Sur le problème des „Belastete Integralgleichungen"

par

N. GUNTHER (Leningrade).

(Extrait d'une lettre à Mr. L. Lichtenstein).

Retournons maintenant à Votre note dans les *Studia* [1]). Ayant pris la connaissance de son contenu, j'ai essayé à résoudre le problème en appliquant les méthodes que j'ai exposé au Congrès de Bologne. Ayant en vue la commodité des citations de mon mémoire sur les intégrales de Stieltjes [2]), j'emploie mes notations [3]).

Il s'agit de résoudre l'équation

$$(1) \qquad \varphi(x) = \lambda \int_{(T_y)} \overset{1}{K}(x,y)\,\varphi(y)\,d\tau + \lambda \int_{(S)} \overset{2}{K}(x,y)\,\varphi(y)\,d\sigma + f(x),$$

dans laquelle (x) et (y) sont les points d'un domaine (T); (S) est la frontière de (T); (S) est une courbe fermeé ayant en chaque point une tangente déterminée, qui varie continûment; $d\sigma$ est l'élement de (S), traitée comme le lieu géométrique des points (y); $d\tau$ est l'élement de (T_y). Nous désignons par (T_x), respectivement par (T_y), le domaine (T) traité comme le lieu géométrique des points (x), respectivement des points (y).

La fonction $\overset{1}{K}(x,y)$ est une fonction continue des points (x) et (y) dans le domaine fermé (T); la fonction $\overset{2}{K}(x,y)$ comme

[1]) L. Lichtenstein, Bemerkungen über belastete Integralgleichungen, Studia mathematica 3 (1931) p. 212–225.

[2]) Gunther, Sur les intégrales de Stieltjes et leurs applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique, Travaux de l'Institut physico-mathématique Stekloff 1 (1932).

[3]) Les chiffres entre les crochets indiquent les pages du mémoire [2]).

fonction de (y) n'est définie que sur (S); elle est continue comme fonction des points (x) dans le domaine fermé (T_x); comme fonction des points (y) elle est continue sur (S).

Introduisons des fonctions moyennes. En désignant par (τ) un domaine [4] appartenant à (T_y) et par (σ) un domaine d'une dimension appartenant à (S), posons

$$(2) \qquad u(\tau,x) = \frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} \overset{1}{K}(x,y)\,d\tau, \qquad v(\sigma,x) = \frac{1}{\sigma}\int_{(\sigma)} \overset{2}{K}(x,y)\,d\sigma;$$

nous désignons par τ et σ les mesures des domaines (τ) et (σ).

Convenons, pour commodité, de dire que le domaine (τ) ne coupe pas (S), si les points communs à (τ) et à (S) ne constituent pas un domaine à une dimension; que le domaine (τ) coupe (S) suivant (σ), si les points communs à (τ) et à (S) forment un domaine (σ).

Comme la tangente à (S) varie continûment, on peut, en appliquant le procédé des pages 218, 219 [4]) former la fonction moyenne $w(\tau,x)$ en supposant que

$$(3) \qquad \begin{array}{ll} w(\tau,x) = 0 & \text{si } (\tau) \text{ ne coupe pas } (S), \\ w(\tau,x)\,\tau = v(\sigma,x)\,\sigma & \text{si } (\tau) \text{ coupe } (S) \text{ suivant } (\sigma). \end{array}$$

Posons

$$(4) \qquad K(\tau,x) = u(\tau,x) + w(\tau,x).$$

L'équation (1) prend la forme

$$(5) \qquad \varphi(x) = \lambda \int_{(T_y)} K(\tau,x)\,\varphi(y)\,d\tau + f(x);$$

on a, en effet,

$$\int_{(T_y)} \left(\frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} \overset{1}{K}(x,y)\,d\tau\right)\varphi(y)\,d\tau = \int_{(T_y)} \overset{1}{K}(x,y)\,\varphi(y)\,d\tau \qquad [61]$$

$$\int_{(T_y)} w(\tau,x)\,\varphi(y)\,d\tau = \int_{(S)} v(\sigma,x)\,\varphi(y)\,d\sigma.$$

[4]) Au commencement du ch. 5 est faite la supposition que la frontière (S) répond aux conditions de Liapounoff. Mais pour les raisonnements des pages 218, 219 cette supposition n'est pas indispensable; on l'utilise seulement dans la page 219 en affirmant que, si la projection d'un segment dans les conditions posées est plus petite que ε, le segment ne dépasse pas 2ε, ce qui a lieu dans les circonstances plus générales.

L'associée de l'équation (5) a la forme

$$\psi(\tau)=\lambda\int_{(T_x)} K(\tau,x)\,\psi(\omega)\,d\omega+F(\tau)\,, \tag{6}$$

où (ω) est un domaine appartenant à (T_x); elle défini, conformément aux considérations du chapître 3, une fonction moyenne.

Posons

$$\begin{aligned} u(\tau)&=0 && \text{si } (\tau) \text{ ne coupe pas } (S),\\ u(\tau)\,\tau&=\sigma && \text{si } (\tau) \text{ coupe } (S) \text{ suivant } (\sigma). \end{aligned}$$

Si

$$\left|\overset{1}{K}(x,y)\right|<A\,,\qquad \left|\overset{2}{K}(x,y)\right|<A\,,$$

on a

$$\begin{gathered} |u(\tau,x)|<A\,,\qquad |w(\tau,x)|<A\,u(\tau)\,,\\ |K(\tau,x)|<A(1+u(\tau))=V_1(\tau)\,. \end{gathered} \tag{7}$$

Les fonctions $\overset{1}{K}(x_1,y)$ et $\overset{2}{K}(x,y)$ étant uniformément continues, nous avons

$$\left|\overset{1}{K}(x_1,y)-\overset{1}{K}(x_2,y)\right|<\varepsilon\,,\qquad \left|\overset{2}{K}(x_1,y)-\overset{2}{K}(x_2,y)\right|<\varepsilon\,,$$

si la distance entre les points (x_1) et (x_2) ne dépasse pas ϱ; on conclut de là, que

$$|K(\tau,x_1)-K(\tau,x_2)|<\varepsilon V(\tau)\,,\qquad V_1(\tau)=A\,V(\tau)\,;$$

on a, en effet, si (τ) coupe (S) suivant (σ),

$$|w(\tau,x_1)-w(\tau,x_2)|=\frac{1}{\tau}\left|\int_{(\sigma)}(\overset{2}{K}(x_1,y)-\overset{2}{K}(x_2,y))\,d\sigma\right|<\varepsilon\,\frac{\sigma}{\tau}=\varepsilon\,u(\tau)\,.$$

Il suit de là, que le noyau $K(\tau,x)$ répond à la condition (A), étant fini [94]. On peut donc appliquer aux équations (5) et (16) les résultats du chapître 3.

Si la fonction $\overset{2}{K}(x,y)$ est continûment prolongée comme fonction de (y) dans l'intérieur du domaine (T_y), on a

$$w(\tau,x)=\frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} u(\tau)\,\overset{2}{K}(x,y)\,d\tau\,.$$

Si l'on a, au surplus, dans (T)

$$\overset{2}{K}(x,y)=\overset{1}{K}(x,y)\,,$$

on voit que

$$K(\tau,x)=\frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} V(\tau)\,\overset{1}{K}(x,y)\,d\tau\,, \tag{8}$$

c'est à dire que le noyau $K(\tau,x)$ est un des noyaux envisagés dans ma communication au congrès de Bologne.

Si $\overset{1}{K}(x,y)$ est symmétrique, le noyau $K(\tau,x)$ répond à la condition (C) [121], la moyenne $V(\tau)$ répondant évidemment à la condition (B) [120]; il y a même de plus: le noyau répond strictement à la condition (D) [148].

Passons maintenant à la discussion de l'équation (5).

En appliquant la théorie du chapître 3, nous obtenons sans calculs: si $D\left(\begin{smallmatrix}x\\ \tau\end{smallmatrix}\,|\,\lambda\right)$ et $D(\lambda)$ sont définies par les formules de la page 97, on a

$$\begin{aligned} \varphi(x)&=f(x)+\lambda\int_{(T_y)} f(y)\,\frac{D\left(\begin{smallmatrix}x\\ \tau\end{smallmatrix}\,|\,\lambda\right)}{D(\lambda)}\,d\tau\,,\\ \psi(\tau)&=F(\tau)+\lambda\int_{(T_x)} F(\omega)\,\frac{D\left(\begin{smallmatrix}x\\ \tau\end{smallmatrix}\,|\,\lambda\right)}{D(\lambda)}\,d\omega\,. \end{aligned} \tag{9}$$

La première des formules (9) montre que la fonction $\varphi(x)$ est continue dans (T_x), si $f(x)$ y est continue.

Les fonctions

$$K\begin{pmatrix}x, & z_1, & z_2, & \ldots\ldots & z_n\\ \tau, & \xi_1, & \xi_2, & \ldots\ldots & \xi_n\end{pmatrix}, \tag{96}$$

où (ξ_i) est un domaine dans (T) traité comme le lieu géométrique des points z_i, sont continues comme fonctions du point (x) pour tous les (τ), $(\xi_1),\ldots,(\xi_n)$; il suit de là, que les intégrales

$$\int_{(T_{z_1})}\int_{(T_{z_2})}\cdots\cdots\int_{(T_{z_n})} K\begin{pmatrix}x, & z_1, & z_2, & \ldots\ldots & z_n\\ \tau, & \xi_1, & \xi_2, & \ldots\ldots & \xi_n\end{pmatrix} d\xi_1,\, d\xi_2\ldots d\xi_n$$

sont continues comme fonctions de (x) pour chaque choix de (τ) [69]; donc la résolvante $D\left(\frac{x}{\tau}\,|\,\lambda\right):D(\lambda)$ est continue et, à cause de cela, $\varphi(x)$ l'est aussi [69].

Occupons nous de la fonction moyenne $\psi(\tau)$. Envisageons pour cela l'équation (6). Suppons que $F(\tau)$ n'est pas une fonction moyenne à variation bornée arbitraire, mais qu'elle a la forme

$$\frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} f_1(y)\, d\tau + \vartheta(\tau),$$

où l'on obtient $\vartheta(\tau)$ de $w(\tau, x)$ en y substituant $f_2(y)$ à la place de $\overset{2}{K}(x,y)$, $f_2(y)$ étant définie sur (S); supposons que $f_1(y)$ et $f_2(y)$ sont continues.

Si (τ) ne coupe pas (S), on obtient de (6):

$$\psi(\tau) = \lambda \int\limits_{(T_x)} \left(\frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} \overset{1}{K}(x,y)\, d\tau\right) \psi(\omega)\, d\omega \qquad [64, 65]$$
$$+ \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} f_1(y)\, d\tau = \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} \psi_1(y)\, d\tau, \tag{10}$$

où

$$\psi_1(y) = \lambda \int\limits_{(T_x)} \overset{1}{K}(x,y)\, \psi(\omega)\, d\omega + f_1(y);$$

c'est à dire, dans l'intérieur de (T_y), $\psi(\tau)$ est égale à la moyenne d'une fonction continue $\psi_1(y)$.

Si (τ) coupe (S) suivant (σ), on a

$$\psi(\tau) = \lambda \int\limits_{(T_x)} \left(\frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} \overset{1}{K}(x,y)\, d\tau\right) \psi(\omega)\, d\omega$$
$$+ \lambda \int\limits_{(T_x)} \left(\frac{1}{\tau}\int\limits_{(\sigma)} \overset{2}{K}(x,y)\, d\sigma\right) \psi(\omega)\, d\omega + \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} f_1(y)\, d\tau + \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\sigma)} f_2(y)\, d\sigma. \tag{11}$$

En multipliant la dernière égalité par (τ) et en faisant tendre (τ) vers zéro, de manière que (σ) ne change pas, nous concluons que, pour $\psi(\tau)$, la ligne (S) est singulière et que

$$\lim_{\tau\to 0} \psi(\tau)\,\tau = \lambda \int\limits_{(T_x)} \left(\int\limits_{(\sigma)} \overset{2}{K}(x,y)\, d\sigma\right) \psi(\omega)\, d\omega + \int\limits_{(\sigma)} f_2(y)\, d\sigma. \qquad [392] \tag{12}$$

Ayant posé, comme il convient,

$$\lim \psi(\tau)\,\tau = \mu(\sigma)\,\sigma$$

on obtient

$$\mu(\sigma) = \lambda \cdot \frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} \left(\int\limits_{(T_x)} \overset{2}{K}(x,y)\, \psi(\omega)\, d\omega\right) d\sigma + \frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} f_2(y)\, d\sigma \tag{13}$$
$$= \frac{1}{\sigma}\int\limits_{(\sigma)} \psi_2(y)\, d\sigma,$$

où

$$\psi_2(y) = \lambda \int\limits_{(T_x)} \overset{2}{K}(x,y)\, \psi(\omega)\, d\omega + f_2(y).$$

Il suit de là, que

$$\psi(\tau) = \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} \psi_1(y)\, d\sigma + \delta(\tau), \tag{14}$$

où

$$\delta(\tau) = 0 \qquad \text{si } (\tau) \text{ ne coupe pas } (S),$$
$$\delta(\tau)\,\tau = \int\limits_{(\sigma)} \psi_2(y)\, d\sigma \qquad \text{si } (\tau) \text{ coupe } (S) \text{ suivant } (\sigma).$$

Remarquons que les formules (10) et (11) conduisent directement à ce résultat.

En substituant (14) dans l'équation (6), on obtient immédiatement les équations (40') et (41') de Votre note, les fonctions $\psi^{(*)}, \psi$ étant remplacées respectivement par ψ_1 et ψ_2.

La comparaison des formules (10) et (13) montre que l'on a sur (S)

$$\psi_2(y) = \psi_1(y),$$

si sur (S)

$$f_2(y) = f_1(y), \qquad \overset{2}{K}(x,y) = \overset{1}{K}(x,y).$$

Cette discussion épuise les résultats de Votre note. Or, en se servant des considérations du chapître 3, on peut affirmer, que les fonctions fondamentales de l'équation (5), en cas de leur existence, sont continues dans (T_x) et que les fonctions fondamentales de l'équation associée ont la forme

$$\psi_K(\tau) = \frac{1}{\tau}\int\limits_{(\tau)} \psi_1(y)\, d\tau + \delta_1(\tau),$$

où

$$\delta_1(\tau) = 0 \qquad \text{si } (\tau) \text{ ne coupe pas } (S),$$

$$\delta_1(\tau) = \frac{1}{\tau}\int_{(\sigma)} \psi_2(y)\, d\sigma \qquad \text{si } (\tau) \text{ coupe } (S) \text{ suivant } (\sigma)\,,$$

$\psi_1(y)$ et $\psi_2(y)$ étant certaines fonctions continues.

Quand $K(\tau, x)$ satisfait à la condition (8), $\overset{1}{K}(x, y)$ étant symétrique, on trouve que

$$\psi_k(\tau) = \frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} V(\tau)\, \varphi_k(y)\, d\tau \quad (= \varphi_k(\tau))\,, \qquad [125]$$

$\varphi_k(x)$ étant la fonction fondamentale correspondante de l'équation (5); les fonctions $\varphi_k(x)$ et $\varphi_e(x)$ répondant aux nombres caractéristiques inégales, on a

$$\int_{(T_y)} \varphi_e(\tau)\, \varphi_k(y)\, d\tau = \int_{(T_y)} V(\tau)\, \varphi_k(y)\, \varphi_e(y)\, d\tau = 0\,.$$

Dans le cas mentionné, les théorèmes du chapître 4 montrent [178—181] au surplus, que, si

$$F(x) = \int_{(T_y)} K(x, y) f(y)\, d\tau\,, \qquad F(\omega) = \frac{1}{\omega}\int_{(\omega)} V(\omega)\, F(x)\, d\omega\,,$$

où $f(y)$ est une fonction au carré sommable, on a

$$F(x) = \sum c_k\, \varphi_k(\omega)\,, \qquad c_k = \int_{(T_y)} V(\omega)\, F(x)\, \varphi_k(\lambda)\, d\omega\,,$$

la série étant uniformément convergente [56]; on a, de plus, presque partout

$$F(x) = \sum c_k\, \varphi_k(x)\,.$$

En appliquant un théorème de M. Severini on peut constater que, si les nombres caractéristiques forment une suite illimitée, la suite des fonctions $\varphi_k(x)$ est fermée [472—478]. On conclut de là que, pour chaque fonction $F(x)$ au carré sommable, on aura

$$\frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} F(x)\, d\tau = \sum c_k \cdot \frac{1}{\tau}\int_{(\tau)} \varphi_k(x)\, d\tau\,, \qquad c_k = \int_{(T_x)} F(x)\, \varphi_k(x)\, d\omega\,,$$

la série étant convergente; on peut, même, démontrer qu'elle est uniformément convergente.

(Reçu par la Rédaction le 26. 11. 1932).

Sur l'équivalence de deux conséquences de l'hypothèse du continu

par

W. SIERPIŃSKI (Varsovie).

En rapport avec un théorème connu de M. Fréchet concernant les suites doubles de fonctions j'ai démontré récemment, en admettant l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, le théorème I suivant:

Théorème I. *Il existe une fonction* $f(x)$, *une suite infinie de fonctions* $f^m(x)$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ *et une suite double de fonctions* $f^m_n(x)$ $(m = 1, 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots)$, *toutes définies pour* $0 \leqslant x \leqslant 1$, *telles que*

(1) $$\lim_{n=\infty} f^m_n(x) = f^m(x)\,, \quad \textit{pour } m = 1, 2, 3, \ldots,$$

(2) $$\lim_{m=\infty} f^m(x) = f(x)\,,$$

et que, quelles que soient la suite infinie croissante d'indices $m_1 < m_2 < m_3 < \ldots$ *et la suite infinie d'indices* $n_1, n_2, n_3, \ldots,$ *l'égalité*

(3) $$\lim_{k=\infty} f^{m_k}_{n_k}(x) = f(x)$$

ne peut avoir lieu que pour les nombres x *de l'intervalle* $(0, 1)$ *formant un ensemble au plus dénombrable*[1]).

Le but de cette Note est de démontrer (sans admettre l'hypothèse que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$) que *le théorème* I *est équivalent au théo-*

[1]) Monatshefte für Math. u. Phys. 39 (1932) p. 233—238.