

Sur les groupes linéaires bornés (II)

par

H. AUERBACH (Lwów).

Dans ce mémoire nous précisons les résultats de la première partie¹⁾ en les généralisant en même temps aux groupes ouverts. Nous déterminons d'abord la structure topologique des groupes abéliens²⁾ et nous démontrons que tout groupe abélien est un groupe à un générateur. Nous étudions ensuite le groupe linéaire continu borné et connexe le plus général. La simple remarque qu'un tel groupe est toujours un groupe *unitaire* permet de généraliser certains résultats de M. CARTAN³⁾, ainsi que les théorèmes établis précédemment pour les groupes clos, notamment le théorème sur l'existence d'une représentation trigonométrique du groupe entier⁴⁾. Nous précisons ce théorème en démontrant que le nombre des paramètres peut être supposé égal à l'ordre du groupe. Enfin, nous démontrons qu'un groupe linéaire connexe (continu ou non), dont tous les éléments sont bornés, est lui-même borné.

§ 1.

Le groupe linéaire abélien continu borné et connexe le plus général⁵⁾ est de la forme $e^{t_1 U_1 + \dots + t_r U_r}$, U_1, \dots, U_r désignant des

¹⁾ Studia Mathematica 4 (1934) p. 113—127; désignée dans la suite par I.

²⁾ Cf. A. Markoff, Sur les espaces vectoriels considérés comme groupes topologiques, Comptes Rendus 197: (1933) p. 610—612.

³⁾ E. Cartan, a) Les tenseurs irréductibles et les groupes linéaires simples et semi-simples, Bull. Sc. Math. (2) 49 (1925) p. 130—152; b) Groupes simples clos et ouverts et géométrie riemannienne, Journ. de Math. (9) 8 (1929) p. 1—33.

⁴⁾ I, p. 125.

⁵⁾ Voir plus loin p. 161, et I, p. 125.

matrices infinitésimales elliptiques échangeables indépendantes et t_1, \dots, t_r des paramètres réels.

Si le groupe G possède une base infinitésimale régulière, il est clos, donc isomorphe au groupe des rotations d'un tore à r dimensions⁶⁾.

Si le groupe G n'admet aucune matrice infinitésimale régulière, à deux systèmes des paramètres différents correspondent toujours deux éléments différents. En effet, dans le cas contraire on aurait une équation $e^{t_1^0 U_1 + \dots + t_r^0 U_r} = E$, les t_r^0 n'étant pas tous nuls et $\frac{1}{2\pi} (t_1^0 U_1 + \dots + t_r^0 U_r)$ serait une matrice infinitésimale régulière du groupe G ⁷⁾. Le groupe G est donc isomorphe au groupe formé par les translations de l'espace des paramètres. En le ramenant à la forme diagonale on voit aisément que ses coefficients sont des polynômes en $\sin \alpha_{pq} t_p$, $\cos \alpha_{pq} t_p$, les constantes α_{pq} étant réelles ($p = 1, \dots, r$; $q = 1, \dots, n$), c'est-à-dire des polynômes trigonométriques presque périodiques.

Dans le cas général, soit p ($0 < p < r$) le plus grand nombre de matrices infinitésimales régulières indépendantes du groupe G . Nous supposons la base du groupe choisie de manière que les p premières matrices soient régulières et que le groupe clos $e^{U_1 t_1 + \dots + U_p t_p}$ soit le produit direct des groupes $e^{U_1 t_1}, \dots, e^{U_p t_p}$ ⁸⁾. Les $r - p$ autres matrices sont alors irrégulières ainsi que toutes leurs combinaisons linéaires non nulles. Soit \overline{G} le plus petit groupe clos contenant le groupe G . Il admet une base infinitésimale régulière de la forme $U_1, \dots, U_p, V_1, \dots, V_q$ ($q > r - p$). Nous pouvons encore supposer⁹⁾ que \overline{G} est le produit direct des groupes $e^{U_1 t_1}, \dots, e^{U_p t_p}, e^{s_1 V_1}, \dots, e^{s_q V_q}$.

On a $U_{p+k} = \sum_{\nu} c_{k\nu} U_{\nu} + \sum_{\nu} d_{k\nu} V_{\nu}$ ($k = 1, \dots, r - p$), $c_{k\nu}, d_{k\nu}$ désignant des constantes réelles. Il est aisé de voir que les matrices $\tilde{V}_k = \sum_{\nu} d_{k\nu} V_{\nu}$ ($k = 1, \dots, r - p$) forment avec U_1, \dots, U_p une base infinitésimale du groupe G et que G est le produit direct des groupes $e^{t_1 U_1 + \dots + t_p U_p}$ et $e^{s_1 \tilde{V}_1 + \dots + s_{r-p} \tilde{V}_{r-p}}$.

⁶⁾ I, p. 121.

⁷⁾ I, p. 122. Il en résulte que, en dehors de l'élément unité, le groupe G ne contient aucune matrice cyclique.

⁸⁾ Cela résulte de la démonstration de Maurer (I, p. 121, note ¹⁰⁾).

Théorème I. *Un groupe linéaire continu abélien borné et connexe est ou bien clos et isomorphe au groupe des rotations d'un tore, ou bien ouvert et isomorphe au groupe des translations d'un espace euclidien, ou bien ouvert et produit direct de deux groupes appartenant respectivement à ces deux catégories.*

Nous supposons maintenant le groupe G mis sous la forme diagonale

$$\left(\sum_{v=1}^r a_{1v} t_v, \dots, \sum_{v=1}^r a_{nv} t_v \right)$$

a_{iv} désignant des nombres réels tels que la matrice (a_{iv}) a le rang r .

Une relation ⁹⁾

$$2b\pi + b_1 \sum_{v=1}^r a_{1v} t_v + \dots + b_n \sum_{v=1}^r a_{nv} t_v = 0$$

à coefficients entiers b, b_1, \dots, b_n est ou bien identiquement remplie ou bien seulement par certains éléments du groupe G , représentés dans l'espace des paramètres par les points d'un plan. Dans le premier cas on a évidemment $b=0$. Supposons que l'on a exactement $n-r'$ relations indépendantes identiquement remplies ($r' \geq r$). Les éléments satisfaisant en outre à une ou plusieurs relations non identiques sont représentés par des points qui remplissent une infinité dénombrable des plans. L'ensemble de ces éléments est donc de mesure nulle. Tous les autres sont des éléments normaux d'ordre r' et déterminent le même groupe normal ¹⁰⁾, à savoir le plus petit groupe clos contenant G .

Théorème II. *Soit G un groupe linéaire continu abélien borné et connexe d'ordre r . Presque tous les éléments du groupe G sont normaux et du même ordre $r' \geq r$. Ils engendrent le même groupe normal d'ordre r' , qui est le plus petit groupe clos contenant G . Par conséquent, G est un groupe à un générateur. Les éléments exceptionnels sont d'ordre $< r'$.*

⁹⁾ Voir I, p. 117.

¹⁰⁾ Cf. I, p. 122.

§ 2.

Soit G un groupe linéaire continu borné et connexe non commutatif. D'après les résultats de M. v. NEUMANN G est un groupe de Lie ¹¹⁾. Ses matrices infinitésimales sont elliptiques, puisque tout sous-groupe à un paramètre est borné ¹²⁾. Il en résulte que les racines caractéristiques des matrices infinitésimales du groupe adjoint sont purement imaginaires. En effet, toute racine caractéristique de la matrice adjointe à une matrice infinitésimale est la différence de deux racines caractéristiques de celle-ci ¹³⁾. La forme quadratique représentant la somme des carrés des racines de la matrice adjointe est donc définie ou semi-définie négative, c'est-à-dire G est un groupe unitaire. D'après un théorème de M. CARTAN ¹⁴⁾ son groupe infinitésimal se décompose en un groupe unitaire semi-simple et un certain nombre de matrices infinitésimales distinguées. Nous désignerons par G_1 le sous-groupe semi-simple fini ¹⁵⁾ et par G_2 le sous-groupe abélien engendré par les matrices infinitésimales distinguées. En appliquant un théorème de O. SCHREIER déjà cité ¹⁶⁾ on voit que tout élément du groupe G est le produit de deux éléments échangeables appartenant respectivement aux groupes G_1 et G_2 .

D'après un théorème de M. WEYL ¹⁷⁾ le groupe G_1 est clos. Il est évident que, si le groupe G_2 est clos, G l'est également. La proposition réciproque peut être démontrée comme il suit.

Désignons par $U_1, \dots, U_s, V_1, \dots, V_{r-s}$ une base infinitésimale du groupe G telle que les matrices U_1, \dots, U_s forment une base du groupe G_1 et que V_1, \dots, V_{r-s} sont des matrices infini-

¹¹⁾ Voir I, p. 114, note ⁸⁾.

¹²⁾ I, p. 122.

¹³⁾ L. Maurer, Münch. Ber. (1894) p. 305. Pour démontrer que le groupe G est unitaire on peut aussi remarquer qu'il est semblable à un groupe de matrices unitaires (I, p. 113).

¹⁴⁾ E. Cartan, l. c. ^{3 b)}, p. 10-11.

¹⁵⁾ Nous rappelons qu'un groupe infinitésimal linéaire engendre toujours un groupe fini du même ordre (Cf. I, p. 123).

¹⁶⁾ I, p. 124, note ²¹⁾.

¹⁷⁾ H. Weyl, Theorie der Darstellung kontinuierlicher halb-einfacher Gruppen durch lineare Transformationen III., Math. Zeitschr. 24 (1926) p. 377-395; p. 380-381. Le groupe G étant complètement réductible (I, p. 113), cela résulte aussi par un raisonnement très simple dû à M. Cartan (l. c. ^{3 b)}, p. 11-12).

tésimales distinguées constituant une base du groupe G_2 . Supposons que le groupe G_2 ne soit pas clos. Le plus petit groupe clos qui le contient est alors un sous-groupe de G d'ordre plus grand que $r - s$. Il admet donc une matrice infinitésimale $V = \sum c_v U_v + \sum d_v V_v$, où les nombres c_v ne sont pas tous nuls. Cette matrice étant une matrice infinitésimale distinguée du groupe G , il s'ensuit que $\sum c_v U_v$ est une matrice infinitésimale distinguée du groupe semi-simple G_1 , ce qui est impossible.

Les éléments appartenant à la fois à G_1 et G_2 sont en nombre fini. On sait en effet que les éléments d'un groupe semi-simple unitaire échangeables avec tout élément du groupe forment un sous-groupe abélien fini¹⁸⁾.

Théorème III. *Tout groupe linéaire continu borné et connexe non commutatif est un groupe unitaire et se compose d'un groupe semi-simple unitaire clos G_1 et d'un groupe abélien G_2 qui est engendré par les matrices infinitésimales distinguées. Le groupe G_2 est ouvert ou clos en même temps que G et n'a avec G_1 qu'un nombre fini d'éléments en commun. Tout élément du groupe G est le produit de deux éléments appartenant respectivement aux groupes G_1 et G_2 .*

Supposons maintenant que le groupe G soit ouvert. D'après le théorème I le groupe G_2 est le produit direct d'un groupe abélien clos G_{21} (qui peut se réduire à l'élément unité) et d'un groupe abélien ouvert G_{22} , isomorphe à un groupe de translations. Soit G_1^* le groupe clos composé des groupes G_1 et G_{21} . En vertu du théorème III, tout élément du groupe G est le produit de deux éléments appartenant respectivement à G_1^* et G_{22} . Nous prouverons que G est le produit direct de ces deux groupes.

Soit A un élément commun à G_1^* et G_{22} . On a $A = A_1 A_2$, les éléments échangeables A_1, A_2 appartenant respectivement à G_1 et G_{21} . L'élément $A_1 = A A_2^{-1}$, commun à G_1 et G_2 , est cyclique. Il existe donc un entier m tel que $A^m A_2^{-m} = E$, ou $A^m = A_2^m$. L'élément A^m appartient donc aux groupes G_{21} et G_{22} , d'où $A^m = E$. Mais le groupe G_{22} ne contient aucun élément cyclique sauf l'élément unité¹⁹⁾. Par conséquent $A = E$.

Théorème IV. *Lorsque le groupe G est ouvert, il est le produit direct d'un groupe clos et d'un groupe abélien ouvert, isomorphe à un groupe de translations, engendré par certaines matrices infinitésimales distinguées.*

En remplaçant le groupe G_2 par le plus petit groupe clos qui le contient, on obtiendra le plus petit groupe clos contenant G . L'ordre d'un groupe abélien étant au plus égal au nombre n des variables transformées, respectivement à $n/2$ si les coefficients du groupe sont réels, on peut énoncer le

Théorème V. *La différence entre l'ordre du plus petit groupe clos qui contient le groupe G et l'ordre de G est toujours moindre que n (respectivement $n/2$ dans le cas réel).*

En tenant compte du théorème I et en introduisant l'ordre du plus grand groupe abélien contenu dans G_1 on pourrait encore préciser cette évaluation.

§ 3.

D'après un théorème de M. CARTAN¹⁹⁾ le groupe semi-simple G_1 est complètement engendré par ses matrices infinitésimales. Cela a lieu aussi pour le groupe abélien G_2 et par conséquent aussi pour G . Il en résulte que l'ensemble des éléments anormaux du groupe G est de mesure nulle²⁰⁾.

Soient $\alpha_1 i, \dots, \alpha_n i$ les racines caractéristiques d'une matrice infinitésimale U du groupe G , les nombres α_v étant rangés dans un ordre quelconque. Le raisonnement cité tout à l'heure montre que le système $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ est normal pour presque toute matrice U . En reprenant la démonstration du théorème II on voit que les angles α_v satisfont à un certain nombre d'équations linéaires homogènes indépendantes, à coefficients entiers, identiquement remplies dans le groupe G , et que l'ensemble des matrices infinitésimales admettant en outre une ou plusieurs relations non identiques est de mesure nulle. Pour établir le dernier point, il suffit de remarquer que cet ensemble est représenté dans l'espace des paramètres par une infinité dénombrable des variétés algébriques de dimension $< r$.

¹⁸⁾ E. Cartan, l. c. 3^a), p. 145.

¹⁹⁾ E. Cartan, l. c. 3^a), p. 143—144.

²⁰⁾ Voir I, p. 126.

Théorème VI. *Tout groupe linéaire continu borné et connexe est complètement engendré par ses matrices infinitésimales. Presque tous les éléments du groupe sont normaux et du même ordre. Les éléments exceptionnels sont d'ordre inférieur.*

Lorsque le groupe G est semi-simple et par conséquent clos, il admet une base infinitésimale régulière²¹⁾ U_1, \dots, U_r et on peut le représenter tout entier par l'expression $e^{t_1 U_1 + \dots + t_r U_r}$, le point (t) étant intérieur à une sphère fixe²²⁾.

Il en résulte immédiatement qu'étant donné un voisinage quelconque de l'élément unité, il existe un entier m tel que tout élément du groupe G est la m -ième puissance d'un élément appartenant à ce voisinage. En prenant un voisinage suffisamment petit on voit que l'équation

$$A = \left(e^{t_1 U_1} \dots e^{t_r U_r} \right)^m$$

donne une représentation trigonométrique ou rationnelle du groupe entier, le nombre des paramètres étant égal à l'ordre du groupe G ²³⁾.

Une telle représentation existe aussi, si le groupe G est clos sans être semi-simple. En effet, le groupe abélien G_2 est alors clos (théorème III) et par suite admet une base infinitésimale régulière.

Si le groupe G est ouvert, il est le produit direct d'un groupe clos et d'un groupe abélien isomorphe à un groupe de translations (théorème IV). Le groupe abélien admet une représentation, à l'aide de polynômes trigonométriques presque périodiques (voir p. 159).

Théorème VII. *Soit G un groupe linéaire continu borné et connexe d'ordre r . Si le groupe est clos, il admet une représentation paramétrique à l'aide de polynômes trigonométriques ou fonctions rationnelles de r paramètres réels. Lorsqu'il est ouvert, on peut représenter ses coefficients comme fonctions de r paramètres réels, lesquelles sont des polynômes trigonométriques ou fonctions rationnelles par rapport à certains de ces paramètres et*

²¹⁾ Cf. I, p. 124.

²²⁾ E. Cartan, l. c. 3 a), p. 144.

²³⁾ Cf. I, p. 124.

des polynômes trigonométriques presque périodiques par rapport aux autres paramètres.

Nous savons que tout groupe linéaire clos et connexe est un groupe à s générateurs ($s \leq r$)²⁴⁾. On peut préciser ce théorème de la manière suivante²⁵⁾:

Théorème VIII. *Tout groupe linéaire continu borné et connexe, non commutatif, est un groupe à deux générateurs.*

§ 4.

Soit G un groupe linéaire dont tous les éléments sont bornés. Nous supposons en outre que le groupe G est connexe, c'est-à-dire qu'il est impossible de décomposer son ensemble représentatif E ²⁶⁾ en deux sous-ensembles de distance positive.

Désignons par \bar{G} le plus petit groupe fermé qui contient G . C'est un groupe connexe de Lie. Les racines caractéristiques de ses matrices ont évidemment le module un. Par conséquent, les racines caractéristiques de ses matrices infinitésimales sont purement imaginaires. Il en résulte (voir p. 161) que G est un groupe unitaire. Tout élément de \bar{G} est donc le produit de deux éléments échangeables appartenant respectivement à un sous-groupe clos semi-simple \bar{G}_1 et un sous-groupe abélien \bar{G}_2 engendré par les matrices infinitésimales distinguées de \bar{G} (cf. p. 161). Soit $V_1, \dots, V_p, \tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_q$ une base infinitésimale du groupe \bar{G}_2 , telle que les matrices V_1, \dots, V_p sont elliptiques et les matrices $\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_q$ non elliptiques, le nombre q étant aussi petit que possible. Les matrices $\tilde{V}_1, \dots, \tilde{V}_q$ engendrent un groupe abélien qui ne contient aucun élément borné sauf l'élément unité, car, si l'élément $e^{c_1 \tilde{V}_1 + \dots + c_q \tilde{V}_q}$ était borné, le groupe $e^{(c_1 \tilde{V}_1 + \dots + c_q \tilde{V}_q)t}$ le serait aussi²⁷⁾ et on pourrait diminuer q .

Etant donné un élément quelconque A du groupe G , on peut écrire

$$A = B \cdot e^{c_1 V_1 + \dots + c_p V_p} e^{d_1 \tilde{V}_1 + \dots + d_q \tilde{V}_q},$$

²⁴⁾ I, p. 127.

²⁵⁾ H. Auerbach, Sur le nombre de générateurs d'un groupe linéaire borné, Comptes Rendus 197 (1933) p. 1385-1386.

²⁶⁾ I, p. 113.

²⁷⁾ I, p. 122.

B désignant un élément du groupe clos \overline{G}_1 . Les trois facteurs étant échangeables deux à deux, il s'ensuit que le troisième est une matrice bornée, c'est-à-dire l'élément unité. Le groupe G est donc contenu dans le groupe borné $\overline{G}_1 \cdot e^{t_1 V_1 + \dots + t_p V_p}$ et par suite lui-même borné.

Théorème IX. *Si tous les éléments d'un groupe linéaire connexe sont bornés, le groupe est borné.*

(Reçu par la Rédaction le 15. 12. 1933).

Le journal „Studia Mathematica“ publie des Mémoires et Notes du domaine de Mathématiques pures et appliquées. La Rédaction poursuit le but de grouper autour de ce journal les recherches concernant l'analyse fonctionnelle et tout ce qui s'y rattache.

Les manuscrits doivent être adressés à l'un des Rédacteurs :

Stefan Banach, Lwów, ul. św. Mikołaja, 4.

Hugo Steinhaus, Lwów, ul. Kadecka, 14.

Après avoir été examiné par les Rédacteurs, ils seront pourvus d'une date d'entrée, qui sera imprimée à la fin du Mémoire en question.

Les travaux doivent être dactylographiés en français, allemand, anglais ou italien. Tout caractère différent du type courant doit être marqué au crayon en couleur. Les renvois bibliographiques doivent nommer l'auteur, le travail, et le journal, et indiquer le volume, l'année de la publication et les numéros de la page initiale et finale.

Les épreuves corrigées avec tout le soin possible doivent être renvoyées avec les épreuves précédentes sans aucun délai à M. H. Steinhaus, Lwów (Pologne), ul. Kadecka, 14, (tel. 6490). Les changements du texte causant des dépenses additionnelles seront exécutés aux frais de l'auteur. 50 tirages à part seront fournis gratuitement à l'auteur aussitôt après avoir quitté la presse; la reliure en carton et les exemplaires dépassant la cinquantaine sont payés par MM. les auteurs. Le prix de ce volume est 1 dollar-or = 5 francs-or suisses à l'étranger, 8 zł. en Pologne. Le prix de volumes I, II, III est 1 1/2 dollar-or par volume.

Les versements (par mandat international ou par chèque [P. K. O. Nr. 154.127, Studia Mathematica]), les tirages à part et les périodiques destinés pour les „Studia“ doivent être adressés à l'„Administration de Studia Mathematica, Lwów, ul. św. Mikołaja 4, Uniwersytet“.