l'avons introduit seulement pour simplifier la démonstration d'équivalence des théorèmes I et II. Or, on peut démontrer sans peine que si le théorème I est vrai pour les suites *croissantes* d'indices $m_1, m_2, m_3, \ldots$, il est encore vrai pour les suites *quelconques* d'indices $m_1, m_2, m_3, \ldots$.

Remarque II. MM. BANACH et KURATOWSKI ont démontré que leurs théorème II est équivalent à un théorème concernant les suites infinies d'entiers positifs[4]), et j'ai démontré[5]) que le théorème II est équivalent à la proposition suivante: *Il existe une suite infinie de fonctions $f_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ définies pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ qui converge non uniformément sur tout ensemble non dénombrable.*

Nous connaissons donc actuellement trois théorèmes équivalents au théorème II de MM. BANACH et KURATOWSKI.

(Reçu par la Rédaction le 1. 4. 1932).

[4]) l. c., p. 130.

[5]) Fund. Math. 14 (1929) p. 277—279.

Sur les multiplicateurs des séries orthogonales

par

S. KACZMARZ (Lwów).

1. Envisageons un système orthogonal $\{\varphi_n(t)\}$ de fonctions définies dans l'intervalle $(0,1)$ et deux classes de fonctions A et B. Soit $\{h_n\}$ une suite numérique jouissant de la propriété suivante: si la série

$$\sum a_n \varphi_n(t)$$

est le développement d'une fonction de la classe A, alors

$$\sum h_n a_n \varphi_n(t)$$

est le développement d'une fonction de la classe B. Nous dirons alors que la suite $\{h_n\}$ est un *multiplicateur* et nous désignerons par (A, B) l'ensemble de tous les multiplicateurs transformant la classe A en une sousclasse de B.

Le problème des multiplicateurs pour le système trigonométrique a été l'objet d'étude de plusieurs auteurs. Dans le cas de séries orthogonales voilà quelquesunes de propriétés connues[1]): Désignons par L^p, M, C respectivement les classes des fonctions intégrables avec la p-ième puissance, bornées, continues. Alors:

1) Si les $\varphi_n(t)$ sont continues, la suite $\{\varphi_n\}$ étant fermée dans C, on a

$$(C, C) = (M, M).$$

2) Si $\varphi_n(t) \in L^p$, $1 < p \leqslant 2$, la suite étant complète dans L^p et

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

[1]) H. Steinhaus, Bull. Ac. Pol. 1926; th. 9, p. 28. W. Orlicz, Stud. Math. 1 (1929) p. 18—26.

on a

$$(L^p, L^p) = (L^{p'}, L^{p'}),$$

$$(L^p, L^p) \subset (L^q, L^q) \text{ pour } p < q < p'.$$

3) Si les φ_n sont bornées, la suite $\{\varphi_n\}$ étant fermée dans C[2]), on a

$$(L, L) = (M, M).$$

2. Commençons par un théorème sur les opérations linéaires, qui est une légère généralisation d'un théorème connu.

Envisageons une suite $\{x_n\}$ des éléments d'un espace abstrait du type (B) et $\{f_n\}$ une suite de fonctionnelles linéaires dans cet espace; nous dirons, que la suite $\{x_n, f_n\}$ est *biorthogonale*, si l'on a

$$f_n(x_m) = \begin{cases} 0 \text{ pour } n \neq m \\ 1 \text{ pour } n = m. \end{cases}$$

On appelle *les coefficients d'un élément* x les valeurs $f_n(x)$, et *les coefficients d'une fonctionnelle* F les valeurs $F(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$ L'ensemble de fonctionnelles $g(y)$ est *total*, si les équations $g(y) = 0$ pour chaque fonctionnelle g de cet ensemble entraînent $y = 0$. On voit, que tout système orthogonal complet dans l'espace A est un ensemble total.

Le théorème mentionné plus haut est le suivant

Théorème 1. *Soient* $\{x_i, f_i\}$ *une suite biorthogonale dans l'espace* A *du type* (B), $\{y_i, g_i\}$ *une suite biorthogonale dans l'espace* B *du type* (B), $\{g_i\}$ *étant une suite totale, et* $\{h_n\}$ *une suite des nombres transformant les coefficients de chaque élément* x *de* A *en coefficients d'un élément* y *de* B.

Dans ces conditions, la suite $\{h_n\}$ *transforme les coefficients d'une fonctionnelle linéaire* F, *définie dans* A, *en coefficients d'une fonctionnelle linéaire* Φ, *définie dans* B.

Démonstration. La suite $\{g_n\}$ étant totale, le système d'équations

$$g_i(y) = h_i f_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

admet pour chaque x exactement une solution $y = U(x)$.

[2]) Ce théorème de M. Orlicz a été généralisé par lui-même, en substituant l'hypothèse „fermée dans C", par „complète dans L". Cf. th. 4.

[3]) Cf. S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932, chap. VII, th. 8, p. 113.

En particulier, si $z_i = U(x_i)$, on a $g_k(z_i) = h_k f_k(z_i)$, donc

$$g_k(z_i) = 0 \text{ pour } k \neq i \text{ et } g_i(z_i) = h_i,$$

ce qui donne

$$z_i = h_i y_i \text{ et } U(x_i) = h_i y_i.$$

Étant donnée une fonctionnelle linéaire F telle que $b_i = F(y_i)$, on a

$$F[U(x_i)] = h_i F(y_i) = h_i b_i,$$

donc

$$h_i b_i = \Phi(x_i).$$

Cette fonctionnelle Φ est linéaire. En effet, les égalités

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = x, \quad \lim_{n\to\infty} \eta_n = y, \qquad \text{où } \eta_n = U(\xi_n),$$

entraînent, les f_i et g_i étant continues, l'égalité $y = U(x)$; par conséquant, l'opération $y = U(x)$ est continue[4]), donc Φ est linéaire.

Théorème 2. *Si le système orthogonal* $\{\varphi_n(t)\}$ *est complet dans* $L^{p'}$, *les fonctions* φ_n *étant bornées, alors*

$$(L^p, M) = (L, L^{p'}) \qquad \textit{pour } p > 1.$$

Démonstration. Posons dans le théorème 1

$$A = L^p, \; x_n = \varphi_n(t), \; f_n(x) = \int_0^1 \varphi_n(t)\, x(t)\, dt,$$

et

$$B = M, \; y_n = \varphi_n(t), \; g_n = \int_0^1 \varphi_n(t)\, y(t)\, dt.$$

La suite g_n est complète dans M, puisque $M \subset L^{p'}$. Soit $\{h_i\}$ un multiplicateur de la classe (L^p, M) et $b_i = F(y_i)$; en particulier soit

$$b_i = \int_0^1 f(t)\, \varphi_i(t)\, dt,$$

où $f(t) \in L$; alors la suite

$$h_i b_i = \Phi(x_i) = \int_0^1 g(t)\, \varphi_i(t)\, dt,$$

[4]) Cf. S. Banach, loc. cit., chap. III, th. 7, p. 41.

où $g(t) \in L^{p'}$, est une suite de coefficients d'une fonction de la classe $L^{p'}$.

Réciproquement, si $\{h_i\} \in (L, L^{p'})$, posons

$$A = L, \; B = L^p \text{ et } b_i = F(y_i) = \int_0^1 f(t)\,\varphi_i(t)\,dt\,,$$

où $f(t) \in L^p$, alors

$$h_i b_i = \Phi(x_i) = \int_0^1 g(t)\,\varphi_i(t)\,dt\,,$$

où $g(t) \in M$.

Théorème 3. *Si le système orthogonal $\{\varphi_n\}$ est complet dans L et les $\varphi_n(t)$ sont bornées, on a*

$$(L^p, L^q) = (L^{q'}, L^{p'}) \qquad (p > 1,\; q > 1)\,.$$

Théorème 4. *Sous la condition, que la suite orthogonale $\{\varphi_n\}$ est complète dans L et les $\varphi_n(t)$ sont bornées, on a*

$$(L^p, L) = (M, L^{p'}) \qquad (p \geqslant 1)\,.$$

La démonstration des ces théorèmes est analogue a celle du théorème 2 [5]).

Théorème 5. *Soit $\{\varphi_n\}$ un système orthogonal de fonctions continues, fermé dans L^p et complet dans M. Alors*

$$(L^p, M) = (L^p, C) \qquad (p \geqslant 1)\,.$$

Démonstration. Il suffit de démontrer que

$$(L^p, M) \subset (L^p, C)\,.$$

Soit $x(t)$ une fonction de L^p, $\{h_n\} \in (L^p, M)$ et $y = U(x)$ sa transformée. Prenons une suite $\sigma_n(t)$ de polynomes orthogonaux convergeant (suivant la norme) vers x. L'opération $U(x)$ étant, d'après la démonstration du théorème 1, continue, on sait que

$$\|\sigma_n - \sigma_m\| \to 0 \text{ entraîne } \|U(\sigma_n) - U(\sigma_m)\| \to 0\,,$$

c'est à dire que les $U(\sigma_n)$, étant des fonctions continues de t, tendent uniformément vers $U(x)$, donc $y = U(x)$ est une fonction de la classe C.

[5]) On obtient la relation $(M, L^p) \subset (L^p, L)$, en répétant le raisonnement de M. Orlicz, l. c. p. 23; (Beweis 2[0]).

Théorème 6. *Si la suite orthogonale $\{\varphi_n\}$ est complète dans L^p et les φ_n appartiennent à L^p, on a*

$$(C, L^p) = (M, L^p) \qquad (p > 1)\,.$$

Démonstration. Il suffit de prouver, que $(C, L^p) \subset (M, L^p)$. Soient $x(t) \in C$, $\{h_n\} \in (C, L^p)$ et $y = U(x)$, où $y \in L^p$, la transformée de x. Soit de plus $f(t)$ une fonction bornée; il existe alors une suite de fonctions continues $f_n(t)$ telle que

$$\|f_n\| \leqslant \|f\|,$$

et $f_n(t) \to f(t)$ presque partout.

L'opération $U(x)$ étant continue, nous avons

$$\|U\| \leqslant K\|x\|,$$

d'où

$$\|U(f_n)\| \leqslant K\|f\|\,.$$

On peut donc extraire une suite $U(f_n)$ faiblement convergente vers une fonction $g(t)$ de L^p. Alors, pour $h(t) \in L^{p'}$,

$$\int_0^1 U(f_k)\,h(t)\,dt \to \int_0^1 g(t)\,h(t)\,dt\,,$$

et en particulier,

$$\int_0^1 U(f_k)\,\varphi_i(t)\,dt \to \int_0^1 g(t)\,\varphi_i(t)\,dt\,.$$

En désignant

$$\int_0^1 f(t)\,\varphi_i(t)\,dt$$

par a_i, nous avons

$$h_i a_i = \int_0^1 g(t)\,\varphi_i(t)\,dt\,.$$

La suite $\{h_n\}$ transforme ainsi les fonctions bornées en fonctions de l'espace L^p.

Théorème 7. *Si La suite orthogonale $\{\varphi_n\}$ possède les propriétés*

1) $|\varphi_n(t)| < A$,

2) $\int\limits_0^1 \left| \sum\limits_1^n \varphi_k(u)\, \varphi_k(t) \right| dt < K \qquad (n = 1, 2, \ldots)$,

3) $\{\varphi_n\}$ *complet dans* L^2,

alors la condition nécessaire et suffisante pour $\{h_n\} \in (L, L^2)$ *est*

$$\sum_1^\infty h_n^2 < +\infty .$$

Démonstration. La suffisance étant évidente, montrons la nécessité. Pour ce but, posons

$$x_n(t) = \sum_1^n \varphi_k(u)\, \varphi_k(t);$$

$x_n(t)$ appartient donc à L et dépend d'un paramètre u. Sa transformée

$$U(x_n) = \sum_1^n h_k \varphi_k(u)\, \varphi_k(t)$$

étant continue, on a

$$\sqrt{\sum_1^n h_k^2 \varphi_k^2(u)} \leqslant B \| x_n \| < B.K,$$

d'où

$$\sum_1^\infty h_k^2 < +\infty .$$

Remarque. Le théorème subsiste, si nous remplaçons dans la condition 2) le noyau de la sommation ordinaire par le noyau d'une méthode toeplitzienne.

(Reçu par la Rédaction le 21. 1. 1933).

Über die Divergenz von allgemeinen Orthogonalreihen

von

W. ORLICZ (Lwów).

Im folgenden werden einige allgemeine Sätze über die Divergenz von Orthogonalreihen mit nullkonvergenten Koeffizienten bewiesen. Als Definitionsintervall wird immer das Intervall $I \equiv (0,1)$ angenommen.

Satz 1. *Für jedes in* (L^2) *vollständige Orthogonalsystem* $\{\varphi_\nu(x)\}$ *gibt es eine nullkonvergente Zahlenfolge* $\{c_\nu\}$, *so daß*

(1) $$\limsup_{n\to\infty} \left| \sum_{\nu=1}^n c_\nu \varphi_\nu(x) \right| = +\infty$$

fast überall gilt[1]).

Beweis. Für ein in (L^2) vollständiges Orthogonalsystem $\{\varphi_\nu(x)\}$ divergiert die Reihe

$$\sum_{\nu=1}^\infty \varphi_\nu^2(x)$$

fast überall[2]). Daraus schließt man leicht mit Hilfe des bekannten Egoroffschen Satzes, daß es eine nullkonvergente Zahlenfolge $\{d_\nu\}$ gibt, für die die Reihe

(2) $$\sum_{\nu=1}^\infty d_\nu^2 \varphi_\nu^2(x)$$

fast überall divergiert. Wir behaupten, daß wenn wir d_ν entsprechend mit Vorzeichen $\pm$ versehen, die Beziehung

[1]) Ohne Beweis zuerst angegeben in der Note: W. Orlicz, Quelques théorèmes sur les développements orthogonaux, Comptes Rendus 194 (4 janvier 1932).

[2]) Siehe: W. Orlicz, Zur Theorie der Orthogonalreihen, Bull. Ac. Pol. (1927) p. 81—115.