Man kann nun im Satze 2 in der Beziehung (1) $\sigma_n(x)$ an die Stelle von

$$\sum_{\nu=}^{n} c_\nu \varphi_\nu(x)$$

setzen (die Existenz aller $\sigma_n(x)$ ist also mitbehauptet), und im Satze 1 unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Limitierungsmethode zeilenfinit ist. In dem Hilfssatze darf man statt der asymptotischen Konvergenz der Reihe (5) nur die asymptotische Konvergenz der entsprechenden T-Transformierten voraussetzen[7]). In den Sätzen 3, 4 kann man endlich behaupten, daß die T-Transformierten $\sigma_n(x)$ von (10) nicht asymptotisch konvergieren (um die Existenz von $\sigma_n(x)$ zu garantieren, muß man sich aber im Satze 3 auf zeilenfinite Limitierungsmethoden beschränken).

(Reçu par la Rédaction le 9. 2. 1933).

[7]) Genauer gesagt, die asymptotische Konvergenz der T-Transformierten der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n(x)$, wo wir $\varepsilon_n = 1$ für $n = n_i$ und sonst Null setzen.

Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen (I)

von

W. ORLICZ (Lwów).

Es bezeichne V irgendeinen linearen metrischen vollständigen Raum mit verschiebbarer Metrik: $(x, y) = (x - y, \Theta)$. Eine Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu, \tag{1}$$

wo $x_\nu \in V$, heißt in V *unbedingt konvergent*, wenn sie bei jeder Anordnung ihrer Glieder im Sinne der vorhandenen Metrik konvergiert.

Wir beweisen zuerst den folgenden elementaren Satz:

S a t z 1. *Hinreichend und notwendig dafür, daß die Reihe* (1) *in V unbedingt konvergiere, ist die Konvergenz der Teilreihe*

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i} \tag{2}$$

für jede Indexfolge $\{n_i\}$, $n_{i+1} > n_i$.

B e w e i s. 1°. Zuerst setzen wir voraus, daß die Reihe (2) immer konvergiert. Mit (x, y) bezeichnen wir die Entfernung zweier Elemente $x, y \in V$; ferner bezeichnen wir mit

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu^* \tag{3}$$

eine Reihe, die nur in der Anordnung ihrer Glieder von der Reihe (1) verschieden ist und mit X_n ihre n-te Teilsumme. Wäre (3) nicht konvergent, dann könnte man, wie leicht einzusehen, eine Zahl $\varepsilon_0 > 0$ und zwei Indexfolgen $\{p_i\}$, $\{q_i\}$ mit den folgenden Eigenschaften angeben:

1) $p_i \leqslant q_i < p_{i+1} \leqslant q_{i+1}$,

2) $(X_{p_i}, X_{q_i}) \geqslant \varepsilon_0$,

3) jedes Element, welches in dem „Abschnitte" $X_{q_{i+1}} - X_{p_{i+1}}$ vorkommt, hat einen größeren Index als alle Elemente, die zu dem früheren Abschnitte $X_{q_i} - X_{p_i}$ gehören.

Wir ordnen nun in jedem Abschnitte die Elemente nach der Größe der ihnen entsprechenden Indizes um und bilden eine neue Reihe, indem wir die Elemente des ersten, zweiten u. s. w. Abschnittes der Reihe nach hintereinander schreiben. Die neu gebildete Reihe ist offenbar eine Teilreihe vom Typus (2) und sie müßte unserer Voraussetzung zufolge konvergieren. Das steht aber im Widerspruch zu 2).

2°. Nun nehmen wir an, daß die Reihe (1) unbedingt konvergiert, dabei aber die Teilreihe (2) divergiert. Wenn wir jetzt mit X_n die n-te Teilsumme der Teilreihe (2) bezeichnen, so müßten wie früher, ein $\varepsilon_0 > 0$ und zwei Indexfolgen $\{p_i\}$, $\{q_i\}$ mit den Eigenschaften 1), 2) existieren. Wir bezeichnen mit x_{k_i} alle Glieder der Reihe (1), die in keinem Abschnitte $X_{q_i} - X_{p_i}$ vorkommen und bilden eine neue Reihe, indem wir abwechselnd die Elemente x_{k_i} und die ganzen Abschnitte $X_{q_i} - X_{p_i}$ hintereinander schreiben. Die so gebildete Reihe, die ja nur eine Umordnung der Reihe (1) ist, müßte also konvergieren. Dies steht aber im Widerspruch zu 2).

Im Falle der Räume (L^{α}) $(\alpha \geqslant 1)$ der mit der α-ten Potenz integrierbaren Funktionen gelten folgende Sätze über unbedingt konvergente Reihen:

Satz 2. *Wenn die Funktionenreihe*

$$(4) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x) \qquad f_\nu(x) \in (L^{\alpha}), \quad \alpha \geqslant 1$$

im Raume (L^{α}) *unbedingt konvergiert, dann besteht die Ungleichung*

$$(5) \qquad \int_0^1 \left[\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu^2(x)\right]^{\frac{\alpha}{2}} dx \leqslant K \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots).$$

[1]) H. Rademacher, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, Math. Ann. 87 (1922) p. 112—138.

Beweis. Wir bezeichnen mit $\psi_n(t)$ die n-te Funktion des Rademacherschen Ortogonalsystems [1]). Wenn die Reihe (4) im (L^{α}) unbedingt konvergiert, so gibt es, wie man leicht mit Hilfe des vorigen Satzes beweist, eine Konstante $K > 0$ so, daß die Ungleichung

$$(6) \qquad \int_0^1 \left|\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x)\, \psi_\nu(t)\right|^{\alpha} dx < K \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots)$$

gleichmäßig für alle t erfüllt ist. Nun besteht für die Rademacherschen Orthogonalfunktionen die folgende Beziehung [2]):

$$(7) \qquad \left[\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu^2\right]^{\frac{\alpha}{2}} < B \int_0^1 \left|\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu\, \psi_\nu(t)\right|^{\alpha} dt \qquad (\alpha > 0).$$

Indem wir in (7) $c_\nu = f_\nu(x)$ setzen und auf beiden Seiten nach x integrieren, erhalten wir

$$\int_0^1 \left[\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu^2(x)\right]^{\frac{\alpha}{2}} dx \leqslant B \int_0^1 dx \int_0^1 \left|\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(x)\, \psi_\nu(t)\right|^{\alpha} dt.$$

Die Anwendung des Fubinischen Satzes auf das rechts stehende Integral ergibt mit (6) unseren Satz.

Bemerkung 1. Es ist leicht zu sehen, daß es genügt im Satze 2 statt der unbedingten Konvergenz in (L^{α}) die Ungleichung

$$\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^{m} f_{n_i}(x)\right|^{\alpha} dx < K$$

für beliebige Indizes $n_1, n_2 \ldots n_m$ vorauszusetzen.

Bemerkung 2. Aus (5) folgt insbesondere die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu^2(x)$$

fast überall [3]).

[2]) Siehe A. Khintchine, Über dyadische Brüche, Math. Zeitschr. 18 (1923) p. 109—116, und R. E. A. C. Paley - A. Zygmund, On Some Series of Functions (I), Proc. Cambr. Phil. Soc. 26 (1930) p. 337—357.

[3]) Vgl. W. Orlicz, Quelques théorèmes sur les séries orthogonales, Comptes Rendus 194 (1932, séance du 13 juin).

Für $\alpha = 2$ besagt der Satz 2, daß die unbedingte Konvergenz der Reihe (4) die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^1 f_\nu^2(x)\, dx$$

zur Folge hat. Dies läßt sich folgendermassen verallgemeinern:

Satz 3. *Wenn die Reihe* (4) *unbedingt in* (L^α) $(1 \leqslant \alpha \leqslant 2)$ *konvergiert, dann ist die Reihe*

$$(8) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\int_0^1 |f_\nu(x)|^\alpha dx \right)^{\frac{2}{\alpha}}$$

konvergent.

Beweis. Es gilt die folgende Abschätzung:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \int_0^1 |f_\nu(x)|^\alpha dx \,.\, d_\nu = \int_0^1 \left(\sum_{\nu=1}^{n} |f_\nu(x)|^\alpha d_\nu \right) dx \leqslant$$

$$\int_0^1 \left[\sum_{\nu=1}^{n} f_\nu^2(x) \right]^{\frac{\alpha}{2}} dx \left(\sum_{\nu=1}^{n} |d_\nu|^{\frac{2}{2-\alpha}} \right)^{\frac{2-\alpha}{2}}.$$

Die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \int_0^1 |f_\nu(x)|^\alpha dx \,.\, d_\nu$$

konvergiert also immer dann, wenn die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |d_\nu|^{\frac{2}{2-\alpha}}$$

konvergiert, woraus nach dem bekannten Landauschen Satze die Konvergenz der Reihe (8) folgt.

Wir wollen noch auf eine Anwendung des letzten Satzes hindeuten. Zuerst bemerken wir, daß die Reihe

$$(9) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \varphi_\nu(x),$$

wo

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2 < +\infty$$

ist, unbedingt in (L^2) und folglich auch in (L^α) $(1 \leqslant \alpha \leqslant 2)$ konvergiert, falls $\{\varphi_\nu(x)\}$ ein normiertes Orthogonalsystem bildet.

Nun stellen wir uns die einigermaßen umgekehrte Frage: wenn $\{\varphi_\nu(x)\}$ irgendeine Funktionenfolge bedeutet, die der Bedingung

$$\int_0^1 |\varphi_\nu(x)|^\alpha dx = 1$$

genügt, welcher Bedingung müssen dann die *Koeffizienten* c_ν genügen, wenn die Reihe (9) unbedingt in (L^α) $(1 \leqslant \alpha \leqslant 2)$ konvergieren soll?

Aus dem Satz 3 folgt unmittelbar, daß die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu^2$$

eine notwendige Bedingung dafür ist.

(Reçu par la Rédaction le 23. 2. 1933).