telle que $y=h(x)$. Comme $y \in h(Z)-Z$, il vient selon (°): $Z \cdot h(Z)=0$, d'où $h(Z) \subset E-Z$, donc $G \cdot h(Z) \subset G-Z$, ce qui prouve que $G \cdot h(Z)$ est un ensemble de I-re catégorie, donc que l'ensemble $h(Z)$ est de I-re catégorie au point $y=h(x)$. Mais alors, conformément à la remarque faite au début de la démonstration, l'ensemble Z serait nécessairement de I-re catégorie au point x, tandis que nous avons supposé que Z n'est en aucun de ses points de I-re catégorie.

Nous sommes parvenus ainsi à la contradiction prévue.

(Reçu par la Rédaction le 11. 3. 1933).

Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen (II)

von

W. ORLICZ (Lwów).

In dieser Note werden wir den Satz 3 der gleichbetitelten Arbeit[1]) aufs neue beweisen und in einer bestimmten Weise auf (L^{α}) mit $\alpha \geqslant 2$ verallgemeinern.

Hilfssatz. *Mit $f_1(x)$, $f_2(x)$ seien zwei beliebige Funktionen aus dem Raume (L^{α}) bezeichnet. Es gibt dann immer ein Vorzeichen $\varepsilon = \pm 1$, so daß die Ungleichung besteht:*

a) *für* $1 < \alpha \leqslant 2$

$$\left(\int_0^1 |f_1(x)+\varepsilon f_2(x)|^{\alpha} dx\right)^{\frac{2}{\alpha}} \geqslant \left(\int_0^1 |f_1(x)|^{\alpha} dx\right)^{\frac{2}{\alpha}} + M_{\alpha}\left(\int_0^1 |f_2(x)|^{\alpha} dx\right)^{\frac{2}{\alpha}}; \tag{1}$$

b) *für* $\alpha \geqslant 2$

$$\int_0^1 |f_1(x)+\varepsilon f_2(x)|^{\alpha} dx \geqslant \int_0^1 |f_1(x)|^{\alpha} dx + M_{\alpha} \int_0^1 |f_2(x)|^{\alpha} dx. \tag{2}$$ [2])

Dabei bedeutet M_{α} eine Konstante, die von der Wahl der Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ unabhängig ist.

Beweis. 1°. Wir betrachten zuerst den Fall a).

Es bestehen für $1 < \alpha \leqslant 2$ folgende elementare Ungleichungen:

$$|1+z|^{\alpha} \geqslant 1+\alpha z + Mz^2, \quad \text{für } |z| \leqslant 1,$$
$$|1+z|^{\alpha} \geqslant 1+\alpha z + M|z|^{\alpha}, \quad \text{für } |z| \geqslant 1,$$

[1]) W. Orlicz, Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen, diese Studia 4 (1933) p. 33—37.

[2]) Wie Herr Banach dem Verfasser freundlichst mitgeteilt hat, war ihm die Ungleichung (2) bereits seit langer Zeit bekannt.

wo die Konstante M nur von α abhängig ist [3]). Durch die Substitution $z=\frac{b}{a}$ erhalten wir daraus die folgenden beiden Ungleichungen:

$$(3)\qquad |a+b|^\alpha \geqslant |a|^\alpha + \alpha b|a|^{\alpha-1}\operatorname{sign} a + M|b|^2|a|^{\alpha-2}, \quad \text{für } |b|\leqslant|a|,$$

$$(4)\qquad |a+b|^\alpha \geqslant |a|^\alpha + \alpha b\,|a|^{\alpha-1}\operatorname{sign} a + M|b|^\alpha, \quad \text{für } |a|\leqslant|b|.$$

Wir setzen

$$(5)\qquad \int_0^1 |f_2(x)|^\alpha\, dx \leqslant 1$$

voraus, was offensichtlich ohne Schaden für die Allgemeinheit zulässig ist. Setzen wir in (3) und (4) $a=f_1(x)$, $b=\varepsilon f_2(x)$ und bezeichnen mit A die Menge derjenigen Punkte, in welchen

$$|f_2(x)|\leqslant|f_1(x)|$$

ist, so folgen aus den Ungleichungen (3), (4) durch beiderseitige Integration die Beziehungen

$$\int_A |f_1(x)+\varepsilon f_2(x)|^\alpha dx \geqslant \int_A |f_1(x)|^\alpha dx + \alpha\varepsilon \int_A f_2(x)|f_1(x)|^{\alpha-1}\operatorname{sign} f_1(x)\, dx + M\int_A |f_2(x)|^2|f_1(x)|^{2-\alpha} dx,$$

$$\int_{CA} |f_1(x)+\varepsilon f_2(x)|^\alpha dx \geqslant \int_{CA} |f_1(x)|^\alpha dx + \alpha\varepsilon \int_{CA} f_2(x)\,|f_1(x)|^{\alpha-1}\operatorname{sign} f_1(x)\, dx + M\int_{CA} |f_2(x)|^\alpha dx.$$

Indem wir

$$(6)\qquad \varepsilon = \operatorname{sign}\int_0^1 f_2(x)|f_1(x)|^{\alpha-1}\operatorname{sign} f_1(x)\, dx$$

setzen und die letzten beiden Ungleichungen addieren, erhalten wir

$$(7)\qquad \int_0^1 |f_1(x)+\varepsilon f_2(x)|^\alpha dx \geqslant \int_0^1 |f_1(x)|^\alpha dx + M\int_A |f_2(x)|^2|f_1(x)|^{\alpha-2} dx + M\int_{CA} |f_2(x)|^\alpha dx.$$

[3]) Siehe F. Riesz, Sur la convergence en moyenne (seconde communication), Acta Szeged (1929) p. 182—185.

Nun gilt aber die Abschätzung

$$(8)\qquad \int_A |f_2(x)|^\alpha dx = \int_A |f_2(x)|^\alpha |f_1(x)|^{(\alpha-2)\frac{\alpha}{2}} |f_1(x)|^{(2-\alpha)\frac{\alpha}{2}} dx \leqslant \left(\int_A |f_2(x)|^2|f_1(x)|^{\alpha-2}dx\right)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\int_A |f_1(x)|^\alpha dx\right)^{\frac{2-\alpha}{2}}.$$

Wenn wir

$$d=\int_0^1 |f_1(x)+\varepsilon f_2(x)|^\alpha dx$$

setzen und $d=1$ annehmen, so ist wegen (7) auch

$$\int_0^1 |f_1(x)|^\alpha dx \leqslant 1$$

und wir erhalten nach (5), (7), (8) die Beziehung

$$\int_0^1 |f_1(x)+\varepsilon f_2(x)|^\alpha dx \geqslant \left(\int_0^1 |f_1(x)|^\alpha dx\right)^{\frac{2}{\alpha}} + M\left(\int_0^1 |f_2(x)|^\alpha dx\right)^{\frac{2}{\alpha}} + M\left(\int_{CA} |f_2(x)|^\alpha dx\right)^{\frac{2}{\alpha}}.$$

Da endlich die Ungleichung

$$\int_0^1 |f_2(x)|^\alpha dx \leqslant \left[\left(\int_A |f_2(x)|^\alpha dx\right)^{\frac{2}{\alpha}} + \left(\int_{CA} |f_2(x)|^\alpha dx\right)^{\frac{2}{\alpha}}\right]^{\frac{\alpha}{2}} . \, 2^{\frac{2-\alpha}{2}}$$

gilt, so folgt aus den letzten beiden Ungleichungen die Beziehung (1) mit der Konstante

$$M_\alpha = M\,.\,2^{\frac{\alpha-2}{2}}.$$

Falls $d\neq 1$ ist, betrachten wir statt $f_1(x)$, $f_2(x)$ die Funktionen

$$f_1(x)\,d^{-\frac{1}{\alpha}},\quad f_2(x)\,d^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Da für diese Funktionen das nach (6) bestimmte Vorzeichen mit dem früher definierten identisch ist, so ist für diese Funktionen die linke Seite der Ungleichung (1) gleich 1 und wir haben

$$1\geqslant d^{-\frac{2}{\alpha}}\left(\int_0^1 |f_1(x)|^\alpha dx\right)^{\frac{2}{\alpha}} + M_\alpha\, d^{-\frac{2}{\alpha}}\left(\int_0^1 |f_2(x)|^\alpha dx\right)^{\frac{2}{\alpha}}.$$

2°. Im Falle b), d. h. für $\alpha \geqslant 2$, besteht für alle z die Ungleichung[4])

$$|1+z|^{\alpha} \geqslant 1+\alpha z+M|z|^{\alpha} \qquad (M>0),$$

woraus, wie früher, die Ungleichung (4) folgt, die aber jetzt für beliebige a, b giltig ist. Setzen wir nun in (4) $a=f_1(x)$, $b=\varepsilon f_2(x)$, integrieren beiderseits und definieren ε nach der Formel (6), so erhalten wir die Beziehung (2).

Satz 1. *Ist die Reihe*

$$(9) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x), \qquad f_\nu(x) \in (L^{\alpha})$$

in (L^{α}) unbedingt konvergent, dann ist

a) *für $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$ die Reihe*

$$(10) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\int_0^1 |f_\nu(x)|^{\alpha}\right)^{\frac{2}{\alpha}},$$

b) *für $\alpha \geqslant 2$ die Reihe*

$$(11) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^1 |f_\nu(x)|^{\alpha}\, dx$$

konvergent.

Beweis. Den ersten Teil dieses Satzes habe ich schon früher bewiesen[5]); hier wird für $\alpha>1$ der Beweis noch einmal, ohne Benutzung des Rademacherschen Orthogonalsystems und dessen Eigenschaften gebracht.

Die sukzessive Anwendung der Ungleichung (1) zeigt, daß es eine Vorzeichenfolge $\{\varepsilon_\nu\}$, $\varepsilon_\nu = \pm 1$, mit der folgenden Eigenschaft gibt:

$$\left(\int_0^1 \left|\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu f_\nu(x)\right|^{\alpha} dx\right)^{\frac{2}{\alpha}} \geqslant \left(\int_0^1 \left|\sum_{\nu=1}^{n-1} \varepsilon_\nu f_\nu(x)\right|^{\alpha} dx\right)^{\frac{2}{\alpha}} + M_\alpha \left(\int_0^1 |f_n(x)|^{\alpha} dx\right)^{\frac{2}{\alpha}} \qquad (n=1,2,\ldots).$$

[4]) l. c. [3]) p. 183.
[5]) l. c. [1]) p. 36.

Daraus folgt weiter

$$(12) \qquad \left(\int_0^1 \left|\sum_{\nu=1}^{n} \varepsilon_\nu f_\nu(x)\right|^{\alpha}\right)^{\frac{2}{\alpha}} \geqslant M_\alpha \sum_{\nu=1}^{n} \left(\int_0^1 |f_\nu(x)|^{\alpha} dx\right)^{\frac{2}{\alpha}} \qquad (n=1,2,\ldots).$$

Wenn die Reihe (9) in (L^{α}) unbedingt konvergiert, so ist die linke Seite in (12) unabhängig von n beschränkt, es konvergiert daher die Reihe (10).

Im Falle b), d. h. für $\alpha \geqslant 2$, verläuft der Beweis analog, nur ist anstatt der Ungleichung (1) die Ungleichung (2) anzuwenden.

Der Satz 2 ist in einem gewissen Sinne scharf, u. zw. gilt Folgendes:

A. Es bezeichne $\{\varphi_\nu(x)\}$ irgendein gleichmäßig beschränktes Orthogonalsystem, $\{a_\nu\}$ eine Zahlenfolge mit der Eigenschaft, daß für jedes $0<\delta<2$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^{\delta} = +\infty$$

und

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^{2} < +\infty$$

ist. Dann ist die Reihe

$$(13) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu(x)$$

in jedem (L^{α}), $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$, unbedingt konvergent, aber die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\int_0^1 |a_\nu \varphi_\nu(x)|^{\alpha} dx\right)^{\frac{\delta}{\alpha}} \geqslant K \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^{\delta}$$

ist für jedes $0<\delta<2$ divergent.

B. Es sei nun $\alpha \geqslant 2$. Mit $\{E_\nu\}$ bezeichnen wir eine Folge von elementenfremden Mengen von positivem Maße. Wir definieren $\varphi_\nu(x)=0$ für $x \in CE_\nu$, und in E_ν so daß

$$\int_0^1 |\varphi_\nu(x)|^{\alpha} dx = 1$$

ist, sonst beliebig. Es bezeichne $\{a_\nu\}$ eine Zahlenfolge, für welche

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^{\delta} = +\infty \qquad (0<\delta<\alpha),$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^\alpha < +\infty$$

ist. Die Reihe (13) konvergiert unbedingt in (L^α), aber die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\int_0^1 |a_\nu \varphi_\nu(x)|^\alpha dx \right)^{\frac{\delta}{\alpha}} = \sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^\delta$$

ist für jedes $\delta < \alpha$ divergent.

Anwendungen.

Satz 2. *Die linearen Dimensionen der Räume* (L^α), $\alpha > 2$, *und* (L^1) *sind unvergleichbar* [6]).

Beweis. Zuerst ist es klar, daß die Beziehung

$$\dim_l (L^1) \leqslant \dim_l (L^\alpha) \qquad (\alpha > 1)$$

nicht bestehen kann, da (L^1), ein nichtschwachkompakter (B)-Raum, sich auf einen Teilraum des schwachkompakten Raumes (L^α) nicht isomorph abbilden läßt. Nun nehmen wir an, daß

$$\dim_l (L^\alpha) \leqslant \dim_l (L^1),$$

d. h., daß (L^α) einer linearen, abgeschlossenen Menge E, $E \in (L^1)$, isomorph ist. Wir bezeichnen mit $f_\nu(x)$ diejenigen Funktionen aus E, die bei der isomorphen Abbildung, den unter B definierten Funktionen $\varphi_\nu(x)$ entsprechen. Die unter B definierte, in (L^1) unbedingt konvergente Reihe (13), geht in eine in (L^1) unbedingt konvergente Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu f_\nu(x)$$

über. Da

$$\int_0^1 |f_\nu(x)|\, dx > a > 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3 \ldots)$$

ist, so müßte nach Satz 1 die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu|^2$$

konvergieren. Nach der Definition der Folge $\{a_\nu\}$ ist aber diese Reihe sicher divergent.

[6]) Alles, was den Begriff und Theorie der linearen Dimension betrifft, findet man im Buche: S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932; vgl. insb. Chap. XI, XII.

Bemerkung. Im Zusammenhang mit Satz 2 bemerken wir, daß

$$\dim_l (L^2) \leqslant \dim_l (L^1)$$

ist. Man erhält am einfachsten die entsprechende isomorphe Abbildung, indem man einer Folge $\{a_\nu\}$ aus (l^2) (es ist zu beachten, daß (l^2) und (L^2) isomorph sind) die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \psi_\nu(x) = f(x) \qquad f(x) \in (L^1)$$

zuordnet, wo $\psi_\nu(x)$ die RADEMACHERschen Orthogonalfunktionen bedeuten. Aus den bekannten Eigenschaften des RADEMACHERschen Systems folgt gleich, daß diese Abbildung umkehrbar stetig ist [7]).

Satz 3. *Zwei verschiedene Räume* (L^α), $\alpha > 1$, *sind nie isomorph* [8]).

Beweis. Die Unmöglichkeit der Isomorphie zweier Räume (L^α), (L^β) wenn $\alpha > \beta$, $\beta > 2$, beweist man analog, wie den vorigen Satz mit Hilfe des Satzes 1. Andere Fälle kann mann auf diesen Fall zurückführen, wenn man beachtet, daß die zu isomorphen Räumen konjugierten Räume wieder isomorph sind [9]).

(Reçu par la Rédaction le 27. 3. 1933).

[7]) Vgl. dazu eine analoge Schlußweise in dem unter [6]) zit. Buche, p. 204.

[8]) Satz 3 haben wir nur als einfache Folgerung aus den vorhergehenden Sätzen angeführt. Er ist als Spezialfall in dem schärferen Satze der Herren Banach und Mazur enthalten, demzufolge zwei Räume (L^α) mit verschiedenen α nicht von gleicher linearer Dimension sind. Vgl. [6]).

[9]) Siehe l. c. [6]) p. 188.