1) $|\varphi_n(t)| < A$,

2) $\int_0^1 \left| \sum_1^n \varphi_k(u)\,\varphi_k(t) \right| dt < K \qquad (n=1,2,\ldots)$,

3) $\{\varphi_n\}$ *complet dans* L^2,

alors la condition nécessaire et suffisante pour $\{h_n\} \in (L, L^2)$ *est*

$$\sum_1^\infty h_n^2 < +\infty .$$

Démonstration. La suffisance étant évidente, montrons la nécessité. Pour ce but, posons

$$x_n(t) = \sum_1^n \varphi_k(u)\,\varphi_k(t) ;$$

$x_n(t)$ appartient donc à L et dépend d'un paramètre u. Sa transformée

$$U(x_n) = \sum_1^n h_k \varphi_k(u)\,\varphi_k(t)$$

étant continue, on a

$$\sqrt{\sum_1^n h_k^2\,\varphi_k^2(u)} \leqslant B\,\|x_n\| < B.K ,$$

d'où

$$\sum_1^\infty h_k^2 < +\infty .$$

Remarque. Le théorème subsiste, si nous remplaçons dans la condition 2) le noyau de la sommation ordinaire par le noyau d'une méthode toeplitzienne.

(Reçu par la Rédaction le 21. 1. 1933).

Über die Divergenz von allgemeinen Orthogonalreihen

von

W. ORLICZ (Lwów).

Im folgenden werden einige allgemeine Sätze über die Divergenz von Orthogonalreihen mit nullkonvergenten Koeffizienten bewiesen. Als Definitionsintervall wird immer das Intervall $I \equiv (0,1)$ angenommen.

Satz 1. *Für jedes in* (L^2) *vollständige Orthogonalsystem* $\{\varphi_\nu(x)\}$ *gibt es eine nullkonvergente Zahlenfolge* $\{c_\nu\}$, *so daß*

(1) $$\limsup_{n\to\infty} \left| \sum_{\nu=1}^n c_\nu \varphi_\nu(x) \right| = +\infty$$

fast überall gilt[1]).

Beweis. Für ein in (L^2) vollständiges Orthogonalsystem $\{\varphi_\nu(x)\}$ divergiert die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^\infty \varphi_\nu^2(x)$$

fast überall[2]). Daraus schließt man leicht mit Hilfe des bekannten Egoroffschen Satzes, daß es eine nullkonvergente Zahlenfolge $\{d_\nu\}$ gibt, für die die Reihe

(2) $$\sum_{\nu=1}^\infty d_\nu^2\,\varphi_\nu^2(x)$$

fast überall divergiert. Wir behaupten, daß wenn wir d_ν entsprechend mit Vorzeichen $\pm$ versehen, die Beziehung

[1]) Ohne Beweis zuerst angegeben in der Note: W. Orlicz, Quelques théorèmes sur les développements orthogonaux, Comptes Rendus 194 (4 janvier 1932).

[2]) Siehe: W. Orlicz, Zur Theorie der Orthogonalreihen, Bull. Ac. Pol. (1927) p. 81—115.

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\sum_{\nu=1}^{n}\pm d_\nu\varphi_\nu(x)\right|=+\infty \tag{3}$$

fast überall gelten wird. Zum Beweise bezeichnen wir mit $\psi_n(t)$ die n-*te* Funktion des RADEMACHERschen Orthogonalsystems [3]).

Wäre die Relation (3) bei keiner Vorzeichenverteilung fast überall erfüllt, so müßte für jedes t aus $(0,1)$ die Beziehung

$$\limsup_{n\to\infty}\left|\sum_{\nu=1}^{n}d_\nu\psi_\nu(t)\varphi_\nu(x)\right|<+\infty \tag{4}$$

in einer Menge $E(t)$ der Werte von x von positivem Maße bestehen. Daraus folgt, daß die ebene Menge $\mathfrak{A}$ aller der Punkte (x,t) aus dem Einheitsquadrate, für die (4) erfüllt ist, auch von positivem Maße ist. Nach dem FUBINIschen Satze gibt es also eine Menge von x-Werten $\bar{E}$ von positivem Maße, so daß für jedes $x\in\bar{E}$ die Ungleichung (4) in einer Menge der t-Werte von positivem Maße besteht. Daraus ergibt sich — nach einem Satze des Herrn KOLMOGOROFF [4]) — die Konvergenz der Reihe (2) für jedes $x\in\bar{E}$. Dies ist aber unmöglich, da die Reihe (2) fast überall divergiert.

Satz 2. *Gegeben sei ein gleichmäßig beschränktes Orthogonalsystem* $\{\varphi_\nu(x)\}$ *und eine Zahlenfolge* $\{d_\nu\}$, *für die*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}d_\nu^2=+\infty$$

ist. Es existiert dann eine Zahlenfolge $\{\varepsilon_\nu\}$, $\varepsilon_\nu=\pm1$, *so daß,* $c_\nu=\varepsilon_\nu d_\nu$ *gesetzt, die Beziehung* (1) *in einer Menge von positivem Maße besteht.*

Beweis. Die Reihe (2) ist unter unseren Voraussetzungen zwar nicht fast überall, aber jedenfalls in einer Menge von positivem Maße divergent. Der Beweis verläuft sonst dem Beweise des vorhergehenden Satzes ganz analog.

---

[3]) Siehe: H. Rademacher, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen, Math. Ann. 87 (1922) p. 112—138.

[4]) Khintchine-Kolmogoroff, Über Konvergenz von Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden, Recueil Math. de Moscou 32 (1925) p. 668—677.

Hilfssatz. *Wenn für eine beliebige Indexfolge* $\{n_i\}$ $(n_{i+1}>n_i)$ *die Reihe*

$$\sum_{i=1}^{\infty}f_{n_i}(x) \tag{5}$$

asymptotisch in $(0,1)$ *konvergiert, dann ist die Reihe*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}f_\nu^2(x) \tag{6}$$

fast überall konvergent [5]).

Beweis. Bezeichnen wir mit $\alpha_n(t)$ für $n=1,2,\dots$ irgendeine stückweise konstante Funktion, die nur die Werte $0,\pm1$ annimmt. Wir bezeichnen ferner mit A_{nm} diejenige Menge der Werte von t, für welche die Ungleichung

$$\left|\sum_{\nu=n}^{m}f_\nu(x)\,\alpha_\nu(t)\right|\geqq\varepsilon \qquad (m\geqq n) \tag{7}$$

in einer Menge $E(t)$ der Werte von x vom Maße $|E(t)|<\eta$ besteht (diese Menge ist natürlich von t abhängig). Die Menge A_{nm} ist meßbar. Es sei nämlich F die Menge aller gemeinsamen Stetigkeitspunkte der Funktionen $\alpha_p(t)$, $p=n,\ n+1,\dots m$; es bezeichne weiter $\{t_i\}$ eine Punktfolge mit den Eigenschaften

$$t_i\in CA_{nm},\quad \lim_{i\to\infty}t_i=t_0,\quad t_0\in F.$$

Dann gilt

$$|\limsup_{i\to\infty}E(t_i)|\geqq\limsup_{i\to\infty}|E(t_i)|\geqq\eta\,.$$

Wenn $x_0\in\limsup_{i\to\infty}E(t_i)$, dann gibt es eine Teilfolge $\{t_{n_i}\}$, so daß

$$\left|\sum_{\nu=n}^{m}f_\nu(x_0)\,\alpha_\nu(t_{n_i})\right|\geqq\varepsilon\,,$$

also auch

$$\left|\sum_{\nu=n}^{m}f_\nu(x_0)\,\alpha_\nu(t_0)\right|\geqq\varepsilon$$

besteht. Das bedeutet aber, daß $\limsup_{i\to\infty}E(t_i)\subset E(t_0)$ und folglich nach dem vorangehenden $|E(t_0)|\geqq\eta$ ist. Die Menge $CF+CA_{nm}$

---

[5]) Ohne Beweis zuerst ausgesprochen in der Note: W. Orlicz, Quelques théorèmes sur les séries orthogonales, Comptes Rendus 194 (1932) p. 2118—2120.

ist also abgeschlossen, was natürlich die Meßbarkeit von A_{nm} beweist. Nun setzen wir speziell $\alpha_n(t) = \psi_n(t)$ und

$$B_N = \prod_{n=N}^{\infty} \prod_{m=n}^{\infty} A_{nm}, \quad C_1 = B_1, \quad C_N = B_N - B_{N-1} - \ldots B_1,$$

die Mengen C_N sind also meßbar. Unserer Voraussetzung zufolge ist die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} f_\nu(x)\,\psi_\nu(t) \tag{8}$$

für jedes t aus $(0,1)$ asymptotisch konvergent. Die Menge aller der Punkte t, für welche N die kleinste natürliche Zahl bedeutet, für die die Ungleichung $m \geqslant n \geqslant N$ die Relation (7) in einer Menge $E(t)$ mit $|E(t)| < \eta$ zur Folge hat, ist mit C_N identisch. Da $C_N \,.\, C_{N'} = 0$ für $N \neq N'$ ist, gibt es ein N_0 mit

$$\left| \sum_{N=N_0+1}^{\infty} C_N \right| < \eta.$$

Für jedes

$$t \in \left(I - \sum_{N=N_0+1}^{\infty} C_N \right)$$

besteht die Ungleichung

$$\left| \sum_{\nu=n}^{m} f_\nu(x)\,\psi_\nu(t) \right| \geqslant \varepsilon \tag{9}$$

für $m \geqslant n \geqslant N_0$ in einer Menge $E(t)$, deren Maß $|E(t)| < \eta$ ist. Für

$$t \in \sum_{N=N_0+1}^{\infty} C_N$$

ist jedenfalls $|E(t)| \leqslant 1$. Daraus folgt, daß für $m \geqslant n \geqslant N_0$ die Ungleichung (9) in einer ebenen Menge $\mathfrak{A}_{nm}$ der Punkte (x, t) mit dem Maße $|\mathfrak{A}_{nm}| < 2\eta$ besteht. Daraus sieht man aber, daß die Reihe (8) in dem Einheitsquadrate

$$0 < x < 1, \quad 0 < t < 1$$

asymptotisch konvergiert. Bekanntlich gibt es also eine Funktion $f(x, t)$ und eine Indexfolge $\{n_i\}$ derart, daß die Beziehung

$$\lim_{i \to \infty} \sum_{\nu=1}^{n_i} f_\nu(x)\,\psi_\nu(t) = f(x, t)$$

fast überall im Einheitsquadrate gilt. Eine analoge Schlußweise wie am Ende des Beweises des vorigen Satzes und die Anwendung eines Satzes des Herrn A. Zygmund [6]) zeigt, daß die Reihe (6) fast überall konvergiert.

Bemerkung. Eine Funktionenreihe heißt *asymptotisch unbedingt konvergent,* wenn sie bei jeder Anordnung ihrer Glieder asymptotisch konvergiert.

Die asymptotische Konvergenz der Reihe (5) bei jeder Indexfolge $\{n_i\}$ ist mit der unbedingten asymptotischen Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

äquivalent.

Satz 3. *Für jedes in* (L^2) *vollständige Orthogonalsystem* $\{\varphi_\nu(x)\}$ *gibt es eine nullkonvergente Zahlenfolge* $\{c_\nu\}$, *so daß die Reihe*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu\,\varphi_\nu(x) \tag{10}$$

nicht asymptotisch konvergent ist.

Satz 4. *Für jedes gleichmäßig beschränkte Orthogonalsystem* $\{\varphi_\nu(x)\}$ *und jede Zahlenfolge* $\{d_\nu\}$ *mit*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu^2 = +\infty$$

gibt es eine Zahlenfolge $\{\varepsilon_\nu\}$, $\varepsilon_\nu = \pm 1$, *so daß,* $c_\nu = d_\nu \varepsilon_\nu$ *gesetzt, die Reihe* (10) *nicht asymptotisch konvergiert.*

Man beweist diese Sätze analog wie die Sätze 1, 2, man muß nur statt des Satzes von Kolmogoroff bezw. A. Zygmund unseren Hilfssatz anwenden.

Alle vorangehenden Sätze lassen eine wichtige Verallgemeinerung zu:

Es bezeichne T irgendeine Toeplitzsche Limitierungsmethode; mit $\sigma_n(x)$ bezeichnen wir die n-te T-Transformierte der Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu\,\varphi_\nu(x).$$

[6]) Siehe: A. Zygmund, On the convergence of lacunary trigonometric series, Fund. Math. 16 (1930) p. 90—107, insb. p. 97 und p. 100 (Additional remarks).

Man kann nun im Satze 2 in der Beziehung (1) $\sigma_n(x)$ an die Stelle von

$$\sum_{\nu=}^{n} c_\nu \varphi_\nu(x)$$

setzen (die Existenz aller $\sigma_n(x)$ ist also mitbehauptet), und im Satze 1 unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Limitierungsmethode zeilenfinit ist. In dem Hilfssatze darf man statt der asymptotischen Konvergenz der Reihe (5) nur die asymptotische Konvergenz der entsprechenden T-Transformierten voraussetzen [7]). In den Sätzen 3, 4 kann man endlich behaupten, daß die T-Transformierten $\sigma_n(x)$ von (10) nicht asymptotisch konvergieren (um die Existenz von $\sigma_n(x)$ zu garantieren, muß man sich aber im Satze 3 auf zeilenfinite Limitierungsmethoden beschränken).

(Reçu par la Rédaction le 9. 2. 1933).

[7]) Genauer gesagt, die asymptotische Konvergenz der T-Transformierten der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n f_n(x)$, wo wir $\varepsilon_n = 1$ für $n = n_i$ und sonst Null setzen.

Über unbedingte Konvergenz in Funktionenräumen (I)

von

W. ORLICZ (Lwów).

Es bezeichne V irgendeinen linearen metrischen vollständigen Raum mit verschiebbarer Metrik: $(x,y) = (x-y, \Theta)$. Eine Reihe

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu, \tag{1}$$

wo $x_\nu \in V$, heißt in V *unbedingt konvergent*, wenn sie bei jeder Anordnung ihrer Glieder im Sinne der vorhandenen Metrik konvergiert.

Wir beweisen zuerst den folgenden elementaren Satz:

Satz 1. *Hinreichend und notwendig dafür, daß die Reihe* (1) *in V unbedingt konvergiere, ist die Konvergenz der Teilreihe*

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_{n_i} \tag{2}$$

für jede Indexfolge $\{n_i\}$, $n_{i+1} > n_i$.

Beweis. 1°. Zuerst setzen wir voraus, daß die Reihe (2) immer konvergiert. Mit (x,y) bezeichnen wir die Entfernung zweier Elemente $x, y \in V$; ferner bezeichnen wir mit

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} x_\nu^* \tag{3}$$

eine Reihe, die nur in der Anordnung ihrer Glieder von der Reihe (1) verschieden ist und mit X_n ihre n-te Teilsumme. Wäre (3) nicht konvergent, dann könnte man, wie leicht einzusehen, eine Zahl $\varepsilon_0 > 0$ und zwei Indexfolgen $\{p_i\}$, $\{q_i\}$ mit den folgenden Eigenschaften angeben: