## Sur la propriété de Baire dans les groupes métriques [1])

par

C. KURATOWSKI (Lwów).

Un espace métrique dans lequel on a défini l'addition de ses éléments de façon que $1^0$: l'espace constitue un groupe et $2^0$: les opérations $x+y$ ainsi que $-x$ sont continues, est nommé *groupe métrique*. D'après un théorème important de M. BANACH, *dans un groupe métrique, chaque sous-groupe jouissant de la propriété de Baire est, soit un ensemble de première catégorie, soit un ensemble simultanément fermé et ouvert* [2]).

Nous allons voir dans cette note que ce théorème, de caractère mixte, se laisse déduire d'un théorème *purement topologique*, qui en présente d'ailleurs une généralisation.

Remarquons au préalable que l'addition $a+x$, considérée comme fonction de $x$ (désignons la par $h_a(x)$), présente une *automorphie topologique* de l'espace, c. à d. une transformation biunivoque et bicontinue de l'espace entier en lui-même. De plus, à chaque couple $x, y$ de points correspond un indice $a$ tel que $y = h_a(x)$. Exprimons ce fait en disant que la famille $\mathcal{H}$ de toutes les fonctions $h_a$ ($a$ parcourt l'espace entier) détermine *l'homogénéité de l'espace*.

[1]) Communication présentée à la Soc. Pol. de Math. à Lwów le 25. 2. 1933.

[2]) Ueber metrische Gruppen, ces Studia 3 (1931) p. 101—113 et p. 20 de la Théorie des opérations linéaires, (Monografje Mat. 1, Warszawa 1932) où l'on trouvera des nombreuses applications du théorème considéré.

Par définition, un ensemble jouit de la *propriété de Baire*, lorsque chaque ensemble ouvert contient un point où soit l'ensemble considéré soit son complémentaire est de I-re catégorie. Tous les ensembles que l'on rencontre „pratiquement" dans les applications jouissent de cette propriété, de sorte que l'hypothèse qu'un ensemble la possède n'est pas, en réalité, très restrictive.



Remarquons, en outre, que $Z$ *étant un sous-groupe, on a*:
(°) *soit* $Z = h(Z)$, *soit* $Z \cdot h(Z) = 0$, *pourvu que* $h$ *appartienne à* $\mathcal{H}$.

Les deux remarques précédentes suggèrent de formuler le théorème de M. BANACH de la façon suivante:

Théorème. *Etant donnés un espace métrique arbitraire* [3]) $E$ *et une famille* $\mathcal{H}$ *d'automorphies qui détermine l'homogénéité de cet espace, chaque ensemble* $Z$ *qui satisfait à la condition* (°) *et qui jouit de la propriété de Baire est, soit un ensemble de I-re catégorie, soit un ensemble fermé et ouvert.*

Le théorème de M. BANACH en est une conséquence directe. La démonstration du théorème ainsi formulé ne différera pas essentiellement de celle de M. BANACH.

Observons d'abord que, $h$ étant une automorphie, chaque propriété topologique qui appartient à $Z$ au point $x$ (de $Z$) appartient aussi à l'ensemble $h(Z)$ au point $y = h(x)$. Si, en particulier, $y \in Z$, il vient, d'après (°), $Z = h(Z)$, de sorte que $Z$ *est un ensemble homogène.*

Il en résulte que, si $Z$ est en un de ses points de I-re catégorie, il l'est en chaque point (donc $Z$ est, tout court, de I-re catégorie [4])).

D'une façon analogue, si $Z$ contient un point intérieur, chacun de ses points est intérieur, donc $Z$ est *ouvert.* Plus encore: $Z$ est, en outre, *fermé.* En effet, soit $y$ un point d'accumulation de $Z$; il s'agit de prouver que $y \in Z$. Or, soient $x$ un point de $Z$ et $h$ une automorphie (appartenant à $\mathcal{H}$) telle que $y = h(x)$. L'ensemble $Z$ étant ouvert par hypothèse, il en de même de $h(Z)$. Comme ensemble ouvert contenant un point d'accumulation de $Z$ (notamment le point $y$), $h(Z)$ ne peut être disjoint de $Z$. Donc, selon (°), $Z = h(Z)$, d'où $y \in Z$.

Ceci établi, il suffit de démontrer que, dans l'hypothèse que $Z$ n'est en aucun point de I-re catégorie, il existe un ensemble ouvert contenu dans $Z$.

[3]) Nous ne demandons ni que l'espace soit complet ni qu'il soit séparable. On pourrait même se débarrasser de l'hypothèse que l'espace soit métrique, en admettant comme terme primitif la „fermeture" $\overline{X}$ assujettie aux trois axiomes suivants:

$\overline{X+Y} = \overline{X} + \overline{Y}$, $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$, $\overline{X} = X$ lorsque $X$ contient un point au plus.

[4]) S. Banach, Théorème sur les ensembles de première catégorie, Fund. Math. 16 (1930) p. 395—398.

Or, l'hypothèse faite sur $Z$ implique, en vertu de la propriété de Baire, l'existence d'un point $x$ appartenant à $Z$ en lequel l'ensemble $E-Z$ est de I-re catégorie. Soit donc $G$ un ensemble ouvert tel que $x \in G$ et $G-Z$ est de I-re catégorie. Nous allons prouver que $G \subset Z$.

Supposons, par contre, que $y \in G-Z$. Soit $h$ une automorphie (appartenant à $\mathcal{H}$) telle que $y=h(x)$. Comme $y \in h(Z)-Z$, il vient selon (°): $Z \cdot h(Z)=0$, d'où $h(Z) \subset E-Z$, donc $G \cdot h(Z) \subset G-Z$, ce qui prouve que $G \cdot h(Z)$ est un ensemble de I-re catégorie, donc que l'ensemble $h(Z)$ est de I-re catégorie au point $y=h(x)$. Mais alors, conformément à la remarque faite au début de la démonstration, l'ensemble $Z$ serait nécessairement de I-re catégorie au point $x$, tandis que nous avons supposé que $Z$ n'est en aucun de ses points de I-re catégorie.

Nous sommes parvenus ainsi à la contradiction prévue.

*(Reçu par la Rédaction le 11. 3. 1933).*

---

## Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen (II)

von

W. ORLICZ (Lwów).

In dieser Note werden wir den Satz 3 der gleichbetitelten Arbeit[1]) aufs neue beweisen und in einer bestimmten Weise auf $(L^{\alpha})$ mit $\alpha \geqslant 2$ verallgemeinern.

Hilfssatz. *Mit $f_1(x)$, $f_2(x)$ seien zwei beliebige Funktionen aus dem Raume $(L^{\alpha})$ bezeichnet. Es gibt dann immer ein Vorzeichen $\varepsilon = \pm 1$, so daß die Ungleichung besteht:*

a) *für* $1 < \alpha \leqslant 2$

$$(1)\qquad \left(\int_0^1 |f_1(x)+\varepsilon f_2(x)|^{\alpha} dx\right)^{\frac{2}{\alpha}} \geqslant \left(\int_0^1 |f_1(x)|^{\alpha} dx\right)^{\frac{2}{\alpha}} + M_{\alpha}\left(\int_0^1 |f_2(x)|^{\alpha} dx\right)^{\frac{2}{\alpha}};$$

b) *für* $\alpha \geqslant 2$

$$(2)\qquad \int_0^1 |f_1(x)+\varepsilon f_2(x)|^{\alpha} dx \geqslant \int_0^1 |f_1(x)|^{\alpha} dx + M_{\alpha}\int_0^1 |f_2(x)|^{\alpha} dx. \text{[2])}$$

*Dabei bedeutet $M_{\alpha}$ eine Konstante, die von der Wahl der Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x)$ unabhängig ist.*

Beweis. 1°. Wir betrachten zuerst den Fall a).

Es bestehen für $1 < \alpha \leqslant 2$ folgende elementare Ungleichungen:

$$|1+z|^{\alpha} \geqslant 1+\alpha z + Mz^2, \quad \text{für } |z| \leqslant 1,$$
$$|1+z|^{\alpha} \geqslant 1+\alpha z + M|z|^{\alpha}, \quad \text{für } |z| \geqslant 1,$$

[1]) W. Orlicz, Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen, diese Studia 4 (1933) p. 33—37.

[2]) Wie Herr Banach dem Verfasser freundlichst mitgeteilt hat, war ihm die Ungleichung (2) bereits seit langer Zeit bekannt.