$$\delta_1(\tau) = \frac{1}{\tau}\int_{(\sigma)} \psi_2(y)\, d\sigma \qquad \text{si } (\tau) \text{ coupe } (S) \text{ suivant } (\sigma),$$

$\psi_1(y)$ et $\psi_2(y)$ étant certaines fonctions continues.

Quand $K(\tau, x)$ satisfait à la condition (8), $\overset{1}{K}(x, y)$ étant symmétrique, on trouve que

$$\psi_k(\tau) = \frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} V(\tau)\, \varphi_k(y)\, d\tau \quad (= \varphi_k(\tau)), \tag{125}$$

$\varphi_k(x)$ étant la fonction fondamentale correspondante de l'équation (5); les fonctions $\varphi_k(x)$ et $\varphi_e(x)$ répondant aux nombres caractéristiques inégales, on a

$$\int_{(T_y)} \varphi_e(\tau)\, \varphi_k(y)\, d\tau = \int_{(T_y)} V(\tau)\, \varphi_k(y)\, \varphi_e(y)\, d\tau = 0\,.$$

Dans le cas mentionné, les théorèmes du chapître 4 montrent [178—181] au surplus, que, si

$$F(x) = \int_{(T_y)} K(x, y) f(y)\, d\tau, \qquad F(\omega) = \frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} V(\omega)\, F(x)\, d\omega,$$

où $f(y)$ est une fonction au carré sommable, on a

$$F(x) = \sum c_k \varphi_k(\omega)\,, \qquad c_k = \int_{(T_y)} V(\omega)\, F(x)\, \varphi_k(\lambda)\, d\omega\,,$$

la série étant uniformément convergente [56]; on a, de plus, presque partout

$$F(x) = \sum c_k \varphi_k(x)\,.$$

En appliquant un théorème de M. Severini on peut constater que, si les nombres caractéristiques forment une suite illimitée, la suite des fonctions $\varphi_k(x)$ est fermée [472—478]. On conclut de là que, pour chaque fonction $F(x)$ au carré sommable, on aura

$$\frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} F(x)\, d\tau = \sum c_k \cdot \frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} \varphi_k(x)\, d\tau\,, \qquad c_k = \int_{(T_x)} F(x)\, \varphi_k(x)\, d\omega\,,$$

la série étant convergente; on peut, même, démontrer qu'elle est uniformément convergente.

*(Reçu par la Rédaction le 26. 11. 1932).*

# Sur l'équivalence de deux conséquences de l'hypothèse du continu

par

W. SIERPIŃSKI (Varsovie).

En rapport avec un théorème connu de M. Fréchet concernant les suites doubles de fonctions j'ai démontré récemment, en admettant l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, le théorème I suivant:

Théorème I. *Il existe une fonction $f(x)$, une suite infinie de fonctions $f^m(x)$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ et une suite double de fonctions $f^m_n(x)$ $(m = 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots)$, toutes définies pour $0 \leqslant x \leqslant 1$, telles que*

(1) $$\lim_{n=\infty} f^m_n(x) = f^m(x), \text{ pour } m = 1, 2, 3, \ldots,$$

(2) $$\lim_{m=\infty} f^m(x) = f(x),$$

*et que, quelles que soient la suite infinie croissante d'indices $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$ et la suite infinie d'indices $n_1, n_2, n_3, \ldots$, l'égalité*

(3) $$\lim_{k=\infty} f^{m_k}_{n_k}(x) = f(x)$$

*ne peut avoir lieu que pour les nombres $x$ de l'intervalle* $(0, 1)$ *formant un ensemble au plus dénombrable*[1]).

Le but de cette Note est de démontrer (sans admettre l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$) que *le théorème* I *est équivalent au théo-*

[1]) Monatshefte für Math. u. Phys. 39 (1932) p. 233—238.

*rème* II suivant, démontré (à l'aide de l'hypothèse que $2^{\aleph_0}=\aleph_1$) par MM. Banach et Kuratowski[2] [3]):

Théorème II. *E désignant l'intervalle* $(0\leqslant x\leqslant 1)$, *il existe une double suite d'ensembles* $A_n^m$, *telle que* 1°:

$$E=A_1^1+A_2^1+A_3^1+\ldots,$$
$$E=A_1^2+A_2^2+A_3^2+\ldots,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$E=A_1^m+A_2^m+A_3^m+\ldots,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

2°: *les ensembles d'une même ligne sont disjoints,*
3°: *quelle que soit la suite d'entiers positifs* $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$, *le produit*

$$\prod_{m=1}^{\infty}\left(A_1^m+A_2^m+\ldots+A_{n_m}^m\right)$$

*est au plus dénombrable.*

Supposons que le théorème I est vrai et posons pour $m$ naturels et $n$ naturels $>1$:

$$A_1^m=\prod_{i=1}^{\infty}\mathrm{E}\left[|f_i^m(x)-f^m(x)|<\frac{1}{m}\right] \tag{4}$$

et

$$A_n^m=\prod_{i=n}^{\infty}\mathrm{E}\left[|f_i^m(x)-f^m(x)|<\frac{1}{m}\right]-\mathrm{E}\left[|f_{n-1}^m(x)-f^m(x)|<\frac{1}{m}\right]. \tag{5}$$

Je dis que la suite double d'ensembles $A_n^m$ satisfait aux conditions du théorème II.

En effet, soit $m$ un indice donné, $x$ un nombre de l'intervalle $(0,1)$. D'après (1) il existe un indice $p$ tel que

$$|f_i^m(x)-f^m(x)|<\frac{1}{m}$$

pour $i\geqslant p$: soit $n$ le plus petit de tels indices $p$; d'après (4) et (5) on voit sans peine que $x\in A_n^m$. La suite $A_n^m$ satisfait donc à la condition 1° du théorème II. Or, d'après (4) et (5) on voit aussi qu'elle satisfait à la condition 2°.

Soit maintenant $n_1, n_2, n_3, \ldots$ une suite infinie d'entiers positifs. D'après (4) et (5) on a

$$A_1^m+A_2^m+\ldots+A_{n_m}^m=\prod_{i=n_m}^{\infty}\mathrm{E}\left[|f_i^m(x)-f^m(x)|<\frac{1}{m}\right]$$

et

$$\prod_{m=1}^{\infty}\left(A_1^m+A_2^m+\ldots+A_{n_m}^m\right)=\prod_{m=1}^{\infty}\prod_{i=n_m}^{\infty}\mathrm{E}\left[|f_i^m(x)-f^m(x)|<\frac{1}{m}\right]. \tag{6}$$

Soit

$$x\in\prod_{m=1}^{\infty}\left(A_1^m+A_2^m+\ldots+A_{n_m}^m\right); \tag{7}$$

d'après (6) nous avons donc

$$|f_i^m(x)-f^m(x)|<\frac{1}{m}\quad\text{pour } i\geqslant n_m,\ m=1,2,3,\ldots,$$

donc, en particulier:

$$|f_{n_m}^m(x)-f^m(x)|<\frac{1}{m},\ \text{pour } m=1,2,3,\ldots,$$

ce qui donne, d'après (2),

$$\lim_{m=\infty}f_{n_m}^m(x)=f(x),$$

ce qui ne peut avoir lieu, d'après les conditions du théorème I, que pour les nombres $x$ de $(0,1)$ formant un ensemble au plus dénombrable.

Donc la formule (7) ne peut avoir lieu que pour les nombres $x$ de $(0,1)$ formant un ensemble au plus dénombrable. La suite double $A_n^m$ jouit donc la propriété 3° et le théorème II est vrai.

Supposons maintenant que le théorème II est vrai. Soit $A_n^m$ la suite double d'ensembles satisfaisant aux conditions du théorème II. Posons, pour $m$ et $n$ naturels,

$$S_n^m=A_1^m+A_2^m+\ldots+A_n^m \tag{8}$$

et

$$P_n^m=S_n^1 S_n^2\ldots S_n^m, \tag{9}$$

[2]) Fundamenta Mathematicae 14 (1929) p. 128.
[3]) C'est M. S. Banach qui a attiré mon attention sur le rapport étroit entre les théorèmes I et II.

et définissons pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ la suite double de fonctions $f_n^m(x)$ comme il suit:

(10) $$f_n^m(x) = 0, \text{ si } x \in P_n^m$$

et

(11) $$f_n^m(x) = 1, \text{ si } x \text{ non } \in P_n^m.$$

Je dis que la suite double $f_n^m(x)$ satisfait aux conditions du théorème I.

En effet, soit $x$ un nombre donné de l'intervalle $(0,1)$, $m$ un indice donné. D'après 1° il existe des indices $n_1, n_2, \ldots, n_m$ tels que

$$x \in A_{n_i}^i \text{ pour } i = 1, 2, \ldots, m,$$

d'où, d'après (8) et (9),

$$x \in P_n^m \text{ pour } n > \mu_m = n_1 + n_2 + \ldots + n_m,$$

donc, d'après (10):

$$f_n^m(x) = 0 \text{ pour } n > \mu_m,$$

ce qui donne

$$f^m(x) = \lim_{n=\infty} f_n^m(x) = 0$$

et

$$\lim_{m=\infty} f^m(x) = 0,$$

donc les formules (1) et (2) pour $f(x) = 0$.

Soient maintenant $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots\ldots$ une suite infinie croissante, $n_1, n_2, n_3, \ldots$ une suite infinie quelconque d'indices, et admettons que la formule (3) a lieu pour une infinité non dénombrable $N$ de nombres $x$ de $(0,1)$. Soit $x$ un nombre de $N$; d'après (3), (10) et (11) il existe donc un indice $q = q(x)$, tel que

(13) $$x \in P_{n_i}^{m_i} \text{ pour } i > q.$$

Désignons, pour $q$ naturels, par $N_q$ l'ensemble de tous les nombres $x$ de $N$, pour lesquels on a la formule (13); nous aurons évidemment

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + \ldots$$



et, l'ensemble $N$ étant non dénombrable, il existe un indice $r$ tel que l'ensemble $N_r$ est non dénombrable.

D'après la définition de l'ensemble $N_r$, on a

(14) $$N_r \subset P_{n_i}^{m_i} \text{ pour } i > r.$$

La suite infinie d'indices $m_i (i = 1, 2, 3, \ldots)$ étant croissante, on a $m_i \geqslant i$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots$, ce qui donne, d'après (9),

$$P_{n_i}^{m_i} \subset S_{n_i}^i \text{ pour } i = 1, 2, 3, \ldots$$

et la formule (14) donne

(15) $$N_r \subset S_{n_i}^i \text{ pour } i > r.$$

Or, d'après 1° et (8), on trouve sans peine

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} S_n^1 S_n^2 \ldots S_n^r,$$

d'où, d'après $N_r \subset E$:

$$N_r = \sum_{n=1}^{\infty} N_r S_n^1 S_n^2 \ldots S_n^r$$

et, l'ensemble $N_r$ étant non dénombrable, il existe un indice $s$ tel que l'ensemble

(16) $$Z = N_r S_s^1 S_s^2 \ldots S_s^r$$

est non dénombrable.

Or, d'après (16), on a $Z \subset N_r$ et $Z \subset S_s^i$ pour $i = 1, 2, \ldots, r$, ce qui donne, d'après (15),

$$Z \subset S_s^1 S_s^2 \ldots S_s^r S_{n_{r+1}}^{r+1} S_{n_{r+2}}^{r+2} S_{n_{r+3}}^{r+3} \ldots,$$

ce qui est, d'après (8), en contradiction avec la condition 3°.

L'ensemble de tous les nombres $x$ de $(0,1)$ vérifiant la formule (3) est donc au plus dénombrable.

Nous avons ainsi démontré que la suite double de fonctions $f_n^m(x)$ satisfait aux conditions du théorème I qui est ainsi démontré.

L'équivalence des théorèmes I et II est ainsi établie.

R e m a r q u e I. Dans le théorème I la condition que la suite d'indices $m_1, m_2, m_3, \ldots$ soit *croissante* n'est pas essentielle: nous l'avons introduit seulement pour simplifier la démonstration d'équivalence des théorèmes I et II. Or, on peut démontrer sans peine que si le théorème I est vrai pour les suites *croissantes* d'indices $m_1, m_2, m_3, \ldots$, il est encore vrai pour les suites *quelconques* d'indices $m_1, m_2, m_3, \ldots$.

Remarque II. MM. BANACH et KURATOWSKI ont démontré que leurs théorème II est équivalent à un théorème concernant les suites infinies d'entiers positifs[4]), et j'ai démontré[5]) que le théorème II est équivalent à la proposition suivante: *Il existe une suite infinie de fonctions $f_n(x)$ $(n=1,2,3,\ldots)$ définies pour $0 \leqslant x \leqslant 1$ qui converge non uniformément sur tout ensemble non dénombrable.*

Nous connaissons donc actuellement trois théorèmes équivalents au théorème II de MM. BANACH et KURATOWSKI.

*(Reçu par la Rédaction le 1. 4. 1932).*

[4]) l. c., p. 130.
[5]) Fund. Math. 14 (1929) p. 277—279.

## Sur les multiplicateurs des séries orthogonales

par

S. KACZMARZ (Lwów).

1. Envisageons un système orthogonal $\{\varphi_n(t)\}$ de fonctions définies dans l'intervalle $(0,1)$ et deux classes de fonctions A et B. Soit $\{h_n\}$ une suite numérique jouissant de la propriété suivante: si la série

$$\sum a_n \varphi_n(t)$$

est le développement d'une fonction de la classe A, alors

$$\sum h_n a_n \varphi_n(t)$$

est le développement d'une fonction de la classe B. Nous dirons alors que la suite $\{h_n\}$ est un *multiplicateur* et nous désignerons par (A, B) l'ensemble de tous les multiplicateurs transformant la classe A en une sousclasse de B.

Le problème des multiplicateurs pour le système trigonométrique a été l'objet d'étude de plusieurs auteurs. Dans le cas de séries orthogonales voilà quelquesunes de propriétés connues[1]): Désignons par $L^p, M, C$ respectivement les classes des fonctions intégrables avec la $p$-ième puissance, bornées, continues. Alors:

1) Si les $\varphi_n(t)$ sont continues, la suite $\{\varphi_n\}$ étant fermée dans $C$, on a

$$(C,C)=(M,M).$$

2) Si $\varphi_n(t) \in L^p$, $1<p\leqslant 2$, la suite étant complète dans $L^p$ et

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1,$$

[1]) H. Steinhaus, Bull. Ac. Pol. 1926; th. 9, p. 28. W. Orlicz, Stud. Math. 1 (1929) p. 18—26.